Algunas características de actividades de aprendizaje con tecnología

Dr. Fernando Barrera Mora
barrera@uaeh.edu.mx
Dr. Aarón Reyes Rodríguez
aaronr@uaeh.edu.mx
Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo

Introducción

Algunos medios escritos nacionales han señalado que existen serias deficiencias en la educación matemática de los estudiantes en el nivel bachillerato; por ejemplo, durante el año 2009 *La Jornada* publicó algunas notas en las que se indica que alrededor de 81% por ciento de los estudiantes del nivel medio superior poseen un nivel ínfimo en matemáticas (Avilés, 2009; Fernández-Vega, 2009; Poy, 2009). Asimismo, también se menciona que 40 por ciento de los profesores de bachillerato no tienen un título que avale sus conocimientos (Avilés, 2009; Olivares-Alonso, 2009).

Al considerar estos datos, necesariamente surgen preguntas relacionadas con la correlación que existe entre los niveles de aprovechamiento de los estudiantes y los conocimientos disciplinares y pedagógicos de los profesores. En este sentido, algunos investigadores consideran que la clave para el mejoramiento de los conocimientos matemáticos de los estudiantes consiste en colocar en cada salón de clases a profesores altamente preparados (Sowder, 2007). Pero, ¿qué significa preparar a los profesores?, y ¿cuál es el papel que deben jugar las instituciones nacionales de educación superior, principalmente las universidades públicas, en la formación y actualización de los profesores de los diferentes niveles? En países como Estados Unidos, Canadá y España, la formación de los docentes de bachillerato está a cargo de las universidades; sin embargo en muchos casos es una formación que no se encuentra estructurada, ya que por un lado, los futuros profesores cursan algunas materias de matemáticas en las facultades de ciencias y algunos cursos de didáctica en las facultades de educación.

No se discute que las instituciones públicas de educación superior deben adoptar un papel como rectoras en la formación y actualización de profesores en el nivel bachillerato, dada la inexistencia de programas específicos para tal fin (Barrera, 2009a). Sin embargo, los programas que se ofrezcan deben estructurar y unificar los contenidos matemáticos, pedagógicos y didácticos necesarios para la actividad docente y contar con la participación coordinada de matemáticos y educadores matemáticos.

La formación y actualización docente en el nivel medio superior es relevante, pues profesores bien preparados estarán en mejores condiciones de apoyar y guiar el desarrollo cognitivo de los estudiantes de ese nivel. Se requiere de manera particular, que los profesores de matemáticas estén capacitados para ofrecer una enseñanza de la disciplina en la que se destaquen posibles aplicaciones, tanto en la vida cotidiana como en los estudios que posteriormente emprenderán.

En esta dirección, algunos investigadores han argumentado que los programas de formación y actualización de los profesores de matemáticas debe girar en torno a tres componentes del conocimiento: (i) matemáticas, (ii) epistemología y (iii) didáctica (Harel, 1994; Harel y Lim, 2004; Shulman, 1987). Adicionalmente a esto, se sugiere que estos programas estén estructurados de forma que permita a los profesores participar en comunidades profesionales en donde tengan la oportunidad de reflexionar e intercambiar ideas que sustenten y amplíen sus conocimientos matemáticos y didácticos (Santos-Trigo, 2008). En la constitución de estas comunidades se resalta la importancia de la participación de los propios profesores, así como de matemáticos y educadores matemáticos.

El conocimiento de los contenidos matemáticos se refiere a la habilidad para entender un amplio rango de temas, pero de manera más importante, a la profundidad con la que se conocen y dominan tales temas. Esta característica del conocimiento matemático de los profesores es crucial en su actividad en el aula, pues influye de manera directa en lo que enseñan y en cómo lo enseñan, así como en el tipo de tareas y rutas de instrucción que proponen para orientar el aprendizaje de los estudiantes. Los profesores deben ser capaces de transformar el salón de clase en un lugar de práctica matemática, en el cual la colaboración, para construir conocimiento a partir de tareas matemáticas sustantivas, sea un elemento para que los estudiantes desarrollen un pensamiento matemático.

> Los maestros deben conocer la materia que enseñan. Ciertamente no puede haber algo más fundamental para la competencia del profesor. La razón es simple: los profesores quienes no dominan bien un tema muy probablemente no tendrán el conocimiento necesario para ayudar a los estudiantes a aprender ese tema. (Ball, Thames y Phelps, 2008, p. 404)

El conocimiento de la epistemología incluye el entendimiento de principios sicológicos básicos que se refieren a cómo aprenden los estudiantes; los profesores deben entender que los estudiantes construyen su conocimiento al darle significado a los conceptos a partir de sus conocimientos previos, así como de su relación con los objetos del mundo que les rodea. Los aspectos didácticos del conocimiento de los profesores se refieren a la forma en que implementan algunos principios sicológicos para enseñar de acuerdo con la concepción particular que sostengan sobre la naturaleza de las matemáticas y del aprendizaje (Harel, 1994).

Esta distinción de las tres componentes de conocimientos que debe incluir la formación de un profesor de matemáticas es únicamente con fines de exposición, pues de hecho, los contenidos matemáticos en el contexto escolar no pueden separarse de la epistemología y la didáctica; por el contrario, los tres elementos señalados se encuentran estrechamente estructurados para ayudar a entender la forma en que los procesos de generación de las ideas matemáticas se llevan a cabo en el aula; para comprender y abordar las dificultades a las que los estudiantes se enfrentan durante el aprendizaje de alguna idea matemática y la forma en que los estudiantes construyen su conocimiento matemático a través de la ejecución de tareas de instrucción.

