

Una Conjetura de Polya y Szego para el Tono Fundamental de Membranas Poligonales

Federico Menéndez-Conde Lara
y Luis Meza Chávez
Centro de Investigación en Matemáticas,
Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
fmclara@uaeh.edu.mx
luerst@gmail.com

Resumen

Polya y Szego conjeturaron que el n -polígono regular es capaz de producir el tono más grave de entre los polígonos con n lados. La conjetura sigue abierta para todos los valores de $n \geq 5$, después de casi setenta años de haber sido formulada. En este trabajo, presentamos una exposición sobre este problema y algunos temas relacionados.

1. Introducción

A mediados del siglo pasado, en [18], los matemáticos húngaros George Polya y George Szego abordaron el siguiente problema:

De entre todas las membranas poligonales de n lados y área dada, ¿cuál es la que tiene menor velocidad de vibración?

Esa misma pregunta puede formularse en términos acústicos:

Si un tambor poligonal de n lados tiene área dada, ¿qué forma debe tener el polígono para producir la tonalidad más grave posible?

Los mismos autores formulan la conjetura de que el polígono regular es la respuesta a esa pregunta, y prueban dicha afirmación en los casos $n = 3$ (el triángulo equilátero) y $n = 4$ (el cuadrado). La conjetura permanece abierta en todos los demás casos.

La prueba de Polya y Szego se basa en un proceso de simetrización conocido como *simetrización de Steiner*, en el que cada subconjunto (medible) del plano es transformado en otro conjunto con la misma medida que el original, y que es simétrico con respecto a una dirección preestablecida. En el artículo [17], Polya y Szego consideran

un problema de electrostática, y demuestran que la simetrización de Steiner reduce la capacidad de un condensador; esencialmente, la misma demostración sirve para concluir que la simetrización de Steiner reduce también la tonalidad más grave que puede producir un tambor.

La velocidad de vibración de una membrana está determinada por el primer eigenvalor del problema de frontera (1); esta cantidad es conocida como el *tono fundamental* de la membrana Ω . De esta forma, el problema de Polya y Szego que tratamos en este trabajo, es un ejemplo de “problema de eigenvalores de ecuaciones diferenciales parciales”; existen muchos ejemplos de este tipo de problemas, y una muy extensa literatura al respecto. En particular, diversas técnicas de simetrización de dominios han sido empleadas exitosamente en dichos problemas, tanto en dominios euclidianos como no euclidianos; de entre la muy vasta literatura al respecto, referimos a [4, 8, 9, 11, 21], donde pueden encontrarse una buena cantidad de ejemplos, así como numerosas referencias, involucrando tanto problemas lineales como no lineales.

2. El Tono Fundamental de una Membrana

A lo largo de este trabajo, Ω será un subconjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^2 con frontera suave a trozos. Consideramos en Ω la ecuación de Helmholtz con condiciones de frontera de Dirichlet:

$$\begin{cases} -\Delta f(x) = \lambda f(x) & x \in \Omega, \quad \lambda \in \mathbb{C} \\ f(x) = 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (1)$$

Es bien sabido (ver por ejemplo [5]) que este problema no tiene solución para valores arbitrarios de λ , si no solamente para un conjunto discreto, numerable y no acotado de números reales positivos, conocidos como *eigenvalores* del problema; la función f es una *eigenfunción* asociada a λ . Nótese que las eigenfunciones asociadas a un eigenvalor fijo forman un espacio vectorial. Es claro que los eigenvalores (y sus eigenfunciones correspondientes) dependen del dominio Ω ; en este trabajo nos ocuparemos exclusivamente del más pequeño de estos eigenvalores, que es conocido como el *tono fundamental* de la membrana Ω , y al cual denotamos – especificando su dependencia del dominio – por $\lambda_1(\Omega)$.

