

Petri Nets Representing the Evolution of Elementary Cellular Automata

I. Barragán, J. C. S. Tuoh and J. Medina

Abstract— A Petri net (PN) is a directed graph which consists of two kinds of nodes called places and transitions. Besides their graphical representation, PN possess a mathematical formalism based on the incidence matrix and the state equation. In this paper we show that PN can be used as a general tool to represent the evolution of any elementary cellular automaton (ECA). This is performed by matrix operations obtained from the state equation of the PN which represent the cellular automaton and the use of a logical operator. It is presented an algorithm to construct a PN for any ECA and we give some comparative examples between the evolution of markings of the PN and the evolution of the respective ECA.

Keywords— Petri nets, elementary cellular automata, matrix operations.

I. INTRODUCCIÓN

LAS REDES de Petri (RdP) son una herramienta de modelado y análisis cuya dinámica es discreta y determinística en el caso básico [1][2]. Una RdP es una gráfica que consiste de dos tipos de nodos llamados lugares y transiciones, los cuales se representan por círculos y barras, respectivamente. Usualmente los lugares denotan estados a través de una asignación de marcas y las transiciones indican la ocurrencia de alguna acción o evento. Junto con la representación gráfica, las RdP poseen un formalismo matemático que permite realizar análisis profundos de la dinámica del sistema que se encuentra bajo estudio.

Debido a que las RdP pueden representar características como paralelismo, sincronización, entre otras propiedades, estas redes han sido empleadas en el diseño y modelación de diversos sistemas [3]; aunque principalmente han tenido una gran aplicación en los sistemas de manufactura [4][5]. No obstante, existen clases especiales de RdP, como RdP *etiquetadas* [6] o RdP *difusas* [7][8], con las que es posible modelar sistemas abstractos.

Las RdP y los autómatas celulares (AC) han sido empleados de manera conjunta en algunos trabajos como en [9][10], para modelar sistemas ecológicos. De manera similar, los AC se han aplicado en la modelación de sistemas de manufactura a partir de una red que representa a estos sistemas [11][12]. Igualmente, las RdP se han usado para modelar el AC cuántico de Margolus, [13]. Otros trabajos relacionados son [14][15] y [16].

Los autómatas celulares elementales (ACE) son el tipo básico de AC de una dimensión [17]. Un ACE consiste de sólo dos estados (usualmente 0 y 1) y un vecino a ambos lados de

cada célula (izquierda y derecha), dando origen a vecindarios de tres células [18]. Habrá un total de ocho vecindarios posibles, sobre los cuales se aplica la regla local de evolución del ACE. Esta regla define el estado al que evolucionará la célula central de cada vecindario y se aplica simultáneamente a todas las células del ACE, logrando un nuevo estado global y produciendo la evolución del ACE, la cual se desarrolla en pasos discretos del tiempo.

La mayoría de los estudios sobre ACE se basan en aspectos teóricos [19]-[21]. Algunos otros estudios se enfocan en encontrar características particulares de algunos ACE puesto que son considerados interesantes debido a su dinámica global o a sus implicaciones prácticas [22]-[24]. Otros trabajos se han centrado en llevar a cabo un análisis general de todos los ACE con la finalidad de clasificarlos de acuerdo a su dinámica global [25], o para estudiar su estructura [26].

A pesar de la simplicidad en la dinámica local de los ACE, éstos pueden mostrar un comportamiento complejo a lo largo de su evolución. Uno de los aspectos más interesantes en los ACE es encontrar una representación algebraica o matricial general para las reglas de evolución. Algunos métodos han sido propuestos para realizar o estudiar la evolución de los ACE, como diagramas [27]-[29], álgebra matricial [30]-[32], ecuaciones diferenciales [33], métodos matriciales [34] y algoritmos genéticos [35][36]. Sin embargo, los diagramas sólo permiten determinar características de la evolución del ACE, pero no realizan dicha evolución. El álgebra matricial sólo se ha aplicado en AC de dos dimensiones mientras que los métodos matriciales en AC reversibles. Las ecuaciones diferenciales producen una representación extensa de las reglas de evolución, lo que dificulta su manejo. Igualmente, los algoritmos genéticos se han empleado para llevar a cabo la evolución de los AC, pero con el propósito de encontrar un comportamiento deseado en un número de pasos de tiempo en la evolución del AC.

En [37] se abordó el tema de emplear los AC para el análisis de sistemas de eventos discretos como son los sistemas de manufactura flexible. Tomando en cuenta que las RdP son una herramienta adecuada para modelar este tipo de sistemas, en dicho trabajo se estableció la relación entre las RdP y los AC en el sentido de obtener un AC a partir de la adaptación estructural de una RdP que modela un sistema de manufactura. Los resultados obtenidos indican que los AC pueden ser útiles para realizar un estudio global de la dinámica de los sistemas de manufactura.

I. Barragán, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, Pachuca, Hidalgo, México, irvingb@uaeh.edu.mx

J. C. S. Tuoh, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, Pachuca, Hidalgo, México, juanseck@gmail.com

J. Medina, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, Pachuca, Hidalgo, México, jmedina@uaeh.edu.mx

Este artículo tiene como propósito mostrar la aplicación de las RdP como herramienta general para realizar la evolución de cualquier ACE mediante operaciones matriciales obtenidas de la ecuación de estado de las RdP y del uso de un operador lógico, considerando las características discretas y determinísticas en la dinámica de los ACE y las RdP. Lo anterior se logra a través de comparar experimentalmente, mediante métodos gráficos de cada herramienta, la equivalencia entre la dinámica de las RdP obtenidas y la dinámica del ACE correspondiente.

De esta manera, para un número finito de células en el ACE, la RdP que lo representa consistirá de un igual número de subredes. Los lugares de cada subred indican el estado y la condición de la célula en el vecindario que ésta forma (izquierda, centro o derecha), mientras que las transiciones de la misma subred representan los posibles vecindarios de los ACE.

La tarea consiste en determinar la transición que será disparada en cada marcado alcanzable de la RdP mediante el uso de un operador lógico y de operaciones matriciales aplicadas a la matriz de incidencia de la RdP y a su marcado actual. Luego se emplea la ecuación de estado para obtener el marcado subsecuente, y el proceso se repite para el nuevo marcado. La dinámica de la RdP estará condicionada al uso de marcados iniciales que sólo representen las posibles configuraciones del ACE; asimismo, sólo se permitirá el disparo de una transición en cada marcado alcanzable. De esta forma, únicamente se disparará una transición por subred lo cual indicará el cambio de estado para la célula representada por tal subred. Por lo tanto, la regla de evolución del ACE se simulará en serie a partir de la primera subred hasta la última. Así, después del último disparo, que ocurrirá en la última subred, se obtendrá el marcado que representa a la configuración subsecuente en la evolución del ACE.

