ANALISIS DE LA ESTRUCTURA DEL OPERADOR INVERSO DE UNA ECUACIÓN FUNCIONAL CON NÚCLEO DEGENERADO EN LA INTEGRAL

Oleksandr Karelin, Anna Tarasenko, Manuel González Hernández
Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
karelin@uaeh.edu.mx, anataras@uaeh.edu.mx , mghdez@uaeh.edu.mx

Abstract

Previous works [1, 2, 3] have been devoted to studying systems whose state depends on time and whose resources are renewable. The proposed method was based on functional operators with shift. The balance equations of considered models were functional equations with shifts. In this work the inverse operator of the equations is constructed by effective methods. Theory Neumann series and methods for solving integral equations with degenerate kernel have been used. The structure of *the inverse operator is analyzed. Having applied the inverse operator we can resolve the balance equations.*

Keywords: functional equations with shift, weighted Holder space, degenerate kernel, inverse operator.

En las referencias [1], [2] se propusieron modelos matemáticos de sistemas con recursos recuperables en base a ecuaciones funcionales con desplazamientos.

Una ecuación de balance para el modelo cíclico del sistema S , es obtenida.

$$\nu(x) = \\ = d(x)\beta'(x)\nu[\beta(x)] + r(x)\nu(x) - g(x) + p(x).$$

Rescribiendo la ecuación en la forma,

$$a(x)\,\nu(x) - \mathrm{b}(\mathrm{x})\,\nu\,[\beta(\mathrm{x})] = \mathrm{f}(\mathrm{x}),$$

donde

$$a(x) = 1 - r(x), \quad b(x) = \beta'(x) d(x),$$
$$f(x) = p(x) - g(x),$$

o en la forma operador

$$(A\nu)(x) = f(x)$$

siendo

$$A \equiv aI - bB_\beta ,$$

$$(I\nu)(x) \equiv \nu(x) ,$$

$$(B_\beta \nu)(x) \equiv \nu[\beta(x)]$$

En la referencia [3] la ecuación de balance tiene la forma

$$(A\nu)(x) + \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \delta(x)\rho(\tau)\nu(\tau)d\tau = f(x). \qquad (*)$$

Para resolver la ecuación fue propuesto un método. Aquí generalizamos y presentamos un esquema formal del método de búsqueda de la solución.

1. Método

La idea principal del método proviene del esquema de la solución de ecuaciones integrales de Fredholm de segundo tipo con núcleos degenerados [4], cuando una ecuación integral se transforma a un sistema algebraico.

Sea H el espacio de Banach. La ecuación (*) se considera dentro de H.
Sea A el operador continuo y acotado en H.

Existe el operador inverso A^{-1} para A que es continuo y acotado en H.
Aplicamos el operador inverso a la ecuación (*), y se obtiene

$$\nu(x) = \left(A^{-1} f\right)(x) - C_1\left(A^{-1}\delta\right)(x),$$

donde

$$C_1 = \int_0^1 \rho(\tau)\nu(\tau)d\tau.$$

Para encontrar la solución de la ecuación (*) sólo resta calcular la constante C_1.

Al multiplicar ambos miembros por $\rho(x)$:

$$\rho(x)\nu(x) =$$

$$\rho(x)\left(A^{-1} f\right)(x) - C_1\rho(x)\left(A^{-1}\delta\right)(x),$$

y tomando la integral en ambos miembros (sabiendo que las funciones son integrables)

$$\int_0^1 \rho(x)\nu(x)dx =$$

$$\int_0^1 \rho(x)(A^{-1} f)(x)dx - C_1\int_0^1 \rho(x)\left(A^{-1}\delta\right)(x)dx$$

y tomando en cuenta

$$C_1 = \int_0^1 \rho(\tau)\nu(\tau)d\tau,$$

se obtiene

$$C_1 = \int_0^1 \rho(x)(A^{-1} f)(x)dx - C_1\int_0^1 \rho(x)(A^{-1}\delta)(x)dx.$$