El problema (1) aparece en muy diversas situaciones; en particular, resulta de separar la variable temporal en la ecuación de onda que modela las vibraciones de una membrana que tiene la forma del dominio Ω , y que está sujeta por la orilla; esto es:

$$\begin{cases} u(x;t) + \Delta u(x;t) = 0 & x \in \Omega, \quad t \in \mathbb{R} \\ u(x;t) = 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Como consecuencia de lo anterior, las vibraciones periódicas de la membrana son de la forma

$$u(x; t) = e^{i\sqrt{\lambda}t} f(x)$$

donde λ es un eigenvalor del problema (1) y f es una solución del mismo. En acústica, las frecuencias $\sqrt{\lambda}$ determinan las tonalidades que un tambor con forma Ω es capaz de producir; a mayor valor de λ , la velocidad de vibración es mayor, de forma que los valores mayores de λ corresponden a los tonos más agudos y los valores menores a los tonos más graves. De este modo, el tono fundamental $\lambda_1(\Omega)$ corresponde a la tonalidad más grave que un tambor con forma Ω puede producir.

Las siguientes propiedades de las eigenfunciones son muy bien conocidas (ver e.g. [5, 6]):

- (a) Las eigenfunciones son suaves (de clase $C^\infty(\Omega)$, es decir funciones cuyas derivadas de todos los órdenes son continuas).
- (b) Si u es una eigenfunción correspondiente a $\lambda_1(\Omega)$, entonces u tiene signo constante en Ω (o es siempre positiva o siempre negativa).
- (c) Si u es una eigenfunción correspondiente a $\lambda_j(\Omega)$ con $j \geq 2$, entonces u necesariamente cambia de signo en Ω .
- (d) Si u y v dos son eigenfunciones correspondientes a $\lambda_1(\Omega)$, entonces una es un múltiplo de la otra (i.e. el primer eigenvalor tiene *multiplicidad uno*).

En general, dado un dominio Ω , no es posible calcular explícitamente los eigenvalores – y en particular el tono fundamental – del problema (1). Son muy contados los casos (ver, por ejemplo [13] para una descripción) en los cuales esto puede hacerse por separación de variables; además, con la excepción de los casos en los que Ω es un círculo o un rectángulo, este método ofrece no pocas dificultades técnicas.

Una forma de conocer el valor exacto del tono fundamental de algunas regiones Ω es el método de dominios nodales. Este método se basa en la observación siguiente:

Sea u una eigenfunción del problema (1) correspondiente a un eigenvalor $\lambda_k > \lambda_1$, y sea

$$\Omega^+ = \{x \in \Omega \mid u(x) > 0\}.$$

Entonces, para Ω' cualquier componente conexa de Ω^+ , se sigue (de la continuidad de u) que $u = 0$ en $\partial\Omega'$. Por lo tanto u es una eigenfunción para Ω' con eigenvalor λ_k ; al tener u signo constante en Ω' se concluye que $\lambda_k = \lambda_1(\Omega')$. Se dice que Ω' es un *dominio nodal* de Ω .

Desde luego, el mismo argumento se aplica si se considera el conjunto Ω^- de los puntos de Ω en los que u es negativa. El método de



Figura 1: Algunos dominios nodales del círculo.

dominios nodales nos permite conocer el valor explícito de una colección infinita de dominios distintos:

Partiendo de un dominio del cual se conocen todos sus eigenvalores y todas sus eigenfunciones (digamos un círculo o un rectángulo) cada eigenfunción produce dominios nodales distintos, para los cuales se conoce tono fundamental. En la Figura 1 se ilustran dos ejemplos típicos de dominios nodales del círculo.

Todo esto aparenta estar muy bien; sin embargo existe el inconveniente de que estos dominios nodales no son elegidos a priori, si no que están determinados por las eigenfunciones; o sea que, si buscamos el tono fundamental de un dominio dado, este método no servirá darnos el valor de su tono fundamental, a menos que de la casualidad de que esté en el “menú de opciones” (que visto así resulta muy limitado).