El artículo se organiza como sigue: la Sección II proporciona los conceptos básicos tanto de las RdP como de los AC. En la Sección III se explica el proceso para obtener la RdP que representa a un ACE. La Sección IV describe el uso de las operaciones matriciales para realizar la evolución de los ACE. En la Sección V se presentan algunos ejemplos representativos de ACE, y para cada uno se hace una comparación entre la evolución del ACE y la evolución de marcados de la RdP correspondiente. Finalmente, en la Sección VI se dan las conclusiones de este trabajo.

II. CONCEPTOS BÁSICOS DE REDES DE PETRI Y AUTÓMATAS CELULARES ELEMENTALES

A. Redes de Petri

Una RdP consiste de dos conjuntos de nodos, $P = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ y $T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ llamados lugares y transiciones, respectivamente; tal que $P \cup T \neq \emptyset$ y $P \cap T = \emptyset$. Por otro lado, $F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$ es el conjunto de arcos, $W: F \rightarrow \mathbb{N}$ es la función de pesos de los arcos y $M_0: P \rightarrow \mathbb{N}$ define el marcado inicial de la RdP, donde $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. De esta forma, $\mathbf{N} = \{P, T, F, W\}$ define la estructura de la RdP mientras que (\mathbf{N}, M_0) denota a una RdP con un marcado inicial

dado. Cualquier marcado de una RdP puede ser representado por un vector \mathbf{m} de tamaño $m \times 1$, tal que $\mathbf{m}(p) = k$ es el número de marcas asignadas al lugar $p \in P$, donde $k \in \mathbb{N}$.

Gráficamente, el marcado de una RdP se indica mediante puntos negros al interior de los círculos que representan a los lugares; mientras que el peso de los arcos, es decir, la cantidad de marcas que pueden transferir, se indica mediante una etiqueta, excepto cuando el peso es igual a 1.

La dinámica de las RdP consiste en el cambio de marcado, el cual sucede mediante la aplicación de la *regla de habilitación y disparo*. En este sentido, sea ${}^*t = \{p \mid (p, t) \in F\}$ el conjunto de lugares de entrada de la transición t . Entonces, dado un marcado M_d , si $M_d(p) \geq W(p, t)$, $\forall p \in {}^*t$ tal que $t \in T$, entonces la transición t está *habilitada* en el marcado M_d y, en consecuencia, t puede ser *disparada* cambiando el marcado M_d en M_{d+1} . Por lo tanto, $M_{d+1}(p) = M_d(p) - W(p, t) + W(t, p)$.

Un marcado M_d es alcanzable desde el marcado M_0 si existe una secuencia de disparos $\sigma = t_1 t_2 \dots t_d$ aplicable desde M_0 hasta M_d . Esto es, $M_0 \xrightarrow{t_1} M_1 \xrightarrow{t_2} \dots \xrightarrow{t_d} M_d$, o bien, de acuerdo con T. Murata [3], $M_0[\sigma]M_d$. De este modo, $M(\mathbf{N}, M_0) = \{M \mid \exists \sigma \in L(\mathbf{N}, M_0) \wedge M_0[\sigma]M\}$ es el conjunto de marcados alcanzables desde M_0 , donde $L(\mathbf{N}, M_0) = \{\sigma \mid M_0[\sigma]M\}$ es el conjunto de secuencias de disparo aplicables desde M_0 . Además, un marcado M es *cubrible* si existe un marcado $M' \in M$ tal que $M(p) \leq M'(p)$, $\forall p \in P$.

Existen algunos métodos de análisis para estudiar la dinámica de las RdP. Entre estos métodos están la ecuación de estado y el árbol de cobertura. La ecuación de estado (1), se basa en operaciones matriciales aplicadas entre el marcado M_{d-1} de la RdP, su matriz de incidencia \mathbf{I} y el vector de control de disparos \mathbf{x}_d .

$$\mathbf{m}_d = \mathbf{m}_{d-1} + \mathbf{I} \mathbf{x}_d \quad (1)$$

La matriz de incidencia esta dada por la ecuación (2), y es una matriz de tamaño $m \times n$ donde $\mathbf{I}^+ = [e_{ij}^+]$ y $\mathbf{I}^- = [e_{ij}^-]$; asimismo, $e_{ij}^+ = W(t_j, p_i)$ y $e_{ij}^- = W(p_i, t_j)$.

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}^+ - \mathbf{I}^- \quad (2)$$

El vector de control \mathbf{x}_d es un vector $n \times 1$, tal que todas sus entradas son cero excepto la j -ésima entrada, la cual es igual a 1 e indica la transición disparada en el d -ésimo disparo.

El árbol de cobertura, o de alcanzabilidad si $M(\mathbf{N}, M_0)$ es finito, enumera todos los posibles marcados cubribles o alcanzables desde el marcado M_0 , el cual es la raíz del árbol [38]. Del árbol de cobertura se obtiene la gráfica de cobertura $CG = (V, E)$ donde V es el conjunto de nodos que representan a los diferentes marcados del árbol de cobertura y $E = V \times V$ es el conjunto de arcos o ligas de forma que cada una es etiquetada con la transición t si $M_i[t]M_j$, tal que $M_i, M_j \in V$.

B. Autómatas Celulares Elementales

Un AC consiste en un arreglo de células donde cada una

puede tomar un estado de un conjunto finito de estados S , tal que $|S| = k$. Además, cada célula interactúa con las células más cercanas formando un vecindario. Una vez que se ha asignado un estado a cada célula se obtiene un estado global o configuración, denotada por C . Así, en un AC de una dimensión $C = \dots c_{i-2}c_{i-1}c_i c_{i+1}c_{i+2} \dots$, donde $c_i = a$ para $a \in S$ y $i \in \mathbb{Z}$. Cada célula en C forma un vecindario \mathcal{V} en un radio de r células, tal que $\mathcal{V}_i = c_{i-r} \dots c_{i-2}c_{i-1}c_i c_{i+1}c_{i+2} \dots c_{i+r}$ es el vecindario de la célula c_i .

Un ACE es un AC de una dimensión donde $k = 2$, $r = 1$ y $S = \{0,1\}$. La evolución de un ACE se logra al aplicar de manera simultánea la regla local de evolución $\varphi: S^{2r+1} \rightarrow S$ sobre las células de C , donde $2r + 1$ es el tamaño de los vecindarios. De este modo, si C^t es el estado global del ACE en el instante t y $\mathcal{V}_i = c_{i-r}^t c_i^t c_{i+r}^t$ es el vecindario de la célula c_i^t , entonces $c_i^{t+1} = \varphi(\mathcal{V}_i)$. Al aplicar φ sobre cada célula de C^t se obtendrá C^{t+1} , y así sucesivamente. Por lo tanto, sea C el conjunto de configuraciones del autómata, entonces $\Phi: C \rightarrow C$ es la regla global de evolución.

