



Año 3, No. 3  
Abril 2021

# CONGRESO INTERNACIONAL DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS ADMINISTRATIVAS "CREANDO NEGOCIOS SUSTENTABLES" **2021**

## RETOS Y PERSPECTIVAS DEL EMPRENDIMIENTO Y NEGOCIOS CON PEQUEÑOS PRODUCTORES



Editoras Responsables:  
Arcelia Toledo López  
Sandra Nelly Leyva Hernández  
María Yescas León  
Dora Lilia Guzmán Cruz



## Modelo de optimización estocástico multi-etapas aplicado a la planeación de la producción de una PYME

Héctor Rivera-Gómez<sup>1</sup>, José Emmanuel Gómez Rocha<sup>1</sup>, Jaime Garnica-González<sup>3</sup>

<sup>1,2,3</sup>Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, Área Académica de Ingeniería

<sup>1</sup>Autor para correspondencia: hriver06@hotmail.com

### Resumen

En el presente artículo se realizan diversos modelos de programación lineal estocástica multi-etapas donde la incertidumbre de la variable aleatoria se modela utilizando una distribución discreta o una distribución continua. Los modelos desarrollados se aplican a un plan agregado de producción para una empresa que fabrica muebles localizada en el estado de Hidalgo y con clientes importantes tales como cadenas de tiendas con presencia en todo el país. Se define a la capacidad de producción como la variable aleatoria del modelo. La incertidumbre se modela mediante un árbol de escenarios en un entorno multi-etapas. El propósito principal de esta investigación es determinar una solución factible al plan agregado de producción en un tiempo computacional razonable. Para la solución del modelo se utilizó el software Lingo, aplicando el solucionador Branch and Bound (B-and-B) y además se comparó los dos modelos desarrollados. El estudio se complementa con un extenso análisis de sensibilidad donde se comparan diversos indicadores de interés de los modelos propuestos. Además, se analiza el impacto de la restricción del nivel de servicio en las variables de decisión.

**Palabras clave:** Plan agregado de producción, optimización estocástica multi etapas, árbol de escenarios.

### Introducción

Los planes agregados de producción tienen un papel muy importante en las industrias manufactureras, dentro de una planeación global en una organización se encuentra en la planeación a mediano plazo, siendo razonable los periodos de 3 a 18 meses, Jamalnia et al (2017). Los planes de producción buscan siempre determinar los niveles óptimos de producción, niveles de contratación, despido,



inventarios, retrasos, subcontrataciones, etc. En este artículo se elabora un plan agregado de producción para una empresa de muebles localizada en el estado de Hidalgo. En particular se desarrollan dos modelos de programación lineal entera mixto estocástica.

Existen diversas metodologías empleadas en la literatura para generar planes agregados de producción bajo incertidumbre y esta se puede clasificar en seis grandes categorías: programación matemática estocástica, programación posibilista, programación matemática difusa, modelos de simulación, metaheurísticos y razonamiento evidencial, Jamalnia et al. (2017). Algunos autores se han enfocado en la optimización estocástica multi objetivos, por ejemplo, Nowak (2013) realizó un trabajo que combina programación matemática lineal con objetivos múltiples (multiobjetivo), simulación y un enfoque interactivo con demanda incierta. Jamalnia et al. (2017) presentaron un modelo estocástico no lineal de optimización con objetivos múltiples (multiobjetivo), para un plan agregado de producción bajo incertidumbre. Su objetivo fue tener una estrategia de persecución y de nivelación. Zhao et al. (2019) presentaron un caso de estudio para la industria farmacéutica donde optimizaron la cantidad de producción, minimizando la duración de ensayos clínicos y los costos operativos. Rakes, Franz, y Wynne (1984) y Chen y Liao (2003) también desarrollaron trabajos donde existe incertidumbre en los planes de producción con objetivos múltiples.

Otros investigadores se han enfocado en la optimización estocástica lineal y lineal entera mixta donde el medio ambiente suele tener incertidumbre. Birge y Louveaux (1997) y Wagner & Whitin (1958) son considerados los primeros investigadores en estudiar los planes de producción bajo incertidumbre, resolviendo un problema de un estado mediante programación dinámica hacia adelante para un solo producto. Zanjani et al. (2013) realizaron un modelo de programación matemática lineal entera mixta estocástica multi-etapas para la producción de aserraderos (industria maderera) en Canadá. Huang (2005) presentó un modelo para planes de producción mediante la programación matemática estocástica multi etapas.

La optimización estocástica no lineal ha sido estudiada por diversos autores como Ning et al. (2013), Mirzapour Al-e-hashem et al. (2013) y Lieckens & Vandaele



(2014) quienes propusieron metodologías de programación matemática no lineal entera mixta para estudiar el problema de decisión de un plan agregado de producción en presencia de incertidumbre. Nasiri et al. (2014) presentaron un modelo estocástico no lineal para un plan de producción y distribución en una cadena de suministro de tres niveles (proveedores, centros de producción y clientes). De igual manera Nasiri et al. (2010a) propusieron un modelo de programación matemática mixto entero no lineal estocástico para una cadena de suministro para posteriormente extender su trabajo en un sistema multi-etapas en Nasiri et al (2010b). En el trabajo de Ning et al. (2013), se presentó un modelo de aplicación no lineal multiproducto donde la demanda del mercado y el costo de producción son inciertos. Lieckens y Vandaele (2014) consideraron como variables aleatorias a la demanda y el tiempo de entrega

La optimización robusta se ha utilizado para modelar incertidumbre en los planes agregados tales como los trabajos de Leung y Wu (2004), Kanyalkar y Adil (2010), Mirzapour Al-e-hashem, Malekly y Aryanezhad (2011), Mirzapour Al-e-hashem, Aryanezhad y Sadjadi (2012), Makui, Heydari, Aazami y Dehghani (2016) donde se utilizaron técnicas de optimización robusta para lidiar con los planes agregados de producción bajo incertidumbre.