Tareas de Aprendizaje y Formación Docente

¿Cuál es la importancia del diseño de actividades o tareas de instrucción? ¿Cuál es la relación de las tareas con el proceso de aprendizaje? ¿Cuál es la relevancia del diseño de tareas de instrucción en la formación y actualización profesional de los profesores de matemáticas? En una perspectiva de resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas, el conocimiento se construye a través de la acción que los estudiantes ejercen sobre los objetos del conocimiento durante el proceso de resolver problemas. En este contexto, las actividades de instrucción son el vehículo para que los estudiantes aprendan matemáticas. Por lo anterior, las actividades que se implementen en el salón de clase deben diseñarse de forma que den lugar a procesos inquisitivos de discusión y reflexión matemática que a su vez apoyen la construcción de un aprendizaje con entendimiento (Hiebert et al., 1997), de un aprendizaje en el que se de sentido a las ideas o conceptos matemáticos.

De acuerdo con Hiebert "entendemos algo si podemos ver cómo este algo se relaciona con otras cosas que conocemos" (op. cit., p. 4). Así, el objetivo de las tareas de aprendizaje es ayudar a que los estudiantes estructuren *redes conceptuales robustas* a través de las cuales puedan establecer conexiones entre diversos conceptos de una o diversas áreas de las matemáticas o entre conceptos matemáticos y de otras áreas del conocimiento.

> [Una red o estructura conceptual robusta] se manifiesta mediante la exhibición de diversas conexiones entre contenidos al abordar una situación problemática. Por ejemplo, discutir las soluciones enteras de la ecuación $x^2 = 2y^2$ puede llevar a concluir que $\sqrt{2}$ es irracional; por otro lado, modificando ligeramente esta ecuación se obtiene $x^2 - 2y^2 = 1$, cuyas soluciones llevan a una forma de aproximar $\sqrt{2}$. A la vez, esta ecuación se puede generalizar para estudiar la irracionalidad de la raíz cuadrada de cualquier número primo, *p*. La discusión de las soluciones de la ecuación $x^2 - py^2 = 1$, con *p* un primo, también puede llevar a establecer una relación con la teoría de fracciones continuadas, herramienta fundamental en diversas áreas de las matemáticas, tanto puras como aplicadas. (Barrera y Reyes, 2010, pp. 4-5)

Características de las Tareas de Aprendizaje

Con base en lo expresado con anterioridad, el diseño de tareas de instrucción constituye un elemento clave en la formación docente, ya que estas tareas son el medio para favorecer el proceso de construcción de conocimiento con entendimiento de los estudiantes. ¿Qué es una tarea de aprendizaje matemático? ¿Cuáles son las características de estas tareas? ¿Cómo diseñar tareas de aprendizaje matemático en las que el uso de la tecnología apoye el aprendizaje de las matemáticas? ¿Qué tipo de preguntas o dilemas pueden formular los estudiantes como resultado de utilizar sistemáticamente las herramientas tecnológicas en la ejecución de las tareas? ¿En qué medida las tecnologías digitales funcionan como una herramienta útil para que los estudiantes visualicen, exploren y construyan relaciones matemáticas durante sus experiencias de aprendizaje? ¿Qué competencias deben mostrar los diseñadores de tareas de aprendizaje matemático? ¿Cuáles principios teóricos pueden sustentar el diseño de las tareas de aprendizaje?

Para los fines que se persiguen en la presente discusión, una tarea de aprendizaje matemático debe considerar el conocimiento previo del estudiante y proveerle de elementos para el desarrollo de nuevos conceptos que se articulen con los ya existentes en su red conceptual. De forma más específica, una tarea de aprendizaje matemático tendrá los siguientes elementos: (i) un objetivo de aprendizaje, (ii) elementos matemáticos estructurados en torno al objetivo de aprendizaje, (iii) escenarios para ejecutar la tarea y, (iv) un proceso inquisitivo para desarrollarla (Barrera, 2009b).

El objetivo de aprendizaje. Es un enunciado en el que se establecen los elementos conceptuales a ser desarrollados y articulados durante la ejecución de la tarea.

Los elementos matemáticos estructurados por el objetivo de aprendizaje. En esta parte se identifican dos clases de elementos. Los externos a la actividad, también llamados recursos matemáticos, así como aquellos específicamente relacionados con el enunciado del problema.

Los escenarios para desarrollar la tarea. Por un escenario para desarrollar la tarea entenderemos un lugar físico provisto de los elementos apropiados para realizarla, así como una comunidad (compañeros, profesor) que permita al estudiante interactuar con sus miembros, con la finalidad de fomentar un proceso inquisitivo y de esta forma desarrollar los elementos que le ayuden a expresar o comunicar ideas matemáticas.

> Para que los estudiantes vean a la matemática como una actividad con sentido, necesitan aprenderlas en un salón de clase que sea un microcosmos de la cultura matemática es decir, clases donde los valores de las matemáticas como una disciplina se reflejen en la práctica cotidiana. (Schoenfeld, 1988; citado en Santos-Trigo, 1997, p. 3)

El proceso inquisitivo. Una componente importante al ejecutar una tarea de aprendizaje matemático consiste en formular preguntas o dilemas tendientes a articular los elementos matemáticos iniciales con aquellos que conduzcan a la consecución de lo planteado en el objetivo de aprendizaje y posibles extensiones. Durante el proceso inquisitivo, el tipo de preguntas o dilemas que se formulen darán lugar al surgimiento de diferentes trayectorias hipotéticas de aprendizaje (Simon y Tzur, 2004). Es importante mencionar que el proceso inquisitivo se ve ampliado significativamente con la incorporación de herramientas computacionales, como se ilustra en las tareas matemáticas que se proponen en este documento.