Por lo comentado en los dos párrafos anteriores, si queremos conocer el valor del tono fundamental de una membrana, casi siempre hemos de conformarnos con aproximaciones; hay muchos métodos tanto analíticos como numéricos para estimar y para aproximar el tono fundamental, existiendo una extensa literatura al respecto. En el caso particular que nos ocupa (el tono fundamental de polígonos), podemos mencionar, como una pequeña muestra, los artículos recientes [1], [10] y [20].

Un resultado teórico clásico, y fundamental para lo que sigue en este trabajo es el siguiente:

Teorema 2.1 *El tono fundamental de Ω está dado por*

$$\lambda_1(\Omega) = \min \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2}{\int_{\Omega} |u|^2}. \quad (2)$$

donde el mínimo se toma sobre todas las funciones u de clase $C^2(\Omega)$ que se anulan en la frontera, y se alcanza en el caso en el que u es una eigenfunción correspondiente a $\lambda_1(\Omega)$.

Al cociente en el lado derecho de la igualdad (2) se le conoce como *cociente de Rayleigh*. El teorema anterior es completamente análogo al resultado de álgebra lineal que establece que el menor eigenvalor de una matriz hermitiana A de tamaño $n \times n$ es igual al menor valor de $Ax \cdot x$ para $x \in \mathbb{R}^n$ con norma (euclídeana) igual a 1 (ver e.g. [14]). Para una prueba del Teorema 2.1 puede consultarse, por ejemplo [6].

3. La Simetrización de Steiner

A continuación presentamos la *simetrización de Steiner* que, como se mencionó en la introducción, fue utilizada por Polya y Szego en el problema que nos ocupa.

Denotamos por $m(\cdot)$ a la medida de Lebesgue en el plano.

Definición 3.1 Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto Lebesgue medible y ℓ una recta dada en el plano. Se define Ω^* como el conjunto tal que, para toda recta \mathcal{Y} perpendicular a ℓ , se tiene que $\Omega^* \cap \mathcal{Y} \subset \mathcal{Y}$ es igual al segmento de recta sobre \mathcal{Y} , centrado en ℓ y de longitud igual a la medida de Lebesgue (unidimensional) de $\Omega \cap \mathcal{Y}$. Al conjunto Ω^* se le conoce como la *simetrización de Steiner* de Ω con respecto a la recta ℓ .

La simetrización de Steiner se ilustra en la Figura 2, donde el conjunto negro de arriba, al ser simetrizado con respecto a la recta horizontal, es transformado en el conjunto blanco de abajo.

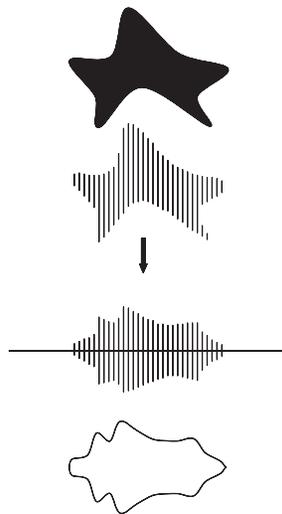


Figura 2: La simetrización de Steiner

NOTA: desde luego, Ω^* depende no solamente de Ω , si no también de la recta ℓ .

Una vez que se ha transformado un dominio Ω en su simetrización de Steiner Ω^* , es posible también simetrizar, de forma natural, funciones definidas en Ω :

Definición 3.2 *Sea $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua, acotada y no negativa. Para $0 \leq t \leq \sup\{u(x)\}$ sea Ω_t el conjunto*

$$\Omega_t = \{x \in \Omega \mid u(x) \geq t\}.$$

Se define $u^* : \Omega^* \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$u^*(x) = \sup \{t \mid x \in \Omega_t^*\}$$

A la función u^* se le conoce como la simetrización de Steiner de u .