El árbol de escenarios es una forma computacionalmente viable de discretizar los datos estocásticos dinámicos subyacentes a lo largo del tiempo en un problema de optimización estocástico, Zanjani et al. (2013). Este permite poder llegar a soluciones viables en tiempos razonables. Hu y Hu (2018), utilizaron el árbol de escenarios para optimizar un problema de secuenciación y tamaño de lote bajo demanda incierta. Körpeoglu, Yaman y Aktürk (2011) de igual manera utilizaron un árbol de escenarios para resolver problemas de plan maestro de secuenciación (MPS).

El presente artículo tiene como objetivo principal comparar dos modelos de optimización estocástica aplicados a un plan agregado de producción de una empresa de la localidad, donde la aleatoriedad de la capacidad de producción se modela mediante una distribución discreta y una distribución continua. En general en este trabajo se compara la eficiencia del modelo en tiempo de resolución. Los



resultados obtenidos buscan determinar las ventajas de un modelo respecto al otro, cual es el alcance de ambos modelos y en qué casos es recomendable utilizar cada uno. Además, se comparan los dos modelos desarrollados en diversos indicadores de desempeño y se analiza el impacto de la restricción del nivel de servicio en la solución óptima.

El resto del artículo consta de las siguientes secciones. La sección 2 la describe el modelo bajo estudio y formula el modelo determinístico y estocástico desarrollados. La metodología se presenta en la sección 3. Se desarrolla una instancia numérica en la sección 4. Se realiza un extenso análisis de sensibilidad en la sección 5. Finalmente, la sección 6 concluye el artículo.

### **Descripción del modelo**

Este trabajo presenta una comparación de dos modelos de programación lineal estocástica aplicados a un plan agregado de producción de una empresa mueblera. El modelo determinístico de base define el horizonte de planeación en  $T$  meses y la función objetivo busca reducir los costos de producción del producto, considerando los costos de fuerza laboral, los niveles de inventario, producción y retrasos por mes. Se considera además un nivel de servicio mayor al 90% para cada mes, esto bajo políticas actuales de la empresa. El problema bajo estudio es del tipo lineal entero mixto, que el software de optimización Lingo puede resolver mediante sus algoritmos integrados para problemas de programación matemática entera.

### **Formulación del modelo determinístico**

El modelo determinístico de base para el plan agregado además de optimizar el costo total de producción, determina la cantidad de empleados que deben contratarse y despedirse por mes, la cantidad de piezas que se van a producir, las unidades que se enviarán al almacén de producto terminado y los retrasos que se obtendrán por mes respetando un nivel de servicio del 90% en cada periodo. El modelo considera los siguientes supuestos:

- La demanda es conocida para todos los periodos.
- La capacidad de producción por trabajador es la misma para todos los meses.



- Existe la posibilidad de entregar piezas a destiempo, pero incurriendo en un costo por faltantes, esto debido a que no existe la posibilidad de comprar los faltantes (outsourcing) y no se permiten horas extras en la empresa.
- Los faltantes deberán entregarse inmediatamente al mes siguiente del que fueron solicitados.
- Los costos asociados a producción de una pieza, de inventario y de faltantes son lineales.
- Existe la materia prima suficiente para la elaboración del producto  $X_t$ .

La notación utilizada para el modelo determinístico se muestra en la Tabla 1, donde se presentan los respectivos índices, parámetros y variables de decisión.

Tabla 1: índices, parámetros y variables de decisión del modelo determinista.

Índices:	
$T$	horizonte de tiempo del plan agregado.
Parámetros:	
$D_t$	demanda mensual existente en el periodo $t$
$C_p$	costo de producción por mes
$C_F$	costo de despedir un trabajador
$C_R$	costo de contratar un trabajador
$C_I$	costo por mantener inventario por mes
$C_S$	costo de entregar producto a destiempo
$C_X$	costo unitario de producir un mueble.
$k$	capacidad de producción mensual por trabajador.
Variables de decisión:	
$W_t$	número de trabajadores por mes
$P_t$	trabajadores asignados a producción por mes
$R_t$	trabajadores contratados por mes
$F_t$	trabajadores despedidos por mes
$X_t$	número de piezas a fabricar por mes
$I_t$	número de piezas en el inventario por mes
$I_\alpha$	inventario mínimo determinado por las políticas de la empresa
$S_t$	retrasos por mes

Elaboración propia.

La función objetivo del modelo determinístico minimiza el costo total, considerando los costos asociados a los trabajadores asignados a producción, los despidos, contrataciones, además de los costos de inventario, retrasos y producción, como se define en la siguiente ecuación:



$$\min Z = \sum_{t=1}^T P_t C_P + \sum_{t=1}^T F_t C_F + \sum_{t=1}^T R_t C_R + \sum_{t=1}^T I_t C_I + \sum_{t=1}^T X_t C_X + \sum_{t=1}^T S_t C_S \quad (1)$$

Las restricciones del modelo son las siguientes:

$$W_t = W_{t-1} + R_{t-1} - F_{t-1} \quad \forall t = 1, \dots, T \quad (2)$$

$$W_t = P_t + F_t \quad \forall t = 1, \dots, T \quad (3)$$

$$X_t + I_{t-1} = D_t + S_{t-1} + I_t - S_t \quad \forall t = 1, \dots, T \quad (4)$$

$$X_t \leq kP_t \quad \forall t = 1, \dots, T \quad (5)$$

$$I_t \geq I_\alpha \quad \forall t = 1, \dots, T \quad (6)$$

$$D_t - S_t \geq .90D_t \quad \forall t = 1, \dots, T \quad (7)$$

$$W_t, P_t, R_t, F_t, X_t, I_t, S_t, D_t \geq 0 \quad \forall t = 1, \dots, T, t \in T \quad (8)$$

$$W_t, P_t, R_t, F_t, X_t, I_t, S_t, D_t \in \mathbb{Z} \quad \forall t = 1, \dots, T \quad (9)$$

La restricción (2) se enfoca en el tamaño y el flujo de la fuerza laboral en la empresa, indica que los trabajadores totales en el periodo  $t$  deberán ser igual a los existentes, más los contratados del periodo anterior  $t - 1$ , menos los despedidos del periodo anterior  $t - 1$ . La restricción (3) es sobre la asignación de la fuerza laboral, simplemente define cuantos trabajadores se dedicarán a la producción y los que se despedirán por periodo  $t$ . La restricción (4) es referente al balance de demanda e inventario en la empresa, donde lo que se produce más el inventario del mes anterior debe ser igual a la demanda del periodo más los retrasos pendientes que deben enviarse, más el inventario de que se debe dejar en el periodo menos los retrasos del mes. La restricción (5) es sobre la capacidad de producción, asegura que los trabajadores asignados a producción sean capaces de fabricar las unidades requeridas en el periodo. La restricción (6) define que el inventario del periodo sea mayor al inventario de seguridad definido por la empresa. La restricción (7) indica que el nivel del servicio sea mayor o igual al 90% por mes, esta restricción es política



de la empresa de cumplir con al menos el 90% de los pedidos de los clientes. La expresión (8), son las restricciones de no negatividad y de pertenencia de las variables a sus conjuntos correspondientes. La expresión (9) indica que las variables de decisión deben ser enteros, lo que implica un modelo de programación entera pura estocástica.