El diseño y puesta en práctica de las tareas de aprendizaje matemático suponen del profesor dos componentes esenciales. Por un lado, poseer conocimientos matemáticos que le permitan satisfacer sus necesidades instruccionales, es decir, que sus conocimientos sean apropiados para dar sentido a los procesos matemáticos involucrados en una tarea; que sea capaz de identificar relaciones matemáticas y apreciar conexiones e interpretaciones así como el uso de varios tipos de argumentos para validar y sustentar dichas relaciones (Davis y Simmt, 2006). Y por otro, conocer y reflexionar acerca de los procesos que tienen lugar durante el aprendizaje de las matemáticas.

¿De qué manera puede un profesor de matemáticas adquirir las competencias necesarias que le permitan diseñar tareas de aprendizaje matemático? ¿Quiénes deben participar en la formación y actualización de profesores de matemáticas? ¿En qué tipo de programas educativos deben participar los profesores de matemáticas en servicio para revisar y extender sus conocimientos matemáticos e incorporar los resultados de investigación a su práctica docente? ¿Qué experiencias de aprendizaje deben incluir esos programas educativos? Estas son algunas de las preguntas que deben ser consideradas al diseñar programas de formación y actualización de profesores de matemáticas tendientes a desarrollar las competencias requeridas para diseñar y poner en práctica tareas de instrucción. Sin lugar a dudas, los educadores matemáticos y los matemáticos debieran jugar un papel central en la formación y actualización de los docentes.

La función del profesor durante el desarrollo de las tareas. Su función consiste en guiar al estudiante: (a) en la ejecución de la tarea desde el punto de vista puramente matemático, ayudándole a formular preguntas que lo orienten en una ruta de aprendizaje y, (b) a conceptualizar las matemáticas como un modo de pensar crítico en el proceso de resolver problemas. La formulación de preguntas que orienten las rutas de aprendizaje tiene el objetivo de aportar elementos que lleven al desarrollo de un proceso inquisitivo, entendiéndose por esto, a la formulación sistemática de preguntas encaminadas a entender y proponer soluciones a una tarea; así como extender o generalizar el problema original para continuar con un nuevo ciclo de resolución de problemas (Santos-Trigo, 2007). Como señalan Ball y Bass (2003), "enseñar matemáticas involucra establecer conexiones a través de diferentes dominios matemáticos, ayudar a los estudiantes a construir ligas y coherencia en su conocimiento" (p. 12).

Tareas de Instrucción que Promueven el Uso Sistemático de Tecnologías Digitales

Las actividades que se presentan tienen un doble objetivo; por un lado, que los profesores identifiquen aquellos elementos que constituyen a una tarea de aprendizaje matemático, y de este modo caractericen algunos principios teóricos y prácticos que pueden apoyarlos en el diseño de sus propias tareas de instrucción; y por otro, que al abordar las tareas desarrollen una forma matemática de pensar, que les permita "desempacar" ideas matemáticas, procedimientos y principios (Ball y Bass, 2003). Es decir, las tareas se enfocan en la "promoción o construcción de formas particulares de pensamiento, más que en la adquisición de conceptos o habilidades específicas" (Harel, 1997, p. 117).

A través del desarrollo de cada una de las actividades se resalta la importancia del uso de las tecnologías digitales durante el proceso de formulación de conjeturas y de procedimientos para resolver problemas; así como la importancia de elaborar justificaciones deductivas de las conjeturas u observaciones.

División de áreas de polígonos convexos

El objetivo de esta actividad consiste en fortalecer el pensamiento geométrico de los profesores, entendiendo por éste a la capacidad para visualizar, describir y analizar, a través de técnicas inductivas y deductivas, una diversidad de formas y relaciones entre los atributos de configuraciones geométricas.

Dado un triángulo *ABC*, encontrar un punto *P* en su interior, de tal forma que el área de cada uno de los triángulos *ABP*, *BCP* y *CAP* sea la misma (Figura 1).

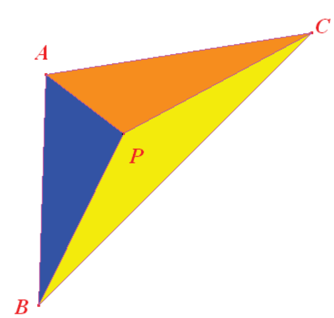


Figura 1: Entendimiento del problema.

Considerar casos particulares. Una estrategia para abordar el problema general consiste en considerar casos particulares que puedan ser más fáciles de resolver y que a la vez aporten elementos que permitan identificar estrategias generales. Por ejemplo considerar un triángulo equilátero, un triángulo isósceles o un triángulo rectángulo.

Triángulo equilátero. Se puede conjeturar que el circuncentro del triángulo es el punto *P* que satisface los requerimientos del problema. Se puede obtener evidencia de esta conjetura al utilizar la herramienta para medir áreas del software y verificar que los tres triángulos (*ABP*, *BCP* y *CAP*) tienen la misma área (Figura 2).

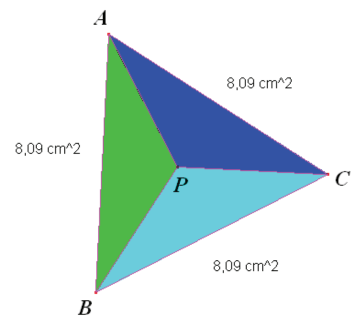


Figura 2: Explorando un triángulo equilátero.