La constante C_1 se calcula por la fórmula

$$C_1 = \frac{\int_0^1 \rho(x)(A^{-1} f)(x)dx}{1 + \int_0^1 \rho(x)(A^{-1}\delta)(x)dx}.$$

La solución de la ecuación (*) es por lo tanto

$$\nu(x) = \left(A^{-1}f\right)(x) - \frac{\int_0^1 \rho(t)\left(A^{-1}f\right)(t)dt}{1+\int_0^1 \rho(t)\left(A^{-1}\delta\right)(t)dt}\left(A^{-1}\delta\right)(x).$$

Se propone, que

$$1+\int_0^1 \rho(t)\left(A^{-1}\delta\right)(t)dt \neq 0.$$

2. Resultados

2.1. Operador inverso

La ecuación

$$(A\nu)(x) + \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \delta(x)\rho(\tau)\nu(\tau)d\tau = f(x)$$

se encuentra en el espacio de Hölder con peso.

La función φ satisface condición en el contorno $J=[0,1]$ como:

$$|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)| \leq C\,|x_1-x_2|^{\mu},$$
$$x_0 \in J,\, x_1 \in J, \quad \mu \in (0,1)$$

se llama la función de Hölder con exponente μ y constante C en el contorno J.

Sea $\rho(x)$ una función potencial que tiene ceros en puntos $x=0,\, x=1$.

$$\rho(x) = (x-0)^{\mu_0}(x-1)^{\mu_1}.$$

El espacio de Banach $H_{\mu}^{0}(J,\rho)$ de funciones clase Hölder con peso $\rho(x)$. se forma con las funciones de clase Hölder que se anulan en los puntos $x=0$, $x=1$ con peso $\rho(x)$.

La norma en el espacio $H_{\mu}^{0}(J,\rho)$ se define por

$$\|\varphi(x)\|_{H_{\mu}^{0}(J,\rho)} = \|\rho(x)\varphi(x)\|_{H_{\mu}(J)} =$$
$$\max_{x\in J}|\rho(x)\varphi(x)| + \sup_{x_1\neq x_2}\frac{|\rho(x_1)\varphi(x_1)-\rho(x_2)\varphi(x_2)|}{|x_1-x_2|^{\mu}}.$$

Sea β el desplazamiento biunívoco que guarda la orientación en el contorno J: si $x_1 < x_2$ entonces $\beta(x_1) < \beta(x_2)$ para cualquier $x_1,\, x_2 \in J$;

La función $\beta(x)$ tiene solo dos puntos fijos:

$\beta(0)=0,\, \beta(1)=1$, y $\beta(x)\neq x$, cuando $x\in(01)$.

Además sea $\beta(x)$ derivable y $\beta'(x)\neq 0,$ y las funciones $\beta'(x),\; a(x),\; b(x)$ pertenecen al espacio $H_{\mu}(J)$.

Entonces se pude aplicar el teorema [1] sobre la invertibilidad del operador

$$A \equiv aI - bB_{\beta}$$

El operador funcional A es invertible si se cumple:

$$\sigma_{\beta}(a(x), b(x), \mu, \mu_1, \mu_2) \neq 0,$$

donde la función $\sigma_{\beta}(a,b)$ se construye con las funciones $a(x), b(x), \beta(x)$ y parámetros del espacio $H_{\mu}^{0}(J,\rho)$

$\sigma_{\beta}[a(x), b(x)] =$

$$\begin{cases} a(x), & si\ |a(i)| > |\beta\ '(i)|^{-\mu_i+\mu} |b(i)|,\ i=0,1 \\ b(x), & si\ |a(i)| < |\beta\ '(i)|^{-\mu_i+\mu} |b(i)|,\ i=0,1 \\ 0, & en \quad otros \quad casos.. \end{cases}$$

Aclaremos un poco de donde proviene A^{-1}.

El operador $A = aI - bB_\beta$ es invertible junto con el operador $U = I - uB_\beta$,

siendo la función $u(x) = \dfrac{b(x)}{a(x)}$.