### Formulación del modelo estocástico

El modelo determinístico anterior es la base para desarrollar un modelo estocástico multi-etapas donde la capacidad de producción es la variable aleatoria. Se desarrollaron dos modelos estocásticos uno donde la capacidad de producción se modela con una distribución normal. Posteriormente en el segundo modelo estocástico la capacidad de producción se asocia con una distribución discreta con tres posibles valores (bajo, medio y alto) con sus respectivas probabilidades. El modelo cumple los mismos supuestos que el modelo determinístico, pero se considera lo siguiente:

- Para el primer modelo estocástico la capacidad de producción sigue una distribución normal con media 12 y desviación estándar 2. Estos valores fueron obtenidos mediante datos históricos de la empresa. Se utilizó el complemento del software Arena™ Input Analyzer para determinar estos valores.
- Para el segundo modelo estocástico se utilizó una distribución discreta para modelar la variable aleatoria, se aplicó el método de cuadratura Gaussiana, Zanjani et al. (2013), para determinar las probabilidades (0.3, 0.5, 0.2) para los valores (bajo, medio y alto), respectivamente. Los valores bajo, medio y alto se obtuvieron a partir de la media y desviación estándar.

La notación del modelo estocástico se muestra a continuación.

**Tabla 2: Índices, parámetros y variables de decisión del modelo estocástico.**

Índices:	
$T$	Horizonte de tiempo del plan agregado.
$\Omega$	Conjunto de eventos aleatorios.
$N$	Número de escenarios considerados para la capacidad de producción





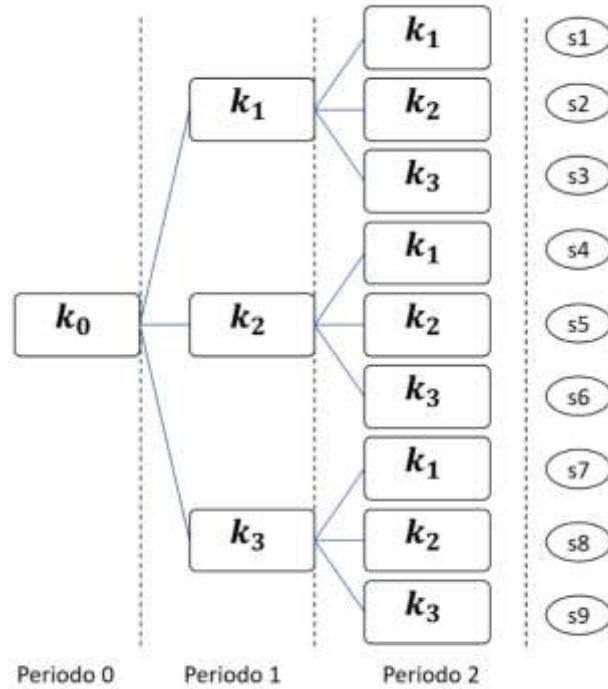
$\omega$	Evento aleatorio.
Parámetros:	
$D_t$	Demanda mensual en el periodo $t$
$C_p$	Costo mensual para los trabajadores asignados a producción
$C_F$	Costo de despedir un trabajador
$C_R$	Costo de contratar un nuevo empleado
$C_I$	Costo por mantener inventario mensualmente
$C_S$	Costo de entregar a destiempo
$C_X$	Costo unitario de producir un mueble
$k_t^\omega$	Capacidad de producción mensual por trabajador para el escenario $\omega$ , en el periodo $t$ (variable aleatoria del modelo)
Variables de decisión:	
$W_t$	Número de trabajadores por periodo
$P_t$	Trabajadores asignados a producción
$R_t$	Trabajadores contratados
$F_t$	Trabajadores despedidos
$X_t$	Número de piezas que deben producirse en cada periodo
$I_t$	Número de piezas en inventario por periodo
$I_\alpha$	Inventario mínimo requerido por las políticas de la empresa
$S_t$	Retrasos por mes
$P^\omega$	Probabilidad de ocurrencia del escenario, se obtiene por la siguiente ecuación:
$\sum_{\omega=1}^N P^\omega = 1 \quad (10)$	
La ecuación (10) indica que la suma de todas las probabilidades en el árbol de escenarios debe ser igual a uno.	

Elaboración propia.

La estrategia de solución utilizada en los modelos estocásticos se basa en la generación de árbol de escenarios para la variable aleatoria. En cada periodo la variable aleatoria puede tomar un conjunto de valores definidos con cierta probabilidad, lo que al final del horizonte de planeación genera un conjunto de escenarios  $s_i$ . Por ejemplo, en la Figura 1 se puede observar como para dos periodos se generan nueve escenarios, cada uno con su respectiva probabilidad, si se considera que en cada periodo la variable aleatoria puede tener tres valores diferentes. La suma de todas las probabilidades de los nueve escenarios deberá ser igual a uno.