Puesto que para un ACE habrá un total de ocho vecindarios posibles (k^{2r+1}), entonces habrá un total de 256 reglas globales ($k^{k^{2r+1}}$), tal que cada una define a un ACE diferente.

Aunque en esencia el número de células en las configuraciones de los ACE es infinito, por practicidad cada configuración se limita a un número q de células. Sin embargo, para mantener la homogeneidad en la formación de vecindarios por cada célula, se aplican condiciones de frontera periódica a la primera y última célula de cada configuración, es decir, la primera y última célula se unen formando un anillo.

Una forma de analizar la evolución de un ACE es graficando la trayectoria de la evolución de sus configuraciones, tal que $C \in S^q$. Eventualmente la trayectoria de la evolución de una configuración formará un ciclo o bien, dicha trayectoria conducirá a un ciclo. El proceso de graficar las trayectorias de la evolución de todas las configuraciones posibles del ACE da como resultado el diagrama de ciclos, [39][40]. En este diagrama cada configuración se considera como un número binario dado el conjunto de estados $S = \{0,1\}$, de modo que el equivalente decimal del número binario se emplea para etiquetar los nodos del diagrama.

III. CONSTRUCCIÓN DE LA RDP PARA UN ACE

En esta sección se describe la construcción de la Rdp que simulará la evolución de un ACE y se introduce un algoritmo que generaliza el proceso para cualquier ACE. De esta manera, se define a N_G como la Rdp que representa al ACE definido por la regla global G . Asimismo, C_i es la subred que representa a la célula c_i . Además, cada configuración C formará un anillo de q células, tal que $C = c_1 \dots c_i \dots c_q$.

El procedimiento para construir la red N_G consiste en la creación de las subredes C_i y en conectar cada una con otras subredes de acuerdo al vecindario de la célula c_i . En este sentido, el peso de todos los arcos de la red N_G será igual a uno.

Debido a que cada célula del ACE puede formar uno de los ocho vecindarios posibles, en cada subred las transiciones

representarán a dichos vecindarios. Por lo tanto, habrá ocho transiciones en cada subred. Cada transición requerirá de al menos tres lugares de entrada, los cuales representarán no sólo el estado de las células que forman el vecindario indicado por la transición, sino también la posición de cada célula dentro del vecindario. Por consiguiente, en cada subred habrá tres lugares ($2r + 1$) por cada estado en S y cada uno de estos lugares llevará una etiqueta con el formato sP , donde $s \in S$ y P indica la posición de la célula en el vecindario, que puede ser central (C), izquierda (L) o derecha (R).

La dinámica del ACE se realizará a través de una simulación en serie de la regla local de evolución φ . Esto es, la aplicación de φ se representará por medio del disparo de una transición por subred, comenzando en la subred C_1 y terminando en la subred C_q , de modo que con el último disparo se obtendrá un marcado en N_G que representará a la nueva configuración del ACE. En consecuencia, se necesitarán q disparos para lograr una nueva configuración en el ACE.

La simulación de φ se realiza en serie para evitar conflictos en la Rdp. Esto es, para un marcado que represente cualquier configuración inicial posible del ACE, los tres lugares de entrada de cada transición permitirán habilitar solo una transición en cada subred, por lo que habrá un total de q transiciones habilitadas; ocasionando un conflicto en la Rdp al tener que decidir qué transición disparar, lo que dificulta la simulación de la evolución del ACE.

Además, la simulación en serie de φ permite mantener un control en la representación de la evolución del ACE mediante una secuencia de disparos que comienza en la primer subred y que termina en la última subred para obtener un nuevo estado global en el ACE.

Para lograr la seriación en la simulación de φ , en cada subred se agregará un lugar que será de entrada de las ocho transiciones. Dicho lugar se denominará *lugar de control* y permitirá el disparo de una sola transición en cada marcado de la red N_G . Asimismo, puesto que los disparos iniciarán en la subred C_1 y terminarán en la subred C_q , el lugar de control de cada subred será un lugar de salida de las ocho transiciones de la subred previa. Por consiguiente, una vez que una transición se dispara en la subred C_i , tal transición transferirá una marca al lugar de control de la subred C_{i+1} .

Sin embargo, la seriación en la aplicación de φ obliga a “guardar” temporalmente el estado previo de las células que ya han cambiado de estado, debido a que la célula subsecuente forma su vecindario con la célula previa. De esta manera sea $c_i^t = a$ el estado de la célula c_i en el instante t y $c_i^{t+1} = b$ el estado de la célula c_i en el instante $t + 1$. Entonces, para las subredes $C_1 C_2 \dots C_{q-1}$, el estado a de las células que representan se guardará en el lugar con la etiqueta aL , puesto que cada una de estas subredes es el vecino izquierdo de su respectiva subred subsecuente; tal como sucede con las células del ACE. En cada subred, el estado b de cada célula se mantendrá en los lugares con la etiqueta bC .

Por otro lado, debido a que las células $c_2 c_3 \dots c_q$ son el vecino derecho de su respectiva célula previa, para las subredes correspondientes el estado b de dichas células se guardará en el

lugar con la etiqueta bR . Además, puesto que se aplican condiciones de frontera periódica a las células c_1 y c_q , de tal forma que c_1 es el vecino derecho de c_q y ésta última es el vecino izquierdo de c_1 ; el estado a de la célula c_1 también se guardará en el lugar con la etiqueta aR de la respectiva subred, mientras que el estado b de la célula c_q se guardará también en el lugar etiquetado como bL en su correspondiente subred.

Todas las transiciones tendrán cuatro lugares de entrada y cuatro lugares de salida. Los lugares de entrada serán los etiquetados como sC , sR , sL y *lugar de control*, donde s es el estado de las células en cualquier configuración C del ACE. El lugar sC y el *lugar de control* se encuentran en la subred c_i , mientras que el lugar sR y el lugar sL se encuentran en las subredes c_{i+1} y c_{i-1} , respectivamente. Cada transición de la subred c_i tendrá como lugar de salida el lugar de control de la subred c_{i+1} . Los tres lugares de salida restantes dependerán de la posición de la célula en la configuración y de la definición de φ . Estos tres lugares se encontrarán en la subred c_i . De esta manera, para la subred c_1 los tres lugares de salida faltantes serán los etiquetados como bC , aR y aL ; para la subred c_q serán los lugares con las etiquetas bC , bR y bL y para el resto de las subredes serán los lugares etiquetados como bC , bR y aL .

El marcado inicial M_0 de la red N_G dependerá de la configuración inicial C^0 del ACE. Una vez definidos el estado inicial de las células del ACE, el marcado M_0 consistirá en la colocación de marcas de la siguiente manera: una marca en los lugares etiquetados como sC de todas las subredes, tal que $c_i^0 = s$; una marca en los lugares sR de las subredes $c_2 \cdots c_q$; una marca en los lugares sR y sL de la subred c_q y una marca en el lugar de control de la subred c_1 , en la cual ocurrirá el primer disparo.