En este caso se observa que el punto buscado se encuentra sobre una de las alturas del triángulo. ¿Puede ser de utilidad esta observación para abordar algún otro caso particular? Considérese ahora un triángulo isósceles *ABC*; se traza la altura que pasa por el vértice *A,* al que concurren los lados iguales, y sea *D* el pie de ésta.

Considérese ahora el triángulo *CBP*, con *P* un punto sobre el segmento *AD*. ¿Existe algún punto *P,* sobre *AD,* tal que el área del triángulo *CBP* sea igual a un tercio del área del triángulo *ABC*? Con el uso de un software dinámico se puede obtener evidencia de que ese punto existe (Figura 3). Además, se puede justificar la existencia de tal punto mediante un argumento de continuidad, pues cuando *P=D*, el área es cero, mientras que cuando *P=A*, las áreas coinciden.

Ahora hay que determinar la posición exacta del punto *P* de tal forma que sastisfaga las condiciones que se requieren.

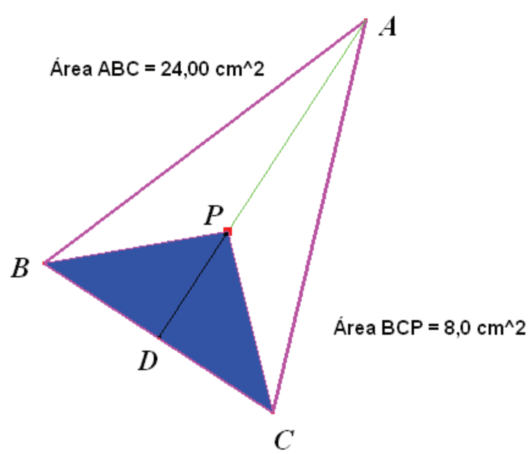


Figura 3: Caso particular de un triángulo isósceles.

El área del triángulo *ABC* (Figura 3) se puede calcular usando la fórmula, $\text{Área} = \dfrac{\overline{BC} \cdot \overline{DA}}{2}$; asimismo, el área del triángulo *BCP* es çrea $= \dfrac{\overline{BC} \cdot \overline{DP}}{2}$. Por lo tanto, para que el área del triángulo *BCP* sea un tercio del área del triángulo *ABC* se requiere que la altura *DP* sea un tercio de la altura *CA*. Con el uso del software se puede obtener evidencia de que los tres triángulos *ABP*, *BCP* y *CAP* tienen la misma área (Figura 4).

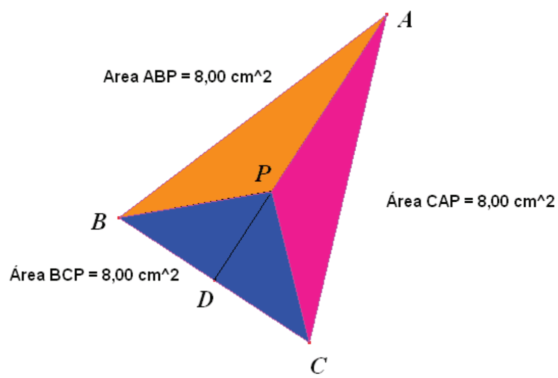


Figura 4: Evidencia numérica de la igualdad de áreas.

¿Es posible proporcionar una prueba formal de que el punto *P* satisface la condición requerida sobre los triángulos *ABP*, *BCP* y *CAP* en cuanto a tener la misma área? Por construcción, el área del triángulo *BCP* es igual a un tercio del área del triángulo *ABC*. Además, la recta *AD* es eje de simetría del triángulo *ABC*, entonces los triángulos *ABD* y *ACD* son congruentes, así mismo los triángulos *BDP* y *CPD* también lo son. Además, cada uno de los triángulos *BDP* y *CPD* tiene área igual a un sexto del área del triángulo *ABC*. Por lo tanto los triángulos *ABP* y *CAP* tienen la misma área y es igual a $\frac{1}{2}A(ABC) - \frac{1}{6}A(ABC)$, la cual es un tercio del área del triángulo *ABC*.

¿Puede generalizarse el procedimiento empleado con un triángulo isósceles a cualquier tipo de triángulo? Considérese un triángulo rectángulo, y trácese la altura que pasa por el vértice en donde el ángulo es recto (ya que en otro caso las alturas son los catetos y el punto *P* sería un punto en la frontera del triángulo y no en su interior). Localícese un punto *P*’ tal que la distancia *DP*’ sea igual a un tercio de la distancia *DA*. Este punto satisface que el área del triángulo *BCP*’ es un tercio del área del triángulo *ABC*. Con el uso del software dinámico se puede obtener evidencia de que *P*’ no es solución del problema (Figura 5).

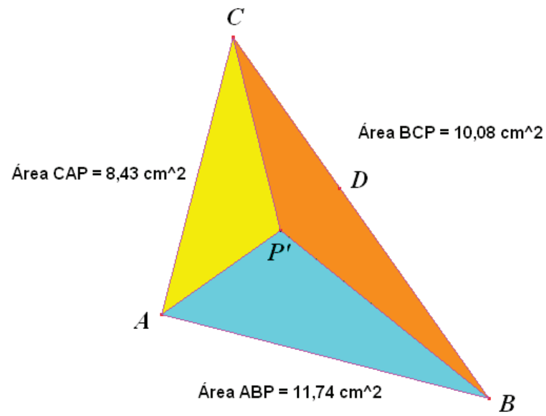


Figura 5: Uso del software para refutar una conjetura.