**Figura 1:** Árbol de decisiones del modelo discreto y continuo. Elaboración propia.



La función objetivo es similar al modelo determinístico, con la diferencia de que optimiza los costos para cada escenario generado:

$$\min Z = \sum_{\omega=1}^N P^{\omega} \sum_{t=1}^T P_t(\omega) C_P + \sum_{\omega=1}^N P^{\omega} \sum_{t=1}^T F_t(\omega) C_F + \sum_{\omega=1}^N P^{\omega} \sum_{t=1}^T R_t(\omega) C_R + \sum_{\omega=1}^N P^{\omega} \sum_{t=1}^T I_t(\omega) C_I + \sum_{\omega=1}^N P^{\omega} \sum_{t=1}^T X_t(\omega) C_X + \sum_{\omega=1}^N P^{\omega} \sum_{t=1}^T S_t(\omega) C_S \quad (11)$$

Las restricciones del modelo estocástico son las siguientes:

$$W_t(\omega) = W_{t-1}(\omega) + R_{t-1}(\omega) - F_{t-1}(\omega) \quad \forall t = 1, \dots, T, \omega = 1, \dots, N, \omega \in \Omega, t \in T \quad (12)$$

$$W_t(\omega) = P_t(\omega) + F_t(\omega) \quad \forall t = 1, \dots, T, \omega = 1, \dots, N, \omega \in \Omega, t \in T \quad (13)$$

$$X_t(\omega) + I_{t-1}(\omega) = D_t(\omega) + S_{t-1}(\omega) + I_t(\omega) - S_t(\omega)$$



$$\forall t = 1, \dots, T, \omega = 1, \dots, N, \omega \in \Omega, t \in T \quad (14)$$

$$X_t(\omega) \leq k_t^\omega P_t(\omega) \forall t = 1, \dots, T, \omega = 1, \dots, N, \omega \in \Omega, t \in T \quad (15)$$

$$I_t(\omega) \geq I_\alpha \forall t = 1, \dots, T, \omega = 1, \dots, N, \omega \in \Omega, t \in T \quad (16)$$

$$D_t(\omega) - S_t(\omega) \geq .90D_t(\omega) \forall t = 1, \dots, T, \omega = 1, \dots, N, \omega \in \Omega, t \in T \quad (17)$$

$$W_t(\omega), P_t(\omega), R_t(\omega), F_t(\omega), X_t(\omega), I_t(\omega), S_t(\omega), D_t(\omega) \geq 0$$

$$\forall t = 1, \dots, T, \omega = 1, \dots, N, \omega \in \Omega, t \in T \quad (18)$$

$$P_t(\omega), R_t(\omega), F_t(\omega), S_t(\omega), I_t(\omega) \in \mathbb{Z} \forall t = 1, \dots, T \quad (19)$$

La restricción (12) trata sobre el tamaño de la fuerza laboral en la empresa, los trabajadores en cierto periodo deberán ser igual a los que existían en el periodo anterior más los contratados el mes anterior menos los despedidos del mes anterior en cada escenario. La restricción (13) indica cuantos trabajadores se asignarán a producción y los que se despedirán por periodo en cada escenario. La restricción (14) es acerca del balance de demanda e inventario en la empresa, lo que se produce más el inventario del mes anterior debe ser igual a la demanda más los retrasos pendientes que deben enviarse, más el inventario que se debe dejar menos los retrasos del mes, es decir aquello que no se puede cubrir en un escenario. La restricción (15) incorpora la variable aleatoria al modelo, y trata sobre la capacidad de producción de la empresa y asegura que los trabajadores asignados a producción sean capaces de fabricar los requerimientos de la gerencia. La restricción (16) indica que el inventario sea mayor al inventario de seguridad por mes en cada escenario. La restricción (17) asegura que el nivel de servicio sea mayor o igual al 90%, en todos los periodos y en todos los escenarios. La expresión (18) son las restricciones de no negatividad y de pertenencia de las variables a sus conjuntos correspondientes. La expresión (19) indica que las variables deben ser enteras.



## Metodología

La metodología empleada en este artículo se dividió en seis etapas, asistiendo a la empresa para la obtención de datos y el desarrollo de los modelos de optimización. Los pasos empleados en la metodología son los siguientes:

1.- Obtención y análisis de datos: Para la elaboración del plan agregado de producción se recurrió a datos históricos de la empresa para poder obtener parámetros de producción y costos asociados. Se realizó una clasificación ABC de productos, donde se determinó el artículo estrella, el cual genera más ingresos a la empresa. En este caso resultó ser una silla tipo rustica.

2.- Modelación matemática determinística: se desarrolló un modelo determinístico que minimizó los costos de producción del producto. Se tomó en cuenta en el modelo las políticas de la empresa de mantener un inventario mínimo cada mes y tener un nivel de servicio por lo menos del 90%.

3.- Determinación de demanda y capacidad de producción: Se procedió a realizar una proyección de la demanda del producto para seis periodos (meses), utilizando diversos métodos cualitativos (promedios móviles, doble suavizamiento exponencial y regresión lineal). Así mismo se evaluaron estos pronósticos, observando el método que mejor se adapta a los datos, se consideró también la opinión del área de ventas de la empresa a fin de generar un buen pronóstico. Posteriormente con los datos históricos de producción se determinó la capacidad de producción promedio por trabajador. Posteriormente se desarrolló el modelo determinista en el software de optimización Lingo, resolviéndolo para seis periodos.

4.- Generación del primer modelo estocástico: Debido a la política de contrataciones y despidos, factores ergonómicos, curva de aprendizajes, entre otros factores, se notó que la capacidad de producción de los trabajadores no era constante en el tiempo. En base a datos históricos de producción, se utilizó la herramienta Input Analyzer del software Arena™ observando que la capacidad de producción sigue una distribución normal con media 12 y desviación estándar aproximadamente de 2 como se muestra en la Figura 2. Se desarrolló un modelo estocástico en el software Lingo utilizando la distribución normal para modelar a la variable aleatoria.



Figura 2: Análisis de los datos para la capacidad de producción, elaboración propia.

Distribution Summary	
Distribution:	Normal
Expression:	$NORM(12, 1.99)$
Square Error:	0.014070
Chi Square Test	
Number of intervals:	= 3
Degrees of freedom:	= 0
Test Statistic:	= 1.63
Corresponding p-value:	< 0.005
Kolmogorov-Smirnov Test:	
Test Statistic:	= 0.120
Corresponding p-value:	> 0.15
Data Summary	
Number of Data Points:	= 30
Min Data Value:	= 8.8
Max Data Value:	= 15.7
Sample Mean:	= 12
Sample Std Dev:	= 2.02

5.- Generación del segundo modelo estocástico: se utilizó el método de cuadratura Gaussiana para aproximar la distribución normal definida del paso anterior con una distribución discreta con tres posibles valores (bajo, medio y alto) al igual que Zanjani et al. (2013). Las probabilidades asociadas a dichos valores resultaron ser 0.3, 0.5 y 0.2 respectivamente.