Observamos que u^* es continua, simétrica con respecto a ℓ , y que para toda función integrable $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se tiene que

$$\int_{\Omega} \varphi \circ u = \int_{\Omega^*} \varphi \circ u^*. \quad (3)$$

Más aún, se tiene el siguiente resultado que es fundamental para los fines de esta exposición:

Teorema 3.1 (Desigualdad de Polya) *Para toda $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 se tiene que u^* es de clase C^1 y que*

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \geq \int_{\Omega^*} |\nabla u^*|^2.$$

El resultado del Teorema 3.1 resulta natural del hecho de que la función simetrizada u^* tiene sus valores de forma que “varían menos localmente” que los de la función original u . Una demostración de este teorema puede consultarse en [16].

Para nosotros, el siguiente corolario es fundamental.

Corolario 3.1 *Para todo $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ abierto, se tiene que $\lambda_1(\Omega) \geq \lambda_1(\Omega^*)$.*

DEMOSTRACIÓN

Si u_1 es una eigenfunción correspondiente a $\lambda_1(\Omega)$, se sigue del Teorema 2.1, la igualdad (3) con $\varphi(x) = |x|^2$ y el Teorema 3.1 que

$$\lambda_1(\Omega) = \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2}{\int_{\Omega} |u|^2} \geq \frac{\int_{\Omega^*} |\nabla u^*|^2}{\int_{\Omega^*} |u^*|^2} \geq \lambda_1(\Omega^*).$$

□

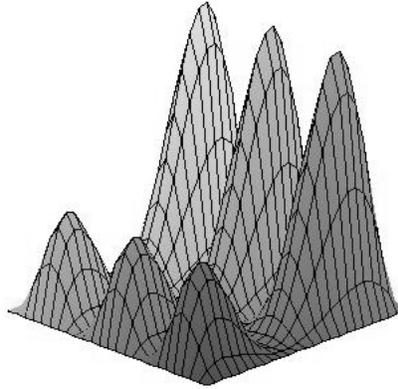


Figura 3: Una función simetrizada

4. Encontrando Vibraciones Mínimas

En el caso en el que la membrana Ω es rectangular, resulta muy sencillo determinar los eigenvalores del problema (1) por el método de separación de variables; puede calcularse que si Ω es un rectángulo con lados de longitudes a y b , entonces

$$\lambda_1(\Omega) = \frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2}. \quad (4)$$

De la igualdad de arriba, puede notarse lo siguiente: si tomamos un rectángulo cualquiera, y lo hacemos crecer o decrecer manteniendo la proporción entre los lados, entonces el tono fundamental es inversamente proporcional al área del rectángulo. En otras palabras, de entre cualquier colección de rectángulos semejantes, el producto del área de Ω con $\lambda_1(\Omega)$ permanece constante. Esta propiedad no es en absoluto exclusiva de los rectángulos, si no que ocurre en el caso general:

Si Ω_R es una dilatación (o contracción) de un dominio Ω por un factor $R > 0$, entonces

$$\lambda_1(\Omega_R)m(\Omega_R) = \lambda_1(\Omega)m(\Omega).$$

Otro ejemplo sencillo e importante que ilustra este hecho es el tono fundamental del círculo de radio R ; está dado por

$$\lambda(B_R) = \frac{z_{0,1}^2}{R^2},$$

donde la constante $z_{0,1}$ es la primera raíz de la función de Bessel J_0 .

Tenemos pues, que para determinar el tono fundamental de Ω la pregunta importante es cuál es la forma del dominio, y no cual es su tamaño (que puede fijarse sin restar información).

El siguiente resultado es necesario para la validez de la conjetura de Polya y Szego, ya que garantiza la existencia de solución al problema.

Teorema 4.1 *Sea $n \geq 3$ entero y $C \in (0, \infty)$. Existe un único polígono P_n de n lados y área C , tal que*

$$\lambda_1(P_n) \leq \lambda_1(P)$$

para todo polígono P con a lo más n lados y área C .