¿Es posible modificar el procedimiento anterior para encontrar un punto *P* que resuelva el problema? En la Figura 5, por construcción, se tiene que el área del triángulo *BCP'* es igual a un tercio del área del triángulo *ABC*. ¿Es posible variar la posición del punto P' de tal forma que el área del triángulo *BCP*' no cambie? Esto es posible siempre que el punto *P*' se mueva sobre una recta paralela al lado *BC* del triángulo (Figura 6), por lo que de existir un punto que sea solución del problema, debe encontrarse sobre esta recta paralela a *BC*

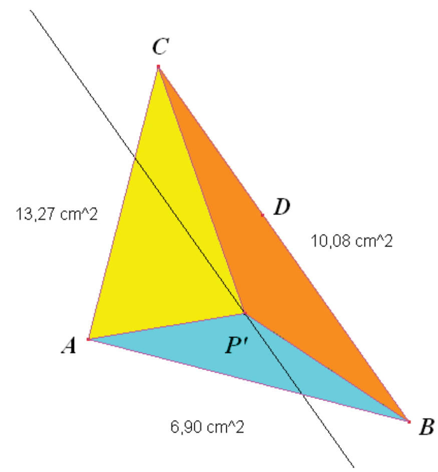


Figura 6: Trazo de triángulos de igual área.

El procedimiento empleado para construir el triángulo *BCP'* podría emplearse de forma análoga con algún otro de los lados del triángulo, es decir, trazar una recta paralela al lado *CA* de forma que la distancia entre este lado y la paralela sea igual a un tercio de la altura del triángulo *ABC* que pasa por el vértice *B*. El punto *P*, intersección de las paralelas a los lados *BC* y *CA* es solución al problema ya que si cada uno de los triángulos *BCP* y *CAP*, por construcción, tiene área igual a un tercio del área del triángulo *ABC*, entonces necesariamente el triángulo *ABP* tendrá también área igual a un tercio del área del triángulo *ABC* (Figura 7). El lector puede comprobar que el mismo procedimiento funciona para cualquier tipo de triángulo.

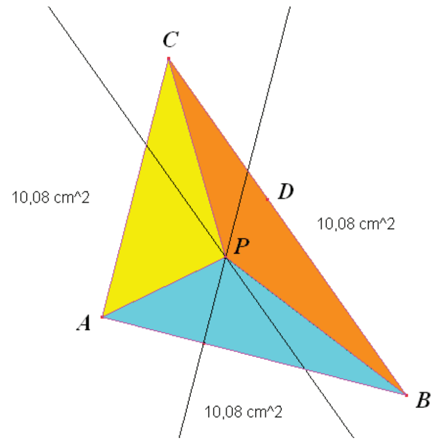
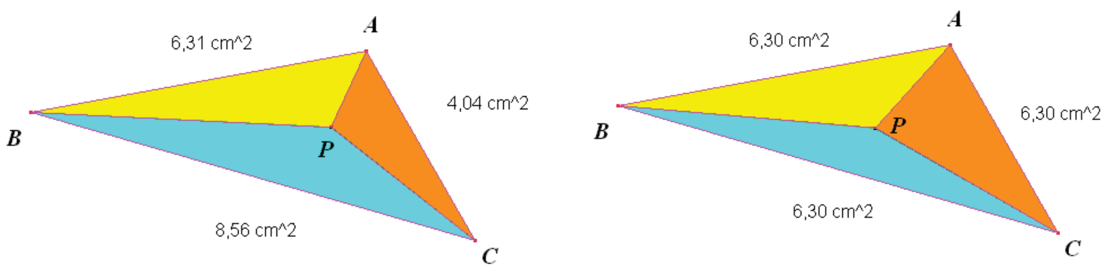


Figura 7: Justificando que el baricentro es solución del problema.

Otra forma de abordar el problema puede consistir en verificar si alguno de los puntos notables del triángulo (circuncentro, baricentro, ortocentro, incentro) satisface las condiciones de la solución del problema. Con el uso del software dinámico es posible trazar un triángulo cualquiera, encontrar los puntos notables y con el uso de las herramientas de medida del software obtener evidencia o refutar la conjetura en la que se establece que alguno de esos puntos es una solución del problema.

En el caso del ortocentro, al arrastrar los vértices del triángulo se puede notar que para algunos triángulos este punto queda fuera de éste, por lo que no es una opción válida para ser solución del problema general; lo mismo ocurre con el circuncentro. Veamos ahora que sucede con el incentro y el baricentro del triángulo.



(a) (b)

Figura 8: Área de los triángulos *ABP*, *BCP* y *CAP,* tales que *P* es: (a) el incentro del triángulo *ABC* y (b) el baricentro del triángulo *ABC*.

Por definición, el incentro es la intersección de las bisectrices de los ángulos del triángulo; las perpendiculares trazadas desde el incentro a cada uno de los lados son las alturas de los triángulos *APC*, *APB* y *BPC;* son todas iguales al radio de la circunferencia incrita en el triángulo *ABC,* de ahí que tienen la misma área si y solo si los lados son iguales, es decir, el único caso en que el punto *P*, igual al incentro, es solución, es cuando el triángulo es equilátero.