6.- Resolución y comparación de los modelos: Se procedió a resolver ambos modelos estocásticos desde dos periodos hasta el número máximo de periodos que la computadora fue capaz de resolver. Se registraron los resultados para poder realizar una comparación, se calculó la diferencia o GAP de optimalidad, se realizó un extenso análisis de sensibilidad y se analizó el impacto de la restricción del nivel de servicio en las variables de decisión.

### Análisis de resultados

Para la solución del problema se empleó una computadora Dell Inspiron 5570 con un procesador Intel® Core™ i5-8250U con 1.6GHz, con una memoria RAM de 4Gb con sistema operativo Windows 10. Se utilizó el software de optimización Lingo 17.0, con 100 heurísticos en el pre-solucionador de la programación entera y se empleó el método de Branch and Bound para el solucionador de programación entera. Se encontraron resultados muy similares respecto a la función objetivo de los modelos continuo y discreto con lo cual se comprueba que el cambio del modelo continuo a un modelo discreto resulta ser viable cuando el problema se vuelve más grande. En



la Tabla 3 se observa como el problema va creciendo en dimensión cuando se agregan más periodos en el plan agregado de producción. Este crecimiento es debido a que se genera el modelo determinista equivalente para cada rama del árbol de escenarios (note que el tamaño del árbol de escenarios viene dado por  $l^n$ , siendo  $n$  el número de periodos y  $l$  el número de ramas que se abren por escenario en el árbol de escenarios).

**Tabla 3: Comparación de como el tamaño del problema va aumentando con respecto al número de periodos para los modelos estocásticos. Elaboración propia.**

Perio dos	Escenarios	v.a.	Modelo estocástico			Deterministas equivalentes		
			Var.	Var. ent.	Restric ciones	Var.	Var. Ent.	Restric ciones
2	9	2	14	10	12	126	90	198
3	27	3	21	15	18	567	405	936
4	81	4	28	20	24	2268	1620	3852
5	243	5	35	25	30	8505	6075	14706
6	729	6	42	30	36	30618	21870	53586

Como se puede observar de la Tabla 3, el número de variables empleadas en el problema estocástico crece conforme el número de periodos aumenta, esto hace que mientras más grande sea el número de periodos se dificulta más encontrar una solución al problema, si se asume que la variable aleatoria está asociada a una distribución continua tal como la distribución normal. El número de iteraciones sigue siendo significativamente más grande en el modelo de distribución continua con respecto al modelo con la distribución discreta, por consiguiente, el tiempo necesario para resolver el problema es mayor en el modelo con la distribución continua como se observan en la Tabla 4. Además, en esta tabla se comparan ambos modelos estocásticos con respecto al tiempo de CPU (tiempo que tardó a la computadora encontrar una solución) y el número de iteraciones necesarias para resolver el problema.



**Tabla 4: Comparación entre los modelos continuo y discreto respecto al tiempo que necesito para resolver el problema y el número de iteraciones, “\*” denota que se detuvo el problema a los 6000s reportando los resultados encontrados.**

Per.	Esc.	v.a.	Tiempo CPU (s)		Iteraciones		Tipo de solución encontrada	
			Modelo v.a. continua	Modelo v.a. discreta	Modelo v.a. continua	Modelo v.a. discreta	Modelo v.a. continua	Modelo v.a. discreta
2	9	2	0.13	0.12	1722	1411	Óptimo global	Óptimo global
3	27	3	0.35	0.28	3975	3582	Óptimo global	Óptimo global
4	81	4	6.11	1.51	88319	17024	Óptimo global	Óptimo global
5	243	5	31.64	5.44	1373124	74061	Óptimo global	Óptimo global
6	729	6	6000*	68.3	57187059	446690	Solución factible	Óptimo global

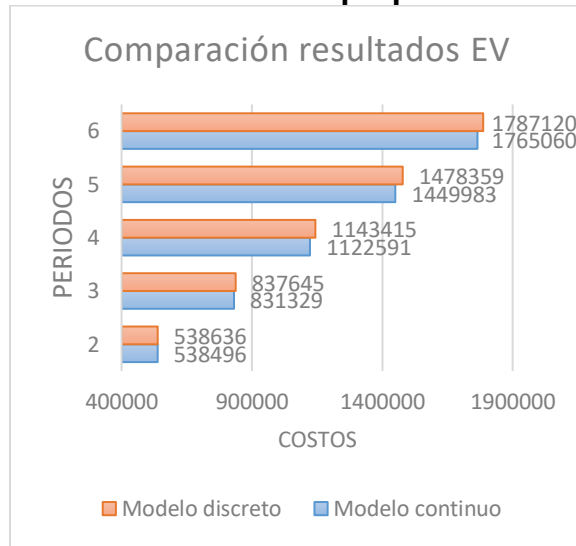
Elaboración propia.

De la Tabla 4 se observa que conforme el problema se hace más grande, el tiempo empleado para encontrar la solución del modelo con distribución continua resulta ser mayor con respecto al modelo con distribución discreta. Además, al llegar a los seis periodos el modelo continuo solo encuentra soluciones factibles, en cambio el modelo discreto encuentra una solución óptima en un tiempo razonable (poco más de un minuto). Igualmente se observa que son necesarias menos iteraciones para encontrar la solución.

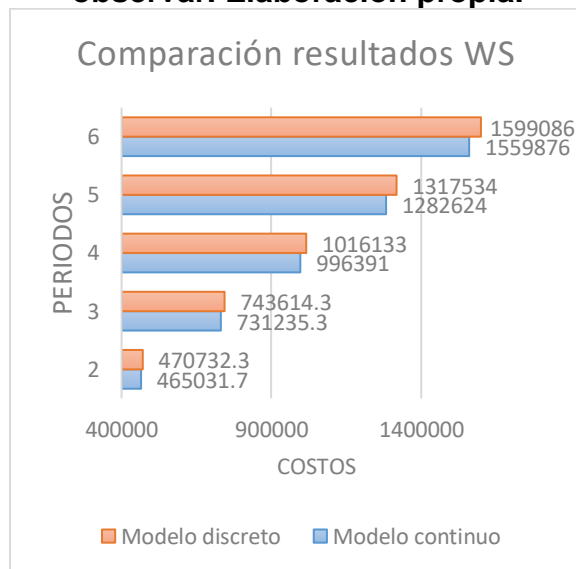
En la Gráfica 1 se puede observar que el modelo continuo reporta un menor valor en el indicador del valor esperado EV, que el modelo discreto. Los valores resultan ser muy similares, por lo cual es un buen indicador de que el modelo discreto ofrece una buena aproximación que el modelo continuo.