Los operadores inversos se conectan entre si

$$A^{-1} = U^{-1} a^{-1} I$$

El operador inverso se define por

$U^{-1} \equiv$

$$\left(I + uB_\beta + ... + \left(\prod_{j=0}^{M-2} u[\beta_j(x)] \right) B_\beta^{M-1} \right) N^{-1}$$

$$u_j(x) = u[\beta_j(x)],\ \ \beta_j(x) = B_\beta^j(x)(x),$$

$$(B_\beta v)(x) = v[\beta(x)]$$

y operador

$$N^{-1} = \left(I - \prod_{j=0}^{M-1} u[\beta_j(x)]\, B_\beta^M \right)^{-1}.$$

Mostraremos que $A \cdot A^{-1} = I$.

Primero calculamos

$$U\left(I + uB_\beta + ... + \left(\prod_{j=0}^{M-2} u[\beta_j(x)] \right) B_\beta^{M-1} \right) =$$

$$\left(I - uB_\beta \right)\left(I + uB_\beta + ... + \left(\prod_{j=0}^{M-2} u[\beta_j(x)] \right) B_\beta^{M-1} \right) =$$

$$\left(I - \prod_{j=0}^{M-1} u[\beta_j(x)]\, B_\beta^M \right)\left(I - \prod_{j=0}^{M-1} u[\beta_j(x)]\, B_\beta^M \right)^{-1} = I.$$

Identidad $A^{-1} \cdot A = I$ se muestra analógicamente.

El número natural M tienen ser tal que se cumple $\|N_{M-1}\| < 1$, donde

$$N_{M-1} = \prod_{j=0}^{M-1} u_j(x) B_\beta{}^M .$$

Es posible mostrar, que bajo la condición

$$\sigma_\beta(a(x), b(x), \mu, \mu_1, \mu_2) \neq 0$$

siempre existe M tal que se cumple

$$\|N_{M-1}\| < 1.$$

El operador N^{-1} es el operador inverso de

$$N = I - \prod_{j=0}^{M-1} u[\beta_j(x)]\, B_\beta^M ,$$

se representa como una serie de Neumann [4]

$$N^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\prod_{j=0}^{\infty} u[\beta_j(x)] B_\beta^M \right)^i$$

o bien

$$N^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \left(N_{M-1}\right)^i$$

donde

$$N_{M-1} = \prod_{j=0}^{M-1} u[\beta_j(x)]\, B_\beta^M .$$

El operador inverso tiene la estructura

$$U^{-1} \equiv \left(L_M\right) \sum_{i=0}^{\infty} \left(K_M\right)^i$$

donde

$$L_M = \left(I + uB_\beta + \ldots + \left(\prod_{j=0}^{M-2} u[\beta_j(x)] \right) B_\beta^{M-1} \right)$$

$$K_M = \left(\prod_{j=0}^{M-1} u[\beta_j(x)]\, B_\beta^M \right).$$

2.2. Solución de la ecuación funcional con un término integral

Se aplica el método propuesto en la sección 1 para resolver la ecuación siguiente

$$(A\nu)(x) + \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \delta(x)\rho(\tau)\nu(\tau)d\tau = f(x),$$

donde

$$A \equiv aI - bB_\beta .$$

Se obtiene

$$\nu(x) = \left(A^{-1} f\right)(x) - \frac{\int_0^1 \rho(t)\left(A^{-1} f\right)(t)dt}{1 + \int_0^1 \rho(t)\left(A^{-1}\delta\right)(t)dt} \left(A^{-1}\delta\right)(x),$$

donde

$$A^{-1} \equiv \left(L_M\right) \sum_{i=0}^{\infty} \left(K_M\right)^i .$$

Cómo calcular M efectivamente.
Sin éste, el operador inverso solo tiene sentido formal, no podemos construirlo ni usarlo. La formula no sirve.