A continuación se define el algoritmo para la construcción de la red N_G . Los pasos de este algoritmo fueron implementados en la herramienta Netlab para Windows XP, [41]. Netlab es una herramienta para el modelado, análisis y simulación de redes de Petri desarrollada por el Instituto de Control Automático (IRT, por sus siglas en alemán).

A. Algoritmo para la elaboración de la red N_G

Una vez que se ha definido el número de células, la regla de evolución φ y la configuración inicial del ACE, el siguiente algoritmo puede emplearse para construir la red N_G a partir de la creación de sus subredes. De este modo, sea $c_i^0 = s$, $c_i^t = a$ y $c_i^{t+1} = \varphi(uav) = b$, donde $uav \in S^{2r+1}$. Entonces, el algoritmo es como sigue:

- PASO 1: Para cada célula c_i del ACE, cree una subred c_i con tres lugares por estado (0 y 1) y un lugar de control, así como con ocho transiciones. Etiquete los lugares como $0C$, $0R$, $0L$, $1C$, $1R$, $1L$ y *lugar de control*, respectivamente. Etiquete las transiciones de acuerdo al vecindario que representan (000, 001, ..., 111).
- PASO 2: En cada subred c_i cree un arco desde los lugares etiquetados como aC , vR y uL hacia la transición etiquetada como uav , tal que el lugar aC se encuentra en la subred c_i , el lugar vR en la subred c_{i+1} y el lugar uL en la subred c_{i-1} .

Además, cree un arco desde el lugar de control de la subred c_i hacia cada transición de la misma subred.

- PASO 3: En la subred c_1 , y de acuerdo al vecindario que cada transición representa, cree un arco desde la transición uav hacia los lugares bC , aR y aL de la misma subred. Para la subred c_q cree un arco desde la transición uav hacia los lugares bC , bR y bL de c_q , y para las subredes $c_2 \cdots c_{q-1}$ cree un arco desde la transición uav hacia los lugares bC , bR y aL .
- PASO 4: Coloque una marca en el lugar sC y en el lugar de control de la subred c_1 ; igualmente, coloque una marca en los lugares sC , sR y sL de la subred c_q . Finalmente, coloque una marca en los lugares sC y sR de las subredes $c_2 \cdots c_{q-1}$.

Cada red N_G obtenida con este algoritmo fue simulada en Netlab para verificar la correcta evolución de marcados de cada red así como con los métodos de análisis de las redes de Petri incorporadas en esta herramienta.

B. Aspectos estructurales de la red N_G

Debido a que la red N_G se compone de q subredes y a que estas subredes se conectan entre sí de una manera particular, puede notarse que la red N_G tiene una estructura regular, la cual se hace evidente en la matriz de incidencia I cuando es dividida en submatrices.

Puesto que cada subred consta de siete lugares, las primeras siete filas de la matriz I corresponden a la subred c_1 ; las siguientes siete filas pertenecen a la subred c_2 , y así sucesivamente. De manera similar, cada subred se compone de ocho transiciones, por lo que las primeras ocho columnas de I pertenecen a la subred c_1 , las siguientes ocho columnas a la subred c_2 , y así sucesivamente. Por lo tanto, la matriz de incidencia I de la red N_G puede ser dividida en q^2 submatrices.

Se deduce que tanto las primeras siete filas como las primeras ocho columnas de I forman una submatriz que describe la estructura de la subred c_1 , de tal forma que dichas filas y columnas corresponden a los lugares y transiciones de la subred c_1 . De igual manera, las siguientes siete filas y ocho columnas forman la submatriz de la subred c_2 . Siguiendo de esta forma, habrá una submatriz para cada subred. En este sentido, las subredes de la red N_G de cualquier ACE tendrán una estructura diferente entre sí. No obstante, las subredes $c_2 \cdots c_{q-1}$ tendrán la misma estructura, y por lo tanto la misma submatriz.

Así, sea A la submatriz de la subred c_1 ; C la submatriz de la subred c_q y B la submatriz de las subredes $c_2 \cdots c_{q-1}$. Además, sean R , L y Z tres submatrices diferentes, donde la submatriz R describe la forma en que se conectan las transiciones y los lugares de las subredes c_i y c_{i+1} ; la submatriz L indica la manera en que se conectan los lugares y las transiciones de las subredes c_i y c_{i-1} . La submatriz Z es una submatriz cuyas entradas son ceros, indicando que las transiciones o lugares corresponden a una subred que representa a una célula que se encuentra fuera del radio de vecindad de la célula c_i . La forma general de la matriz de incidencia I de la red N_G se muestra en la ecuación (3).

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{R} & \mathbf{Z} & \mathbf{Z} & \mathbf{Z} & \mathbf{L} \\ \mathbf{L} & \mathbf{B} & \mathbf{R} & \mathbf{Z} & \mathbf{Z} & \mathbf{Z} \\ \mathbf{Z} & \mathbf{L} & \mathbf{B} & \mathbf{R} & \mathbf{Z} & \mathbf{Z} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{Z} & \mathbf{Z} & \mathbf{Z} & \mathbf{L} & \mathbf{B} & \mathbf{R} \\ \mathbf{R} & \mathbf{Z} & \mathbf{Z} & \mathbf{Z} & \mathbf{L} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \quad (3)$$

C. Aspectos dinámicos de la red N_G

La dinámica de la red N_G se logra al seleccionar un marcado M_0 de tal forma que represente tanto el estado de cada célula en C^0 así como la posición de las mismas en los vecindarios formados a lo largo de C^0 . Además, la primera subred deberá tener marcado su lugar de control. Por lo tanto, la primera transición en ser disparada se encontrará en la subred c_1 ; la segunda transición en dispararse estará en la subred c_2 , y así sucesivamente. En consecuencia, se necesitarán q disparos para alcanzar el marcado M_q a partir del marcado M_0 , y correspondientemente, para obtener la configuración C^1 desde la configuración C^0 en la evolución del ACE. Este proceso se repite de tal forma que cada $t \times q$ marcados se obtiene una nueva configuración en el ACE, de tal modo que el marcado $M_{t \times q}$ representa a la configuración C^t .

La dinámica de la red N_G explicada en el párrafo anterior se logra al escoger un marcado inicial permisible. Un marcado inicial M_0 es permisible si representa a cualquier configuración $C \in C$, de tal forma que los lugares de la red N_G son marcados de acuerdo al Paso 4 del algoritmo descrito antes. Sólo se considerarán como marcados iniciales aquellos que sean permisibles.