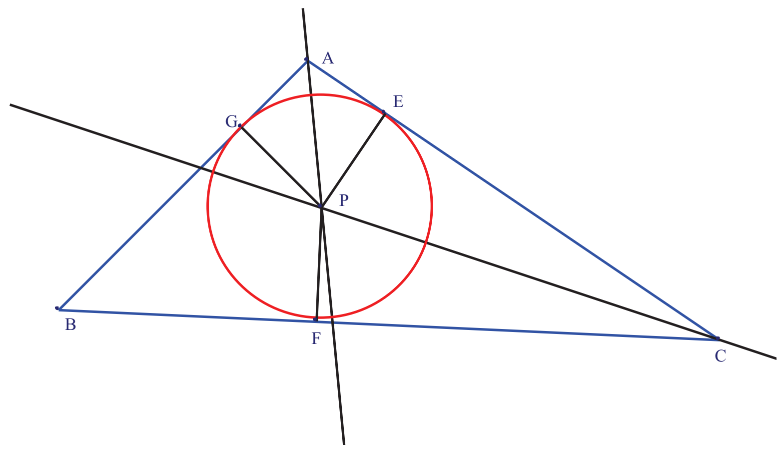


Figura 9: El incentro resuelve en el caso de triángulos equiláteros.

Con base en el uso de las herramientas de medida del software dinámico, se puede conjeturar que el baricentro del triángulo *ABC* es solución del problema. Sin embargo, es necesario presentar una demostración de la conjetura.

Una prueba geométrica se puede construir al considerar que la distancia del baricentro a un vértice del triángulo es el doble de la distancia al punto medio del lado opuesto correspondiente. Se traza una paralela, por ejemplo, al lado *BC* por *P*. Con base en el teorema de Tales se justifica que la altura del triángulo *BCP* que pasa por el vértice *P* es igual a un tercio de la altura del triángulo *ABC* que pasa por el vértice *A* y de ahí se concluye que el área del triángulo *BCP* es igual a un tercio del área del triángulo *ABC* (Figura 10). Aplique un procedimiento análogo a los triángulos *ABP* y *CAP* para concluir que los triángulos *ABP*, *BCP* y *CAP* tienen la misma área.

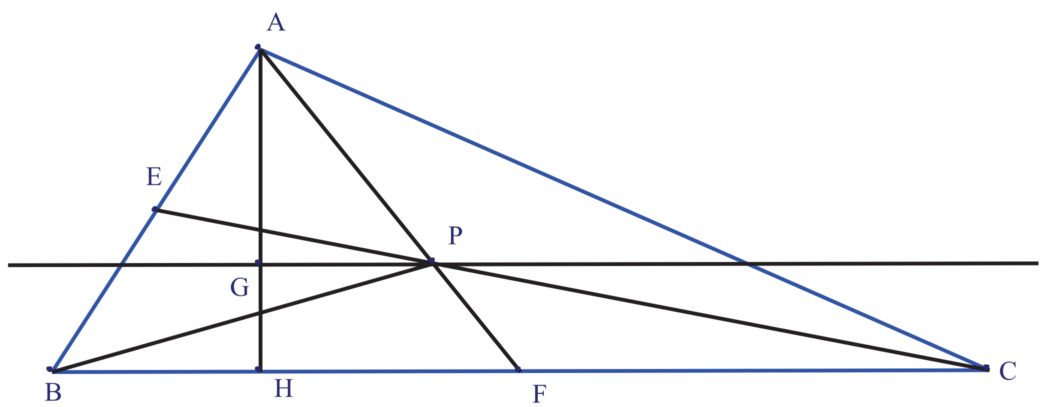


Figura 10: Aplicación del Teorema de Tales a los segmentos *AH* y *AF*.

Para elaborar una prueba algebraica del mismo resultado se puede utilizar el hecho de que una mediana del triángulo *ABC* divide a éste en dos triángulos de igual área. En la Figura 11, *P* es el baricentro del triángulo *ABC* y M_1, M_2 y M_3 son puntos medios de los lados *AB*, *BC* y *CA*, respectivamente, de ahí que el área del triángulo BCM_1 es igual a la del triángulo CAM_1. Con esta notación, el triángulo *ABC* queda dividido en seis regiones cuyas áreas las denotamos por: a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6. Con base en lo observado antes, se tiene $a_2 + a_3 + a_4 = a_5 + a_6 + a_1$. Al considerar las otras dos medianas se pueden obtener ecuaciones análogas. Además hay que notar que $a_1 = a_2$ ya que los triángulos a los que corresponden dichas áreas tienen bases y alturas de la misma longitud, por lo tanto sus áreas son iguales, lo mismo se deduce para a_3 y a_4 así como para a_5 y a_6. Al operar las ecuaciones anteriores, se puede concluir que $a_1 = a_2 = \cdots = a_6$.

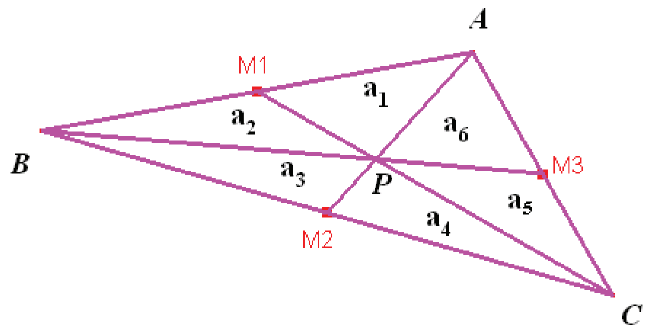


Figura 11: Las áreas $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ son iguales.

Un aspecto importante en el desarrollo del pensamiento matemático consiste en extender o generalizar un problema. En este caso las siguientes preguntas tienen por finalidad estudiar el caso de un cuadrilátero. Dado un cuadrilátero *ABCD*, ¿existe un punto *P* en su interior tal que a partir de este se formen los triángulos *ABP*, *BCP*, *CDP* y *DAP,* con la misma área? ¿Qué es el baricentro de un cuadrilátero *ABCD*? ¿Cómo se construye el baricentro de un cuadrilátero *ABCD*? ¿El baricentro del cuadrilátero *ABCD* es el punto que soluciona el problema, como en el caso del triángulo? Si el baricentro resuelve el problema del cuadrilátero ¿cuál es la razón?, si no lo resuelve cabe preguntarse si el problema puede resolverse en general o sólo es posible encontrar una solución para cuadriláteros particulares.