**Gráfica 1: Comparación entre los modelos con respecto al valor esperado. Elaboración propia.**



**Gráfica 2: Comparación entre los modelos con respecto al valor de esperar y observar. Elaboración propia.**

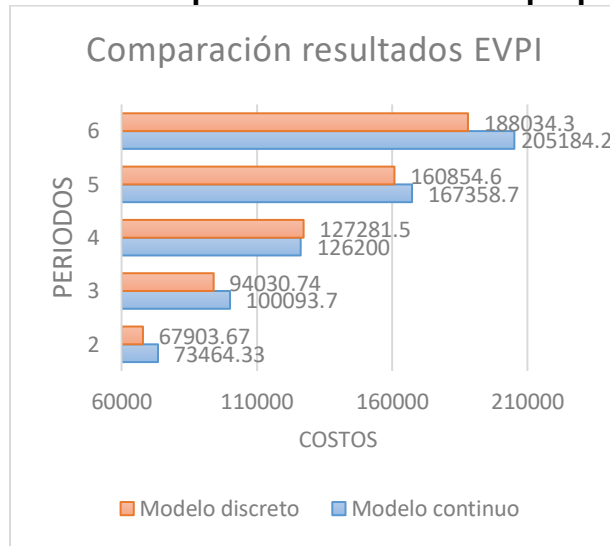


El indicador Wait and see (WS) informa el valor esperado del objetivo si se pudieran esperar y ver los resultados de todas las variables aleatorias antes de tomar una decisión. En la práctica esto es imposible, debido a que no se puede anticipar a la aleatoriedad. Los valores al igual que el valor esperado (Expected Value por siglas en inglés) resultan ser muy similares en ambos modelos como se observa en la Gráfica 2.





**Gráfica 3: Comparación entre los modelos con respecto al valor de información perfecta. Elaboración propia.**



El indicador Perfect Information of Expected Value (EVPI) es el valor absoluto de la diferencia entre EV y WS. Es el valor máximo que uno estaría dispuesto a pagar por obtener información a fin de reducir la aleatoriedad. Al igual que los dos indicadores anteriores, los resultados obtenidos son muy parecidos, como se observa en la Gráfica 3.

**Tabla 5: Comparación entre los modelos continuo y discreto respecto a los indicadores de importancia de la optimización estocástica.**

Periodos	EV		WS		EVPI		GAP del EV (%)
	Modelo continuo	Modelo discreto	Modelo continuo	Modelo discreto	Modelo continuo	Modelo discreto	
2	538496	538636	465031.7	470732.3	73464.33	67903.67	0.0260%
3	831329	837645	731235.3	743614.3	100093.7	94030.74	0.7540%
4	1122591	1143415	996391	1016133	126200	127281.5	1.8212%
5	1449983	1478359	1282624	1317534	167358.7	160854.6	1.9194%
6	1765060	1787120	1559876	1599086	205184.2	188034.3	1.2344%

Elaboración propia.

En la Tabla 5 se presentan los valores de los indicadores de la optimización estocástica EV, WS y EVPI, y se agrega información sobre el porcentaje de diferencia del EV. Cabe hacer notar que el GAP del EV obtenido es muy bajo, por lo cual ambos modelos reportan valores muy similares en el valor objetivo y esto



justifica que es posible obtener soluciones con una buena precisión en un menor tiempo computacional con el modelo de la variable discreta.

### Análisis de sensibilidad

En esta sección se realiza un extenso análisis de sensibilidad del modelo estocástico con el propósito de observar que tan sensible es la función objetivo y las variables de decisión ante la variación de los costos. Se tomó como referencia el modelo con la distribución discreta, y se reporta los resultados del escenario más probable y el valor esperado de la función objetivo. Las variables de decisión que se consideraron indican en qué periodo se encuentran.

**Tabla 6: Análisis de sensibilidad del modelo. Elaboración propia.**

Número caso	Parámetro	Variación (%)	variables de decisión						$\Delta$ -Costo (%)
			$P_1$	$R_1$	$F_6$	$X_1$	$I_1$	$S_6$	
<b>Caso de base</b>	-	-	32	1	0	320	170	33	-
<b>1</b>	$C_p$	50%	32	1	0	320	170	33	38.5816%
<b>2</b>		-50%	33	0	0	330	180	6	-37.847%
<b>3</b>	$C_F$	100%	32	1	0	320	170	33	0.0000%
<b>4</b>		-100%	34	0	3	340	190	33	-0.3277%
<b>5</b>	$C_R$	100%	33	0	0	330	180	6	1.6017%
<b>6</b>		-100%	30	4	0	300	150	6	-38.151%
<b>7</b>	$C_I$	200%	32	0	0	319	169	6	1.3687%
<b>8</b>		-100%	33	0	0	330	180	6	1.2685%
<b>9</b>	$C_S$	100%	33	0	0	330	180	6	1.3656%
<b>10</b>		-100%	33	0	0	329	179	6	1.2767%
<b>11</b>	$C_X$	100%	33	1	0	330	180	6	23.6708%
<b>12</b>		-100%	33	0	0	330	180	3	-21.038%
<b>13</b>	$D_t$	35%	45	0	0	450	178	9	38.4762%
<b>14</b>		-35%	21	0	0	210	183	4	-36.206%