IV. EVOLUCIÓN DEL ACE POR MEDIO DE OPERACIONES MATRICIALES

De acuerdo a la ecuación de estado (1) de las RdP, es necesario conocer la transición que será disparada en el marcado \mathbf{m}_{d-1} para obtener el marcado \mathbf{m}_d . Entonces, sea $\mathbf{u} = \mathbf{k} \mathbf{I}^-$ un vector $1 \times n$ que indica la cantidad de marcas necesarias para habilitar cada una de las transiciones de la red N_G , donde \mathbf{k} es un vector $1 \times m$ cuyas entradas son todas igual a 1. Asimismo, sea $\mathbf{v}_d = \mathbf{m}_{d-1}^T \mathbf{I}^-$ un vector $1 \times n$ que indica cuántas marcas removerá cada transición en el marcado \mathbf{m}_{d-1} . Finalmente, y de acuerdo con E. Sivaraman [42], sea sg_\oplus un operador lógico definido como sigue:

$$\text{sg}_\oplus(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (4)$$

Por lo tanto, la transición que será disparada en el marcado \mathbf{m}_{d-1} se determinará mediante la ecuación (5), de tal forma que la evolución del ACE podrá llevarse a cabo al aplicar la ecuación (1) de manera recursiva, tal que cada $t \times q$ marcados se obtiene una configuración en el ACE para el instante t de su evolución.

$$\mathbf{x}_d = \text{sg}_\oplus(\mathbf{v}_d^T - \mathbf{u}^T) \quad (5)$$

V. EJEMPLOS

En esta sección se presentan algunos ejemplos mediante los cuales se compara la evolución de los ACE y la evolución de marcados de sus respectivas RdP. Dicha comparación se realiza mediante los diagramas de ciclos de los ACE y el árbol de alcanzabilidad de las RdP. El árbol de alcanzabilidad se obtiene una vez que se han calculado los marcados alcanzados en la RdP de cada uno de los ejemplos. Por otra parte, sólo se consideran configuraciones con pocas células para hacer claros los ejemplos.

A. Regla 110

Este ejemplo aborda uno de los ACE más interesantes debido a que produce una evolución compleja y a sus implicaciones computacionales [43]. Este ACE está definido por la regla global 110, la cual se determina como se muestra en la Tabla I.

TABLA I. DEFINICIÓN DE LA REGLA LOCAL DE EVOLUCIÓN (φ) QUE PRODUCE LA REGLA GLOBAL 110.

\mathcal{V}	111	110	101	100	011	010	001	000
$\varphi(\mathcal{V})$	0	1	1	0	1	1	1	0

La primera fila de la Tabla I muestra los ocho posibles vecindarios sobre los cuales se aplica la regla de evolución φ y la segunda fila muestra el resultado de la aplicación de φ sobre cada vecindario, tal que $01101110_2 = 110$.

Para este ejemplo la configuración inicial es $C^0 = 00111$. La Fig. 1 muestra las subredes c_1 , c_3 y c_5 de la red N_{110} , que corresponden a las células c_1 , c_3 y c_5 del ACE. Tales subredes muestran las principales estructuras de las subredes que componen a la red N_{110} . El marcado inicial de la red N_{110} correspondiente a la configuración C^0 , es $\mathbf{m}_0^T = [1000001101000000101000010100001110]$.

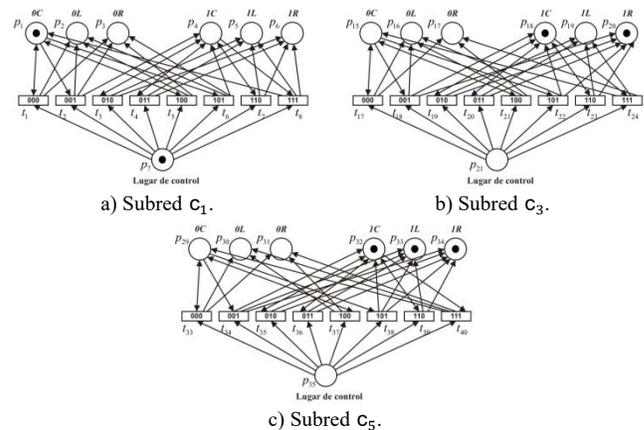
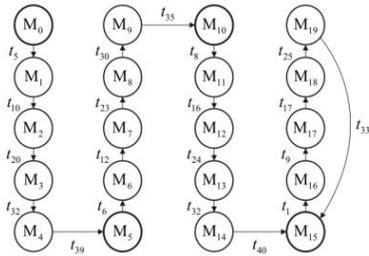


Figura 1. Tipos de subredes de la red N_{110} que representa al ACE 110.

Las submatrices \mathbf{A} , \mathbf{B} y \mathbf{C} que corresponden a las subredes c_1 , c_3 y c_5 , respectivamente, se definen como sigue:

Figura 3. Diagrama de ciclos del ACE 110 para la configuración $C^0 = 00111$.Figura 4. Gráfica de alcanzabilidad de la red N_{110} para el marcado M_0 .

De esta forma, la evolución de marcados de la red N_{110} representa la evolución del ACE 110, tal que los marcados de la red N_{110} son obtenidos a través de la ecuación de estado de dicha red así como de la ecuación (5).

TABLA IV. MARCADOS DE LA RED N_{110} OBTENIDOS A PARTIR DEL MARCADO m_0 .

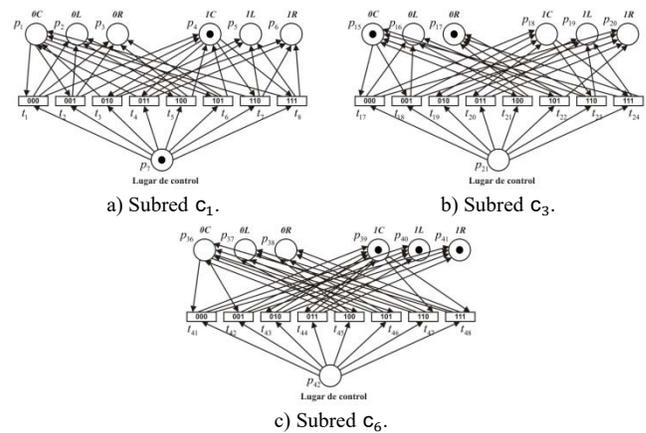
$m_0^T = [10000011010000000101000010100001110]$
$m_1^T = [11100001000001000101000010100001010]$
$m_2^T = [10100000101010000100100010100001010]$
$m_3^T = [10100000001010000111000010010001010]$
$m_4^T = [10100000001010000101010101000001001]$
$m_5^T = [10000010001010000101010100000001110]$
$m_6^T = [01110000001001000101010100000001010]$
$m_7^T = [00110000001110000100110100000001010]$
$m_8^T = [00110000001010000111010000010001010]$
$m_9^T = [00110000001010000101001010100001001]$
$m_{10}^T = [00010010001010000101000010100001110]$
$m_{11}^T = [10001100001001000101000010100001010]$
$m_{12}^T = [10000101010100000100100010100001010]$
$m_{13}^T = [100001010100000101010000010010001010]$
$m_{14}^T = [100001010100000101000010101000001001]$
$m_{15}^T = [100000110100000101000010100001110000]$
$m_{16}^T = [11100001000001101000010100001010000]$
$m_{17}^T = [10100001110000100000110100001010000]$
$m_{18}^T = [10100001010000111000010000011010000]$
$m_{19}^T = [101000010100000101000011100001000001]$

B. Regla 15

La regla 15 es un ejemplo de un AC reversible. Este tipo de autómatas han sido ampliamente estudiados debido a sus implicaciones prácticas [44][45]. En este ejemplo se consideran configuraciones de seis células ($q = 6$), tal que la configuración inicial es $C^0 = 100101$. Por lo tanto, cada seis marcados en la dinámica de la red N_{15} , la cual representa al ACE 15, se obtiene una nueva configuración para el autómata. El marcado inicial de la red N_{15} , que corresponde a la configuración inicial del ACE, es $m_0^T = [0001001101000001010000000101010100000001110]$.