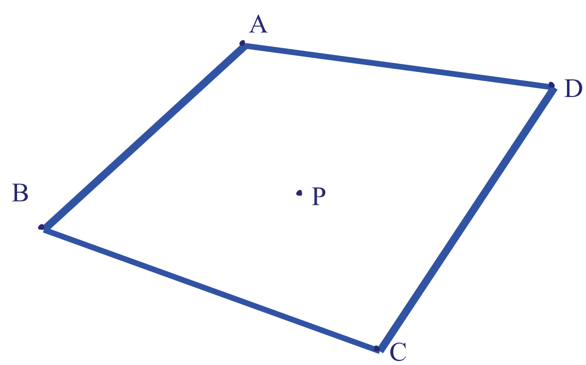


Figura 12: Buscando un punto P que divida al cuadrilátero en cuatro triángulos de igual área.

Criterios de divisibilidad

El objetivo fundamental de esta actividad consiste en aportar elementos que ayuden a los profesores a fortalecer el sentido numérico, entendiendo este como la habilidad para identificar propiedades de divisibilidad entre números enteros, usar propiedades de los números primos para resolver preguntas aritméticas, usar relaciones entre las operaciones en los enteros para resolver problemas, entender y usar la representación en base 10 de los enteros para contestar preguntas de tipo aritmético, estimar, dar sentido a los números y reconocer sus magnitudes relativas y absolutas, esto último de acuerdo con Sowder (1992; citado en NCTM, 2000, p. 31).

En el espíritu del estándar, *números y operaciones* (NCTM, 2000), los estudiantes de nivel medio superior deben desarrollar un entendimiento profundo de los números y sus operaciones, así como contrastar las propiedades de los números y los sistemas numéricos. En esta misma línea de ideas, Silverman (2006) argumenta: "Los años 1990 vieron una oleada con la reforma del cálculo, cuyo propósito es enseñar a los estudiantes a pensar por ellos mismos y a resolver problemas sustanciales, en lugar de solamente memorizar fórmulas y aplicar manipulaciones algebraicas… nuestro tema elegido, *Teoría de Números,* es particularmente apropiado para lograr esos propósitos" (Ibíd., p. v).

Tomando como punto de partida los elementos mencionados, hemos elegido hacer una discusión de algunos criterios de divisibilidad, con la finalidad de aportar elementos que ayuden a los profesores a construir una estructura conceptual robusta, que les permita diseñar actividades de aprendizaje a través de las cuales los estudiantes puedan desarrollar un entendimiento profundo de los números y sus operaciones.

Una de las preguntas más importantes y a la vez de difícil respuesta en teoría de números, es: dado un número entero $n \geq 2$, ¿se puede decidir si es primo o compuesto? Por ejemplo, ¿es primo el número n = 1010101010101010101? Claramente n no es divisible entre dos, pues el dígito de las unidades es impar. ¿Cómo saber si n es divisible entre tres o en general entre algún otro primo menor que n?

Posiblemente se conoce el criterio de divisibilidad entre tres, el cual establece: *un número es divisible entre tres, si y sólo si la suma de sus dígitos es divisible entre tres*. Usando este criterio se concluye de manera directa que n no es divisible entre 3.

Un elemento fundamental del pensamiento matemático consiste en proporcionar argumentos en la discusión de un problema; en esta línea de ideas surge la pregunta. ¿Cuál es la justificación de este criterio de divisibilidad? Si el número tiene solamente tres dígitos, digamos $n = abc$, se debe justificar la razón por la cual, si tres divide a $a+b+c$, entonces 3 divide a n. En base 10, la representación del número $n = abc$ significa que $n = abc = a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c$. Esta representación se puede escribir en la forma:

$$n = abc := a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c = a + 99a + b + 9b + c = (a+b+c) + 99a + 9b .$$

Se tiene que $99a + 9b = 9(11a + b)$ y claramente este número es divisible entre 3; ahora, si $a+b+c$es divisible entre 3, entonces $(a+b+c)+99a+9b$ también es divisible entre 3, probando con esto que si 3 divide a la suma de los dígitos de n, entonces 3 lo divide. Recíprocamente, si 3 divide a $n = abc$, entonces 3 divide a $n - 99a - 9b = a + b + c$, con lo cual queda justificado el criterio de divisibilidad por tres, para números de tres dígitos. Si el número n tiene k dígitos, digamos:

$$n = a_{k-1}a_{k-2}\cdots a_0 = a_{k-1}10^{k-1} + a_{k-2}10^{k-2} + \cdots + a_1 10 + a_0,$$

entonces n se puede representar en la forma:

$$n = (a_{k-1} + a_{k-2} + \cdots a_1 + a_0) + a_{k-1}\left(10^{k-1} - 1\right) + a_{k-2}\left(10^{k-2} - 1\right) + \cdots + a_1 (10 - 1).$$