Referimos a [9] para una demostración de este teorema. Como se mencionó en la introducción, se sabe que P_3 es el triángulo equilátero y que P_4 es el cuadrado. Las pruebas de los casos $n = 3, 4$ están basadas por completo en el Corolario 3.1, y las presentamos a continuación.

Teorema 4.2 *De entre todos los triángulos de área dada, el triángulo equilátero es el que tiene el menor tono fundamental.*

DEMOSTRACIÓN.

Observemos primero que si aplicamos simetrización de Steiner a cualquier triángulo con respecto a cualquiera de sus alturas obtenemos un triángulo isósceles. Entonces, en vista del Corolario 3.1 el triángulo con menor tono fundamental (cuya existencia y unicidad están garantizadas por el Teorema 4.1) deberá tener al menos dos lados iguales.

Ahora, tomemos un triángulo isósceles y simetricémoslo con respecto a la altura desde uno de sus lados repetidos (ver Figura 4): El triángulo PQR se transforma en el triángulo (también isósceles) PQS . Sean a y h las longitudes de la base y altura en PQR , como se señala en la figura, y sean a' y h' las longitudes correspondientes en el triángulo simetrizado PQS .

Si α es el ángulo QPR (o QRP) entonces, se observa que

$$\text{sen } \alpha = \frac{h}{a} = \frac{h'}{a'}.$$

Se sigue

$$\frac{h}{a} \cdot \frac{h'}{a'} = \text{sen}^2 \alpha = \frac{h^2}{h^2 + \frac{a^2}{4}}$$

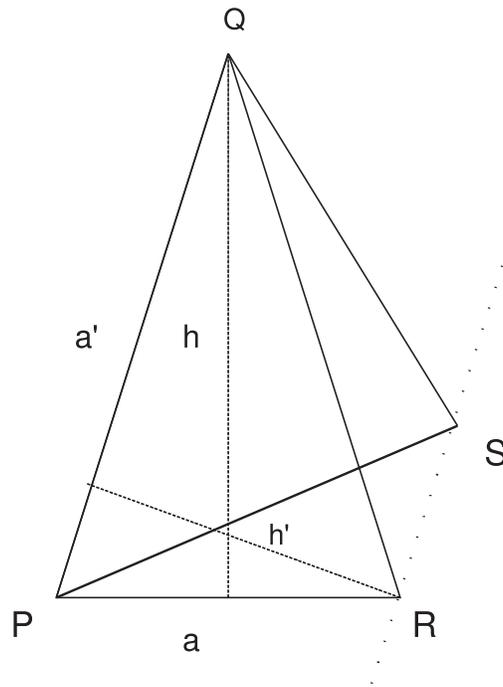


Figura 4: Simetrización de triángulos isósceles.

de modo que, escribiendo $x = h/a$, $x' = h'/a'$ se obtiene la relación

$$x' = \frac{4x}{4x^2 + 1}. \quad (5)$$

Es claro que el triángulo simetrizado PQS no podrá ser igual al triángulo original PQR a menos que $x' = x$. Puede verificarse fácilmente, sustituyendo en (5), que dicha condición se cumplirá solamente en el caso en el que $x = \sqrt{3}/2$, que es la proporción entre la altura y la base de un triángulo equilátero. Como por el Teorema 4.1 debe existir un triángulo que minimice el tono fundamental, este tiene que ser el equilátero, ya que todos los demás candidatos fueron descartados.

□

Teorema 4.3 *De entre todos los cuadriláteros de área dada, el cuadrado es el que tiene el menor tono fundamental.*

DEMOSTRACIÓN.

Notemos primero que simetrizando un cuadrilátero no convexo con respecto a la perpendicular a la diagonal exterior se obtiene un cuadrilátero convexo.

Tres simetrizaciones de Steiner bastan para transformar cualquier cuadrilátero convexo en un rectángulo, como podemos ver en las tres figuras siguientes:

Simetrizando con respecto a la perpendicular a una diagonal se obtiene una especie de papalote (Figura 5).