La regla local de evolución φ se define en la Tabla V,

mientras que los tipos de subredes que componen a la red N_{15} se muestran en la Fig. 5.

Figura 5. Tipos de subredes de la red N_{15} que representa al ACE 15.TABLA V. REGLA LOCAL DE EVOLUCIÓN (φ) QUE PRODUCE LA REGLA GLOBAL 15.

\mathcal{V}	111	110	101	100	011	010	001	000
$\varphi(\mathcal{V})$	0	0	0	0	1	1	1	1

Las submatrices A , B y C correspondientes a las subredes C_1 , C_3 y C_6 de la Fig. 5 se definen como sigue:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

De manera similar, las submatrices L y R se definen de la siguiente forma:

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La comparación entre la evolución del ACE 15, con la configuración inicial $C^0 = 100101$, y la evolución de marcados de la red N_{15} se realiza a través del diagrama de ciclos exhibido en la Fig. 6 y la gráfica de alcanzabilidad de la Fig. 7. Al igual que en el ejemplo anterior, los marcados resultantes de la evolución del marcado inicial de la red N_{15} se calculan con la ecuación de estado (1) y la ecuación (5).

En la Fig. 6 se observa que la configuración C^0 forma parte de un ciclo de seis configuraciones. Dicho ciclo es observable en la gráfica de alcanzabilidad de la Fig. 7 de la red N_{15} , donde

los marcados $M_0, M_6, M_{12}, M_{18}, M_{24}$ y M_{30} representan a las seis configuraciones del ciclo de la Fig. 6.

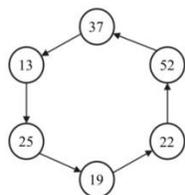


Figura 6. Diagrama de ciclos del ACE 15 para la configuración $\square C^0 = 100101$, tal que $100101_2 = 37$.

C. Regla 54.

La regla 54 es uno de los ACE cuya dinámica es similar a la del ACE 110; y por esta razón ha atraído la atención para su estudio [46]. En este ejemplo las configuraciones del ACE se componen de siete células, tal que $C^0 = 0110110$.

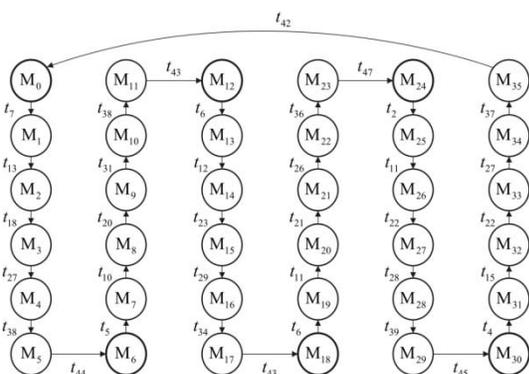


Figura 7. Gráfica de alcanzabilidad de la red N_{15} .

Las submatrices **A**, **B** y **C** se definen de la siguiente forma:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

La submatriz **A** corresponde a la subred c_1 de la red N_{54} ; la submatriz **B**, a las subredes c_2 a c_6 y la submatriz **C**, a la subred c_7 . Las submatrices **L** y **R** se definen de la siguiente manera:

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Una vez calculados los marcados de la red N_{54} a través de la

ecuación de estado (1) y la ecuación (5), a partir del marcado M_0 correspondiente a la configuración inicial del ACE, se obtiene la gráfica de marcados mostrada en la Fig. 9.

La evolución del ACE a partir de la configuración $C^0 = 0110110$ se muestra en la Fig. 8 mediante el diagrama de ciclos para tal configuración. De esta forma, mediante estos dos diagramas se observa una similitud en la dinámica entre la red N_{54} y el ACE 54, de tal manera que los marcados $M_0, M_7, M_{14}, M_{21}, M_{28}, M_{35}, M_{42}$ y M_{49} representan a las configuraciones $C^0, C^1, C^2, C^3, C^4, C^5, C^6$ y C^7 , respectivamente.

D. Regla 90.

La regla 90 es un ACE aditivo [47][48], es decir, su regla local de evolución puede obtenerse mediante la adición módulo 2 de los estados de los vecinos de la central de cada vecindario, p.e. $\varphi(101) = 0 = 1 + 1 \pmod{2}$.

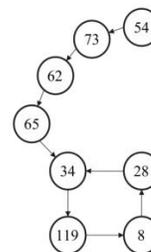


Figura 8. Diagrama de ciclos del ACE 54 para la configuración $\square C^0 = 0110110$, tal que $0110110_2 = 54$.

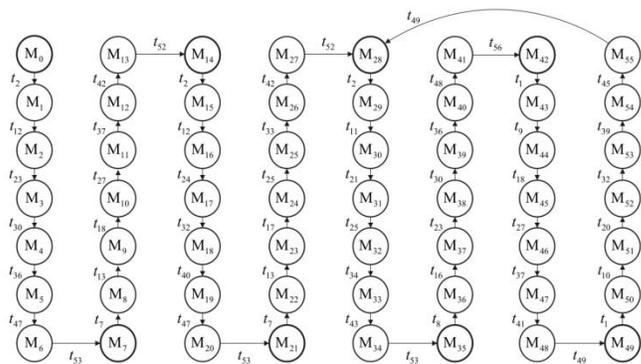


Figura 9. Gráfica de alcanzabilidad de la red N_{54} .

La configuración inicial es $C^0 = 11010011$, por lo que cada configuración consta de ocho células. Las submatrices **A**, **B** y **C** de la red N_{90} se definen como sigue:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Asimismo, las submatrices L y R se definen de la siguiente manera:

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La submatriz A corresponde a la subred c_1 ; la submatriz C , a la subred c_8 y la submatriz B , a las subredes c_2 a c_7 . La Fig. 10 muestra la evolución de la configuración $C^0 = 11010011$ bajo la regla 90, mientras que la Fig. 11 exhibe la gráfica de alcanzabilidad de la red N_{90} . De manera similar a los ejemplos anteriores, a través de estas figuras se encuentra la similitud en la dinámica tanto de la RdP como del ACE.