En la Tabla 6, el análisis de sensibilidad se realizó variando los costos un cierto porcentaje. El primer parámetro  $C_p$  referente al costo de los trabajadores de producción, se puede observar que, si se reduce a la mitad este costo, se asignan más trabajadores a la producción y con esta medida se fabrican más unidades y se acumula más inventario y esto reduce considerablemente las piezas faltantes. El segundo parámetro  $C_F$  refiere al costo de despido, se puede observar que, si reduce



este costo, se realizan más despidos en la empresa. Sin embargo, esto tiene el efecto de asignar más trabajadores a la producción y con esto se producen más unidades y se acumulan más piezas en el inventario. El tercer parámetro  $C_R$  es el costo de contratar a un trabajador, se observa en la Tabla 6 que, al aumentar este costo, no se realizan contrataciones en la empresa, sin embargo, se asignan más trabajadores a producción y con esto se fabrican más unidades y se acumulan más piezas en el inventario, reduciendo considerablemente el número de piezas faltantes. El cuarto parámetro analizado  $C_I$  es el costo de inventario, si este costo reduce se asignan más trabajadores a producción, por lo que la empresa fabrica más piezas y aumenta el tamaño del inventario. El quinto parámetro  $C_S$  es el costo de entregar a destiempo los pedidos del cliente, de los resultados obtenidos se observa que al aumentar este costo la empresa fabrica más unidades y esto aumenta el tamaño del inventario a fin de no incurrir en una penalidad con el cliente. El sexto parámetro  $C_x$  refiere al costo de producir un artículo, si este costo aumenta se asignan más trabajadores a producción y se contratan más empleados con el fin de reducir el número de faltantes y aumentar las utilidades de la empresa. El parámetro  $D_t$  es la demanda del periodo, se observa claramente en la Tabla 6, que si la demanda aumenta se asignan más trabajadores a producción y con esto la empresa fabrica más unidades y aumenta considerablemente el nivel de inventario. Cabe mencionar que este análisis de sensibilidad fue realizado con los datos otorgados por la empresa y es evidente que los parámetros analizados tienen un impacto en las variables de decisión y el costo total.

### **Efecto de la restricción del nivel de servicio**

La restricción (17) tiene un rol importante dentro del modelo estocástico, el cual es garantizar que el nivel de faltantes por mes sea menor al 10%, este valor fue es una política de la empresa. En esta sección se realizó un análisis sobre el impacto del nivel de servicio en el modelo, comenzando desde un 85% hasta un 98% de nivel de servicio. Para esta sección se utilizó un modelo con seis periodos utilizando una distribución discreta para modelar la variable aleatoria.



**Tabla 7: Impacto de la restricción del nivel de servicio. Elaboración propia.”**

**” denota que es el caso base.**

Nivel de servicio (%)	$\Delta$ -EV (%)	EV	$\Delta$ -WS (%)	$\Delta$ -EVPI (%)
85	-0.0049549	1778265	-0.00845546	0.02481515
86	-0.004728278	1778670	-0.00767313	0.02031491
87	-0.004426116	1779210	-0.00632611	0.01172818
88	0.000383298	1787805	-0.003275	0.03149372
89	0.00060992	1788210	-0.0012282	0.01623799
90*	0	1787120	0	0
91	0.001138704	1789155	0.00185731	-0.00497622
92	0.001440866	1789695	0.0035389	-0.01640499
93	0.001667487	1790100	0.00469581	-0.0240855
94	0.011249944	1807225	0.00685767	0.04860283
95	0.009569027	1804221	0.00874937	0.01653688
96	0.01269081	1809800	0.00976808	0.0375474
97	0.012917431	1810205	0.01147531	0.02518104
98	0.013231904	1810767	0.01331573	0.01251793

De la Tabla 7 se puede observar que, a menor nivel de servicio, la función objetivo resulta ser menor (Expected Value). El indicador EV va incrementando paulatinamente conforme aumenta el nivel de servicio.

**Tabla 8: Impacto del nivel de servicio respecto de las variables de decisión.**

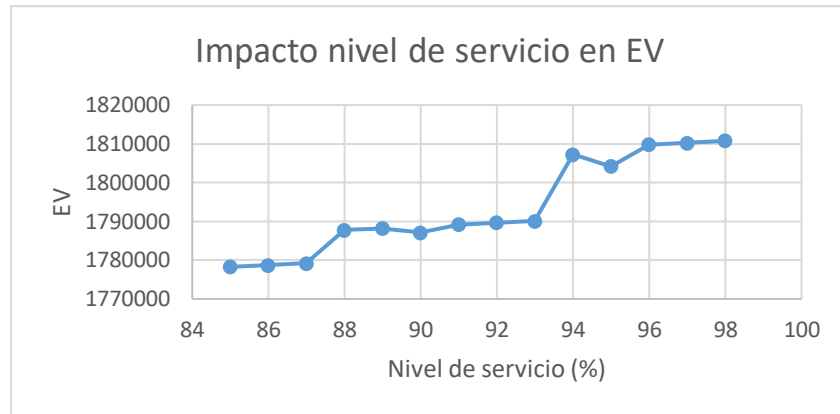
Nivel de servicio (%)	$P_1$	$R_1$	$F_6$	$X_1$	$I_1$	$S_6$
86	32	0	0	320	170	47
90	32	1	0	320	170	33
94	32	1	0	320	170	20
98	33	0	0	330	180	6

Elaboración propia

De la Tabla 8 se puede observar que el nivel de servicio afecta significativamente a las variables de decisión. En particular es evidente que conforme aumenta el nivel de servicio, se asignan más trabajadores a la producción y con esta medida la empresa produce más unidades y esto también aumenta el nivel de inventario. Con estas contramedidas es claro que las faltantes disminuyen. En la Gráfica 4 se observa como el indicador EV aumenta conforme se incrementa el nivel de servicio.



Gráfica 4: Impacto del nivel de servicio en EV. Elaboración propia.