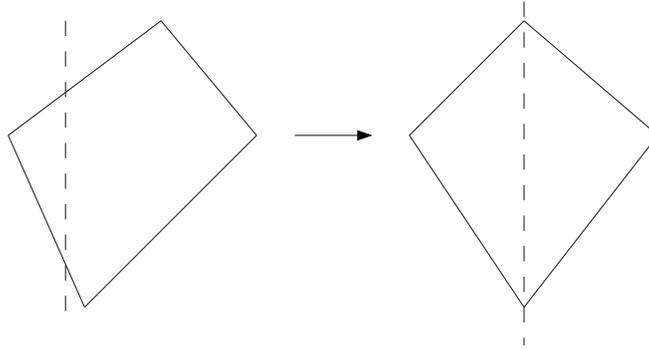


Figura 5: Primera simetrización de un cuadrilátero convexo.

Tomando la perpendicular al eje de simetría del papalote obtenemos un rombo (Figura 6).

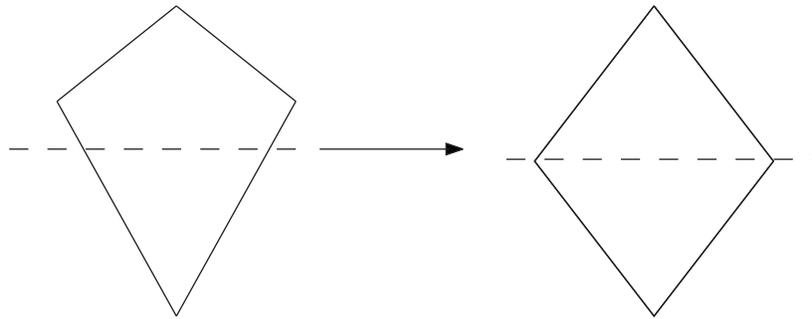


Figura 6: En el segundo paso, obtenemos un rombo.

Tomando la perpendicular a dos lados opuestos del rombo, la simetrización de Steiner resulta en un rectángulo (Figura 7).

De este modo, podemos concluir que el cuadrilátero con menor tono fundamental es un rectángulo. Verificar que de entre los rectángulos de área dada el cuadrado tiene el menor tono fundamental, se sigue fácilmente a partir de (4).

□

El método ilustrado anteriormente no puede aplicarse en el caso de los pentágonos por una razón muy sencilla:

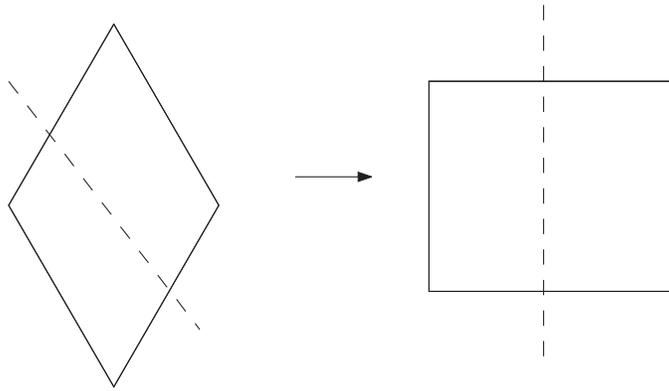


Figura 7: De rombo a rectángulo.

Dado un pentágono arbitrario, no es posible garantizar la existencia de una recta con respecto a la cual la simetrización de Steiner resulte en un pentágono; en general, se aumentará el número de lados. Por ejemplo, el pentágono de la Figura 8 se convierte en un hexágono.

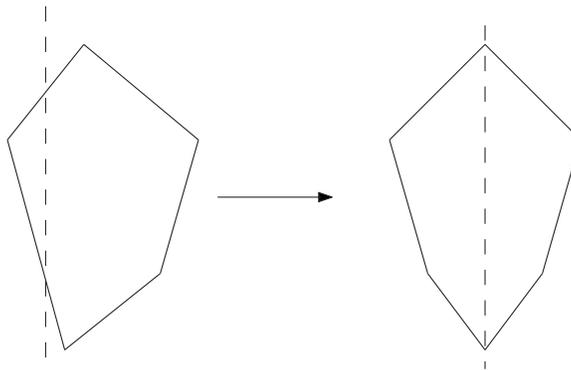


Figura 8: Caso $n = 5$.