Figura 10. Diagrama de ciclos del ACE 90 para la configuración $C^0 = 11010011$, tal que $11010011_2 = 211$.

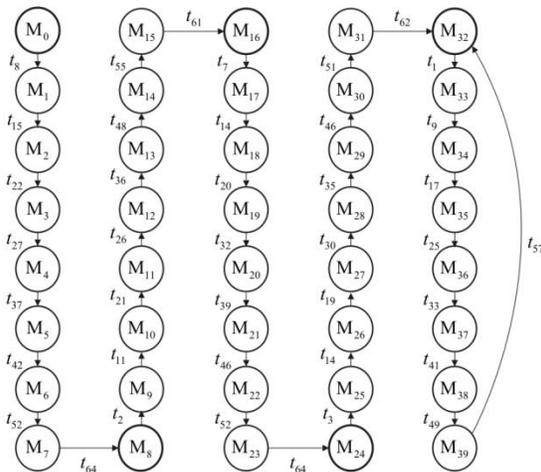


Figura 11. Gráfica de alcanzabilidad de la red N_{90} .

VI. CONCLUSIONES

En este artículo se presentó la simulación de la evolución de los ACE mediante la ecuación de estado de las RdP. La mayoría de los estudios sobre ACE abordan sus aspectos teóricos como determinar propiedades de su evolución o encontrar estructuras a lo largo de dicha evolución. Aunque la evolución de los ACE se realiza de manera implícita, no existe una herramienta general para llevar a cabo dicha evolución. No obstante que existen métodos para estudiar la evolución de los ACE a través del estudio de las configuraciones, estos métodos no permiten realizar la evolución del autómeta.

En este artículo se mostró que los ACE pueden ser modelados con RdP y que su evolución puede ser realizada con la ecuación de estado de las RdP y el uso de un operador lógico. En primer lugar se obtiene la RdP para un determinado ACE. La RdP se compone de un número de subredes que representan a las células del ACE. Luego, a partir de la matriz de incidencia y el marcado inicial de la RdP se determina la transición que se dispara en dicho marcado, obteniendo así el vector de control de disparo que es empleado en la ecuación de estado para calcular el marcado subsecuente. De esta manera, la ecuación de estado es aplicada de manera recursiva para obtener la evolución de marcados de la RdP, de tal forma que cada cierto número de marcados se obtiene una configuración en la evolución del autómeta.

Se presentó un algoritmo mediante el cual se generaliza la construcción de una RdP para cualquier ACE. Asimismo, se dieron algunos ejemplos con los que se demostró la equivalencia entre la evolución del ACE y la correspondiente RdP.

En un trabajo posterior se considera el uso de algunos métodos de análisis de las RdP para determinar características de los ACE. En particular el uso del método de invariantes de transición permitiría determinar en un ACE dado el tiempo necesario para alcanzar una determinada configuración. Este tipo de resultado no es posible obtenerlo mediante los métodos de análisis de los ACE, por lo que sería una contribución importante en su estudio, principalmente en la determinación de su reversibilidad.

De la misma manera se plantea realizar un análisis formal en la equivalencia de las RdP y los ACE, considerando el principio de localidad en la dinámica obtenida con ambas herramientas. Esto es, tanto las RdP como los AC basan su evolución en el hecho de que las interacciones locales causan cambios globales en el estado de un sistema.

REFERENCIAS

- [1] J. L. Peterson, "Petri Nets". Computing Surveys, 29: 223–252, 1977.
- [2] M. Silva, "Las Redes de Petri: En la Automática y la Informática". AC, Madrid, 2002.
- [3] T. Murata, "Petri Nets: Properties, Analysis and Applications". In Proceedings of IEEE, 77:541–580, 1989.
- [4] L. Recalde, M. Silva, J. Ezpeleta and E. Teruel, "Petri Nets and Manufacturing Systems: An Examples-driven Tour". Lectures on Concurrency and Petri Nets: Advances in Petri nets, 3098: 742–788, 2004.
- [5] M. C. Zhou and K. Venkatesh, "Modeling, Simulation and Control of Flexible Manufacturing Systems: A Petri Net Approach", World Scientific, Singapore, 1999.
- [6] M. Hack, "Petri Net Languages". Tech. Rep. 159, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, USA, 1976.
- [7] J. Cardoso, R. Valette and D. Dubois, "Petri Nets with Uncertain Markings". In Advances in Petri Nets 1990, G. Rozenberg ed., Bonn, West Germany, 28–30 June 1989, Springer-Verlag, pp. 64–78, 1991.
- [8] J. Cardoso, R. Valette and D. Dubois, "Fuzzy Petri Nets: An Overview". In 13th IFAC World Congress, San Francisco, CA, 30 June–5 July, USA, pp. 443–448, 1996.
- [9] A. Gronewold and M. Sonnenschein, "Asynchronous Layered Cellular Automata for the Structured Modelling of Ecological Systems", W. Hahn and A. Lehmann, eds., pp. 286–290, 1997.
- [10] A. Gronewold and M. Sonnenschein, "Event-based Modelling of Ecological Systems with Asynchronous Cellular Automata". Ecological Modelling 108:37–52, 1998.
- [11] H. C. Shen and W. P. Yan, "Modeling Autonomous Assembly Systems and FMS Using Cellular Automata". The International Journal of Advanced Manufacturing Technology 7:333–338, 1992.