2.3. Análisis de la estructura del operador inverso

Para construir efectivamente el operador inverso es necesario hallar numero M tal que

$$\left\| \prod_{j=0}^{M-1} u_j(x) B_\beta{}^M \right\|_{H_\mu^0(J,\rho)} \leq 1$$

Según la definición

$$\| \varphi \|_{H_\mu^0(J,\rho)} = \| \rho\varphi \|_C + \| \rho\varphi \|_\mu .$$

Aquí los sumandos son

$$\| \rho\varphi \|_C = \max_{x \in J} | \rho(x)\varphi(x) |,$$

$$\| \rho\varphi \|_\mu = \sup_{x_1 \neq x_2} \frac{| \rho(x_1)\varphi(x_1) - \rho(x_2)\varphi(x_2) |}{| x_1 - x_2 |^\mu} .$$

Se puede mostrar que para cada sumando tienen lugar desigualdades:

$$\left\| \rho \prod_{j=0}^{M-1} u_j B_\beta{}^M \varphi \right\|_C \leq$$

$$\| \rho_\mu \prod_{j=0}^{M-1} u_j \frac{(\rho_{r,s})_j}{(\rho_{r,s})_{j+1}} \|_C \| \varphi \|_\mu \leq$$

$$K_C \prod_{j=0}^{M-1} q^j \| \varphi \|_\mu$$

y

$$\left\| \rho \prod_{j=0}^{M-1} u_j B_\beta{}^M \varphi \right\| \leq$$

$$K_\mu \left(q^M + q^M \sum_{j=0}^{M-3} q^j \right) \| \rho\varphi \|_\mu ,$$

donde

$\rho_\mu = x^\mu (1-x)^\mu$, $\rho_{r,s} = x^r (1-x)^s$

$u_j(x) = u[\beta_j(x)] = \left(B_\beta{}^j u\right)(x),$

$\beta_j(x) = \left(B_\beta{}^j x\right)(x)$

$(\rho_{r,s})_j = B_\beta{}^j (\rho_{r,s}) = \beta_j(x)^r \left(1 - \beta_j(x)^s\right).$

y q es un número menor que 1, es decir $0 < q < 1$

Limites son ceros

$$\lim_{M\to\infty} K_C \prod_{j=0}^{M-1} q^j = 0 ,$$

$$\lim_{M\to\infty} K_\mu \left(q^M + q^M \sum_{j=0}^{M-3} q^j \right) = 0 .$$

Por lo tanto el número M se encuentra efectivamente y el operador inverso se construye evidentemente

$$A^{-1} \equiv (L_M) \sum_{i=0}^{\infty} (K_M)^i ,$$

donde

$$L_M = \left(I + uB_\beta + \ldots + \left(\prod_{j=0}^{M-2} u[\beta_j(x)] \right) B_\beta^{M-1} \right)$$

$$K_M = \left(\prod_{j=0}^{M-1} u[\beta_j(x)]\, B_\beta^M \right).$$

Referencias

[1] Anna Tarasenko, Aleksandr Karelin, Gilberto Pérez Lechuga, Manuel González Hernández, *Modeling systems with renewable resources based on functional operators with shifts*, Applied Mathematactics and Computation, Vol. 216, Editorial: Elsevier, EE.UU, 2010, p. 1938-1944.

[2] Oleksandr Karelin, Gilberto Pérez, Manuel González, Anna Tarasenko, *Modelos cíclicos y modelos abiertos de sistemas con recursos recuperables*, Memorias de VII Simposio Internacional "Aportaciones de las Universidades a la docencia, la Investigación, la Tecnología y el Desarrollo", Instituto Politécnico Nacional, la Ciudad de México, México, 2006, 6 pp.

[3] Oleksandr Karelin, Manuel González Hernández, Anna Tarasenko, *Modelo cíclico de los sistemas renovables con el término de reproducción en la forma integral*, Memorias de XIII Simposio Internacional "Aportaciones de las Universidades a la docencia, la Investigación, la Tecnología y el Desarrollo", Instituto Politécnico Nacional, la Ciudad de México, México, 2012, 6 pp.

[4] A.N. Kolmlgorov, S.V. Fomin, Elementos de la teoría de funciones y análisis funcional, Editorial: Nauka, Moscú, 1974, 544 p.