5. Perímetro y Frecuencia de Vibración

Además de evidencia numérica y física, existen también argumentos geométricos que hacen suponer que la conjetura de Polya y Szego es cierta. Un ejemplo de esto es la *desigualdad de Faber - Krahn* que establece que para todo dominio Ω se tiene que

$$\lambda_1(\Omega) m(\Omega) \geq \pi z_{0,1}$$

con igualdad si y solamente si Ω es un círculo. Esto es, el dominio más simétrico es el que minimiza el tono fundamental; también, el círculo es el dominio con menor perímetro de entre las regiones con área dada (ver por ejemplo [2] para una detallada exposición de este resultado, conocido como la *desigualdad isoperimétrica*). De entre los polígonos de n lados, el polígono regular es el más simétrico y también el que tiene menor perímetro; es entonces de esperarse que sea también el que tiene menor tono fundamental.

La desigualdad de Faber – Krahn fue conjeturada por J. Rayleigh a partir de evidencia física; dicha afirmación aparece en su libro “The Theory of Sound” que fue publicado en 1876 y del cual siguen apareciendo nuevas ediciones (ver [19]). Esta desigualdad fue demostrada décadas más tarde independientemente por G. Faber [7] y por E. Krahn [12].

Tanto la desigualdad de Faber – Krahn como la de Polya indican una relación entre el perímetro y el tono fundamental de una membrana. La desigualdad de Faber – Krahn nos dice que el dominio con menor perímetro es también el que tiene menor tono fundamental; Polya nos dice que la simetrización de Steiner reduce el tono fundamental de las membranas, y no es difícil ver que también reduce el perímetro. Partiendo de un dominio arbitrario Ω_1 y aplicando repetidas veces simetrizaciones de Steiner (con respecto a una recta distinta cada vez) obtenemos una sucesión de dominios $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \dots$ tales que:

- (a) Todos los dominios tienen la misma área.
- (b) El perímetro de Ω_{n+1} es menor o igual que el perímetro de Ω_n .
- (c) $\lambda(\Omega_{n+1}) \leq \lambda_1(\Omega_n)$.

En vista de lo anterior surge la pregunta sobre hasta donde llega la relación entre el perímetro y el tono fundamental. Podemos por ejemplo preguntarnos:

¿será cierto que dados dos dominios Ω_1 y Ω_2 , con la misma área, el que tiene menor perímetro tendrá necesariamente también menor tono fundamental?

Notemos que si la respuesta a esta pregunta fuera afirmativa, entonces la conjetura de Polya y Szego se seguiría fácilmente en todos los casos. Pero resulta ser que es posible dar contraejemplos. En lo que sigue damos algunos de ellos, todos en polígonos, presentados con detalle en [15].

- 1) Sea T un triángulo rectángulo isósceles. Para $t > 0$, sea R_t el rectángulo con la misma área que T y razón de su lado mayor entre su lado menor igual a t . Existe $\delta > 0$ tal que para $\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} + \delta$ se tiene que R_t tiene menor perímetro que T , pero $\lambda_1(T) < \lambda_1(R_t)$.

- 2) Sea P un paralelogramo con ángulos interiores de 45 y 135 grados, y sea R_t como en el ejemplo anterior (con T reemplazado por P , desde luego). Tomemos c tal que R_c sea el rectángulo con la misma área y el mismo perímetro que P . Entonces, existe $\delta > 0$ tal que para $\frac{1}{2} - \delta < t < \frac{1}{2}$ se tiene que R_t tiene mayor perímetro que T , pero $\lambda_1(R_t) < \lambda_1(P)$.
- 3) Sea T un triángulo equilátero, y sea R_t como antes. Tomemos c tal que R_c sea el rectángulo con la misma área y el mismo perímetro que T . Entonces, existe $\delta > 0$ tal que para $\frac{1}{2} - \delta < t < \frac{1}{2}$ se tiene que R_t tiene mayor perímetro que T , pero $\lambda_1(R_t) < \lambda_1(P)$.