- [12] H. C. Shen, H. L. Chau and K. K. Wong, "An Extended Cellular Automaton Model for Flexible Manufacturing Systems". The International Journal of Advanced Manufacturing Technology 11:258–266, 1996.
- [13] L. Ojala, O. M. Penttinen and E. Parviainen, "Modeling and Analysis of Margolus Quantum Cellular Automata Using Net-theoretical Methods". In Applications and Theory of Petri Nets 2004, J. Cortadella and W. Reisig, eds., Springer Berlin / Heidelberg, pp. 331–350, 2004.
- [14] M. Schaller and K. Svovil, "Scale-invariant Cellular Automata and Self-similar Petri Nets". Eur. Phys. J. B 69:297–311, 2009.
- [15] O. M. Penttinen, "Modelling and Analysis of Self-timed Cellular Automata Using High-level Petri Nets". In Proc. of Workshop on Token Based Computing (ToBaCo), Satellite Event of the 25-th International Conference on Application and Theory of Petri Nets, 2004.
- [16] U. Golze and L. Priese, "Petri Net Implementations by a Universal Cell Space". Information and Control 53:121–138, 1982.
- [17] E. W. Weisstein, "Elementary Cellular Automaton". From MathWorld—A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/ElementaryCellularAutomaton.html>.
- [18] S. Wolfram, "Statistical Mechanics of Cellular Automata". Rev. Modern Phys. 55: 601–644, 1983.
- [19] G. Braga, G. Cattaneo, P. Flocchini and C.Q. Vogliotti, "Pattern Growth in Elementary Cellular Automata". Theoretical Computer Science 145:1–26, 1995.
- [20] G. Cattaneo, M. Finelli and L. Margara, "Investigating Topological Chaos by Elementary Cellular Automata Dynamics". Theoret. Comput. Sci. 244:219–241, 2000.
- [21] N. A. Fatès and M. Morvan, "An Experimental Study of Robustness to Asynchronism for Elementary Cellular Automata". Complex systems 16:1–27, 2005.
- [22] J. Gravner and D. Griffeath, "The One-dimensional Exactly 1 Cellular Automaton: Replication, Periodicity, and Chaos from Finite Seeds". Journal of Statistical Physics 142:168–200, 2011.
- [23] G. Juárez, A. Adamatzky, R. Alonso-Sanz and J. Seck-Tuoh, "Complex Dynamics Emerging in Rule 30 with Majority Memory". Complex systems 18:345–365, 2009.
- [24] H. V. McIntosh, "Rule 110 as It Relates to the Presence of Gliders". <http://delta.cs.cinvestav.mx/mcintosh/comun/abstracts/abstractrule110.html>.
- [25] S. Wolfram, "A New Kind of Science". Wolfram Media, USA, 2002.
- [26] L. Wentian and N. Packard, "The Structure of the Elementary Cellular Automata Rule Space". Complex Systems 4:281–297, 1990.
- [27] K. Sutner, "De Bruijn Graphs and Cellular Automata". Complex systems 5:19–30, 1991.
- [28] B. H. Voorhees, "Remarks on Applications of De Bruijn Diagrams and their Fragments". J. Cell. Autom. 3:187–204, 2008.
- [29] H. V. McIntosh, "One Dimensional Cellular Automata". Luniver Press, UK, 2009.
- [30] A. K. Das, A. Sanyal and P.P. Chaudhuri, "On Characterization of Cellular Automata with Matrix Algebra". Inform. Sci. 61:251–277, 1992.
- [31] D. R. Chowdhury, P. Subbarao and P.P. Chaudhuri, "Characterization of Two-dimensional Cellular Automata Using Matrix Algebra". Inform. Sci. 71:289–314, 1993.
- [32] K. Dihidar and P.P. Choudhury, "Matrix Algebraic Formulae Concerning Some Exceptional Rules of Two-dimensional Cellular Automata". Inform. Sci. 165:91–101, 2004.
- [33] A. Nobe, J. Satsuma and T. Tokihiro, "Stable Difference Equations Associated with Elementary Cellular Automata". Japan J. Indust. Appl. Math 18:293–305, 2001.
- [34] J. C. Seck-Tuoh, "Matrix Methods and Local Properties of Reversible One-dimensional Cellular Automata". J. Phys. A: Math. Gen. 35:5563–5573, 2002.
- [35] R. Das, J. P. Crutchfield, M. Mitchell and J. E. Hanson, "Evolving Globally Synchronized Cellular Automata". In Proceedings of the Sixth International Conference on Genetic Algorithms, L. J. Eshelman, ed., San Francisco, CA. Morgan Kaufmann, pp. 336–343, 1995.
- [36] E. Sapin, L. Bull and A. Adamatzky, "Genetic Approaches to Search for Computing Patterns in Cellular Automata". IEEE Computational Intelligence Magazine 4:20–28, 2009.
- [37] I. Barragán, J. C. Seck-Tuoh and J. Medina, "Relationship between Petri nets and cellular automata for the analysis of flexible manufacturing systems. In Advances in Computational Intelligence, vol. 7630 of Lecture Notes in Computer Science, Ildar Batyrshin and Miguel González Mendoza, eds., Springer, pp. 338–349, 2013.
- [38] A. Finkel, "The Minimal Coverability Graph for Petri Nets". In Advances in Petri Nets, G. Rozenberg ed., Springer, pp. 210–243, 1993.
- [39] A. Wuensche and M. Lesser, "The Global Dynamics of Cellular Automata". Santa Fe Institute Studies in the Sciences of Complexity, Addison-Wesley, USA, 1992.
- [40] H. V. McIntosh, "Commentaries on: The Global Dynamics of Cellular Automata, (by A. Wuensche and M. Lesser). <http://delta.cs.cinvestav.mx/~mcintosh/oldweb/pautomata.html>.
- [41] www.informatik.uni-hamburg.de/TGI/PetriNets.
- [42] E. Sivaraman, "An Approach for Solving the General Petri Net Reachability Problem-Duality Theory and Applications, 2004. <http://www.okstate.edu/cocim/members/eswar/duality.pdf>.
- [43] M. Cook, "Universality in Elementary Cellular Automata". Complex Systems 15:1–40, 2004.
- [44] H. V. McIntosh, "Reversible Cellular Automata". [http:// delta. cs. cinvestav.mx/~mcintosh](http://delta.cs.cinvestav.mx/~mcintosh).
- [45] J. Kari, "Reversible Cellular Automata". In Developments in Language Theory, 9th International Conference, DLT 2005, C. De Felice and A. Restivo, eds., Springer, pp. 57–68, 2005.
- [46] G. Juárez, A. Adamatzky and H. V. McIntosh, "On the Representation of Gliders in Rule 54 by De Bruijn and Cycle Diagrams". In Proceedings of the 8th International Conference on Cellular Automata for Research and Industry, ACRI 2008, H. Umeo, S. Morishita, K. Nishinari, T. Komatsuzaki and S. Bandini, eds., Springer, pp. 83–91, 2008.
- [47] T. Rowland and E.W. Weisstein, "Additive Cellular Automaton". From MathWorld—A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/AdditiveCellularAutomaton.html>.
- [48] P. P. Chaudhury, D. R. Chowdhury, S. Nandi and S. Chattopadhyay Additive Cellular Automata, Vol. 1, IEEE Computer Society, USA, 1997.



Irving Barragán-Vite received the Engineering degree in Industrial Engineering as well as the Ph.D. in Industrial Engineering from Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo (UAEH) in 2004 and 2013, respectively. His current research interests include cellular automata, Petri nets and their application in manufacturing systems.



Juan Carlos Seck-Tuoh-Mora received a Ph.D. degree in Computer Science from Centro de Investigación y Estudios Avanzados, of the Instituto Politecnico Nacional, Mexico in 2002. He is a full time professor-researcher at the Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo since 2002. His research work deals with Cellular Automata and Evolutionary Algorithms.



Joselito Medina-Marín received the M.S. and Ph.D. degrees in electrical engineering from the Research and Advanced Studies Center of the National Polytechnic Institute at Mexico, in 2002 and 2005, respectively. Currently, he is a Professor of the Advanced Research in Industrial Engineering Center at the Autonomous University of Hidalgo State at Pachuca, Hidalgo, México. His current research interests include Petri net theory and its applications, active databases, simulation, and programming languages.