## Conclusiones

De este trabajo de investigación se puede mencionar aspectos importantes tales como que la optimización estocástica multi-etapas es una excelente herramienta cuando se tiene incertidumbre en algunos parámetros de las operaciones de la empresa. Es de vital importancia realizar los estudios pertinentes para determinar qué distribución de probabilidad está asociada a la variable aleatoria tales como la prueba Kolmogorov Smirnov, entre otras. Los planes agregados de producción juegan un papel importante en las Pymes, debido a que permiten administrar sus recursos y operaciones de manera más eficiente. Esto en la planeación juega un papel importante ya que disminuye el riesgo de desaparición de la Pyme. Generalmente se trabajan modelos determinísticos en las empresas, desafortunadamente en el mundo real existe bastante incertidumbre en diversos parámetros. Otro aspecto importante de la investigación es el estudio comparativo realizado entre los dos modelos de optimización estocástica, uno donde la variable aleatoria está asociada a una distribución normal y el otro donde la variable está asociada a una distribución discreta. La solución del modelo estocástico resultó ser muy compleja y tomo demasiado tiempo, puesto que después de cinco periodos solo encontraban soluciones factibles para el modelo con la distribución continua. Sin embargo, con la aproximación propuesta empleando una distribución discreta, además de solucionar más rápido el modelo se encontró una solución óptima global en periodos más grandes. Estos resultados comprueban que es factible realizar una



aproximación de la aleatoriedad con una distribución discreta. En el mundo donde las empresas están en un entorno altamente competitivo, el factor tiempo juega un papel importante en las organizaciones. Por esta razón, un modelo que se pueda resolver en un tiempo razonable es de suma importancia para la toma de decisiones. Además, la investigación se complementó comparando los modelos en cuanto al tiempo de CPU necesario para encontrar una solución y el número de iteraciones necesarias. Finalmente, en el análisis de sensibilidad se discutió sobre el efecto que tiene la variación de los costos del modelo en las variables de decisión. Se observó como el modelo ajusta ciertas variables en respuesta a la variación de los costos. También se analizó el impacto de la restricción del nivel de servicio en las variables de decisión. Como trabajo futuro se puede desarrollar un modelo estocástico para un plan agregado de producción, donde se consideren dos variables aleatorias (la capacidad de producción y la demanda), comparando al igual que en este trabajo, dos modelos, uno donde las variables aleatorias estén asociadas a una distribución continua y otro a una distribución discreta. Dicho modelo sería más realista, puesto que las empresas en un entorno real de producción tienen diversos factores estocásticos en sus operaciones.

### **Referencias bibliográficas**

- Birge JR and Louveaux F (1997). *Introduction to Stochastic Programming*. Springer: New York.
- Chen, Y. K., & Liao, H. C. (2003). An investigation on selection of simplified aggregate production planning strategies using MADM approaches. *International Journal of Production Research*, 41(14), 3359–3374.
- Huang K (2005). *Multi-stage stochastic programming models for production planning*. Dissertation, School of Industrial and Systems Engineering, Georgia Institute of Technology.
- Hu, Z., Hu, G. (2018). A multi-stage stochastic programming for lot-sizing and scheduling under demand uncertainty. *Computers & Industrial Engineering*, (119), 157-166.



- Jamalnia et al. (2017). Novel decision model based on mixed chase and level strategy for aggregate production planning under uncertainty: Case study in beverage industry. *Computers & Industrial Engineering*: 54-68.
- Kanyalkar, A. P., & Adil, G. K. (2010). A robust optimisation model for aggregate and detailed planning of a multi-site procurement-production-distribution system. *International Journal of Production Research*, 48(3), 635–656.
- Körpeoglu, E., Yaman, H., y Aktürk, M. (2011). A multi-stage stochastic programming approach in master production scheduling. European Journal of Operational Research*, (213), 166-179.
- Leung, S. C. H., & Wu, Y. (2004). A robust optimization model for stochastic aggregate production planning. *Production Planning & Control*, 15(5), 502–514.
- Lieckens, K., & Vandaele, N. (2014). A decision support system for the stochastic aggregate planning problem. <<http://ssrn.com/abstract=2419376/16/03/20> >.
- Makui, A., Heydari, M., Aazami, A., & Dehghani, E. (2016). Accelerating Benders decomposition approach for robust aggregate production planning of products with a very limited expiration date. *Computers & Industrial Engineering*, 100(2016), 34–51.
- Mirzapour Al-e-hashem, S. M. J., Malekly, H., & Aryanezhad, M. B. (2011). A multiobjective robust optimization model for multi-product multi-site aggregate production planning in a supply chain under uncertainty. *International Journal of Production Economics*, 134(1), 28–42.
- Mirzapour Al-e-hashem, S. M. J., Aryanezhad, M. B., & Sadjadi, S. J. (2012). An efficient algorithm to solve a multi-objective robust aggregate production planning in an uncertain environment. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 58(5), 765–782.
- Mirzapour Al-e-hashem, S. M. J., Baboli, A., & Sazvar, Z. (2013). A stochastic aggregate production planning model in a green supply chain: Considering flexible lead times, nonlinear purchase and shortage cost functions. *European Journal of Operational Research*, 230(1), 26–41.



- Nasiri, G. R., Davoudpour, H., & Karimi, B. (2010a). The impact of integrated analysis on supply chain management: A coordinated approach for inventory control policy. *Supply Chain Management: An International Journal*, 15(4), 277–289.
- Nasiri, G. R., Davoudpour, H., & Movahedi, Y. (2010b). A genetic algorithm approach for the multi-commodity, multi-period distribution planning in a supply chain network design. *Lecture Notes on Computer Sciences 6466, SEMCCO*, 494–505.
- Nasiri et al (2014)*. An integrated supply chain production–distribution planning with stochastic demands. *Computers & Industrial Engineering*, (77), 35-45.
- Ning, Y., Liu, J., & Yan, L. (2013). Uncertain aggregate production planning. *Soft Computing*, 17(4), 617–624.
- Nowak, M. (2013). An interactive procedure for aggregate production planning. *Croatian Operational Research Review*, 4(1), 247–257.
- Rakes, T. R., Franz, L. S., & Wynne, A. J. (1984). Aggregate production planning using chance constrained goal programming. *International Journal of Production Research*, 22(4), 673–684.
- Wagner, H. M., & Whitin, T. M. (1958). Dynamic version of the economic lot size model. *Management Science*, 5(1), 89–96.
- Zanjani et al. (2013)*. A scenario decomposition approach for stochastic production planning in sawmills. *Journal of the Operational Research Society* (64), 48–59.
- Zhao et al (2019)*. A multi-objective production planning problem with the consideration of time and cost in clinical trials. *Expert Systems with Applications*, (124), 25-38.