La construcción de los ejemplos anteriores hace uso de la llamada *simetrización continua de Steiner*, introducida por Friedmann Brock en [3]; este método, en términos muy generales, consiste en transformar homotópicamente a un dominio Ω en su simetrización de Steiner Ω^* ; entre muchas otras propiedades, resulta ser que el cociente de Rayleigh de los dominios va decreciendo con la homotopía.

Referencias

- [1] P. Antunes, P. Freitas, *New bounds for the principal Dirichlet eigenvalue of planar regions*, Experiment. Math. 15 (2006), no. 3, 333–342.
- [2] V. Blasjo, *The isoperimetric problem*, Amer. Math. Monthly 112 (2005), no. 6, 526–566.
- [3] F. Brock, *Continuous Steiner symmetrization*, Math. Nachr. 172 (1995), 25–48.
- [4] I. Chavel, *Isoperimetric Inequalities, Differential Geometric and Analytic Perspectives*, Cambridge Tracts in Mathematics 145, Cambridge University Press.
- [5] R. Courant, D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics, Vol. I y II*, Interscience Publishers, 1953.
- [6] L.C. Evans, *Partial Differential Equations*, Grad. Studies in Math., Vol. 19, AMS 2000.
- [7] G. Faber, *Beweis, dass unter alien homogenen Membranen von gleicher Fläche und gleicher die kreisformige den tiefsten Grundton gibt*, Sitz. Bayr. Akad. (1923) 169-172.

- [8] L.E. Fraenkel, *An Introduction to Maximum Principles and Symmetry in Elliptic Problems*, Cambridge Tracts in Mathematics 128, Cambridge University Press.
- [9] A. Henrot, *Extremum Problems for Eigenvalues of Elliptic Operators*, Birkhäuser Verlag 2006.
- [10] P. Freitas, *Precise bounds and asymptotics for the first Dirichlet eigenvalue of triangles and rhombi*, J. Funct. Anal. 251 (2007), no. 1, 376–398.
- [11] B. Kawohl, *Rearrangement and Convexity of Level Sets in PDE*, Lecture Notes in Mathematics 1150, Springer Verlag 1985.
- [12] E. Krahn, *Über eine von Rayleigh formulierte Minimaleigenschaft des Kreises*, Math. Ann. 94 (1925), no. 1, 97–100.
- [13] J.R. Kuttler, V.G. Sigilito, *Eigenvalues of the Laplacian in two dimensions*, SIAM Review, Vol. 26, No 2. April 1984.
- [14] P. Lax, *Linear Algebra and its Applications*, Enlarged second edition. Wiley-Interscience 2007.
- [15] L. Meza Chávez, *Sobre el Perímetro y el Tono Fundamental de Dominios en el Plano*, Tesis de Licenciatura, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo 2008.
- [16] G. Polya, *Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics*, Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press.
- [17] G. Polya, G. Szego, *Inequalities for the Capacity of a Condenser*, American Journal of Math., Vol. 67, No. 1 (1945), pp. 1-32
- [18] G. Polya, G. Szego, *Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics*, Annals of Mathematics Studies, no. 27, Princeton University Press 1951.
- [19] J. Rayleigh, R. Lindsay, *The Theory of Sound*, Dover Publications.
- [20] B. Siudeja, *Sharp bounds for eigenvalues of triangles*, Michigan Math. J. 55 (2007), no. 2, 243–254.
- [21] G. Talenti, *Rearrangements and PDE*, Inequalities (Birmingham, 1987), 211–230, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 129, Dekker 1991.