Notamos que el factor de a_i es $10^i - 1$ y que este factor es divisible entre 3 para todo $i \geq 0$. Por ejemplo, para $i = 1, 2$, el correspondiente factor es 9 y 99, respectivamente, los cuales son divisibles entre 3, de hecho entre 9. La explicación de esto se tiene al factorizar a $10^i - 1$ en la forma $10^i - 1 = (10-1)(10^{i-1} + 10^{i-2} + \cdots + 1)$. Dado que 9 divide a cada factor $10^i - 1$, entonces 9 divide a $a_{k-1}(10^{k-1} - 1) + a_{k-2}(10^{k-2} - 1) + \cdots + a_1(10-1)$. Otra forma de justificar lo anterior es notar que los dígitos de $10^i - 1$ son todos iguales a 9, y esto claramente garantiza que es divisible entre 3. Recíprocamente, si 3 divide al número $(a_{k-1} + a_{k-2} + \cdots + a_1 + a_0)$, entonces 3 divide a la suma de este con otro que sea divisible entre 3; como 3 divide a cada sumando de la forma $a_i(10^i - 1)$, entonces divide a

$$n = (a_{k-1} + a_{k-2} + \cdots + a_1 + a_0) + a_{k-1}(10^{k-1} - 1) + a_{k-2}(10^{k-2} - 1) + \cdots + a_1(10-1).$$

Recíprocamente, si 3 divide a

$$n = (a_{k-1} + a_{k-2} + \cdots a_1 + a_0) + a_{k-1}(10^{k-1} - 1) + a_{k-2}(10^{k-2} - 1) + \cdots + a_1(10-1),$$

entonces divide a $n - a_{k-1}(10^{k-1} - 1) - a_{k-2}(10^{k-2} - 1) - \cdots - a_1(10-1) = a_{k-1} + \cdots + a_0$.

El criterio de divisibilidad entre 9 es similar al criterio de divisibilidad entre 3: *un número es divisible entre nueve, si y sólo si la suma de sus dígitos es divisible entre nueve.* La prueba del resultado es análoga a la desarrollada para divisibilidad entre 3 y se deja como ejercicio para el lector.

La representación de un entero en base 10 ha sido de utilidad para justificar el criterio de divisibilidad entre 3, esta misma idea puede ayudar ha contestar si *n*=101010101010101010101 es primo o compuesto. Haciendo uso de la representación en base 10 se tiene: $101010101010101010101 = 1 + 10^2 + 10^4 + \cdots + 10^{20} = \dfrac{10^{22} - 1}{10^2 - 1}$. Por otro lado, el numerador de esta última fracción se puede factorizar en la forma $10^{22} - 1 = (10^{11} + 1)(10^{11} - 1)$; de esto concluimos que el cociente $\dfrac{10^{22} - 1}{10^2 - 1}$ tiene al menos dos factores mayores que 1, por lo que 101010101010101010101 no es primo.

Usando la representación de un número en base 10 se puede intentar obtener otros criterios de divisibilidad. Una pequeña modificación en la discusión anterior proporciona un criterio para divisibilidad entre 11. Para esto notemos que si un entero se representa en la forma

$$n = a_{k-1}a_{k-2}\cdots a_0 = a_{k-1}10^{k-1} + a_{k-2}10^{k-2} + \cdots + a_1 10 + a_0$$

entonces se puede escribir como

$$\begin{aligned} n &= a_{k-1}10^{k-1} + a_{k-2}10^{k-2} + \cdots + a_1 10 + a_0 \\ &= a_0 - a_1 + a_2 + \cdots + (-1)^{k-1} a_{k-1} + 11a_1 + 99a_2 + \cdots \end{aligned}$$

Notemos que en la representación anterior, el segundo bloque de sumandos consiste de aquellos de la forma $a_i(10^i \pm 1)$, de manera más precisa, el signo + aparece exactamente cuando *i* es impar y parece que cada uno de ellos es divisible entre 11. ¿Cómo justificar esta observación? Notemos que el factor $(10^i \pm 1)$ puede ser considerado como suma o diferencia de k-ésimas potencias. ¿Cómo se factoriza $\left(a^k \pm b^k\right)$? Procederemos al análisis dividiendo en casos: si k es impar, y si k es par.

¿Cuál es el resultado de factorizar la expresión $a^k + b^k$ para k un entero positivo impar? Con el uso de un CAS (**C**omputer **A**lgebra **S**ystem) se pueden considerar varios casos particulares y tratar de identificar algún patrón.

#1: $a^3 + b^3$

#2: $(a + b)\cdot(a^2 - a\cdot b + b^2)$

#3: $a^5 + b^5$

#4: $(a + b)\cdot(a^4 - a^3\cdot b + a^2\cdot b^2 - a\cdot b^3 + b^4)$

#5: $a^7 + b^7$

#6: $(a + b)\cdot(a^6 - a^5\cdot b + a^4\cdot b^2 - a^3\cdot b^3 + a^2\cdot b^4 - a\cdot b^5 + b^6)$

#7: $a^9 + b^9$

#8: $(a + b)\cdot(a^2 - a\cdot b + b^2)\cdot(a^6 - a^3\cdot b^3 + b^6)$

#9: $(a + b)\cdot(a^8 - a^7\cdot b + a^6\cdot b^2 - a^5\cdot b^3 + a^4\cdot b^4 - a^3\cdot b^5 + a^2\cdot b^6 - a\cdot b^7 + b^8)$

#10: $a^{11} + b^{11}$

#11: $(a + b)\cdot(a^{10} - a^9\cdot b + a^8\cdot b^2 - a^7\cdot b^3 + a^6\cdot b^4 - a^5\cdot b^5 + a^4\cdot b^6 - a^3\cdot b^7 + a^2\cdot b^8 - a\cdot b^9 + b^{10})$

Figura 13: Uso de un CAS en la búsqueda de patrones.

Con base en la información de la Figura 13, es posible conjeturar que para k impar, la expresión $a^k + b^k$ se puede factorizar como:

$$\left(a^k + b^k\right) = (a+b)(a^{k-1} - a^{k-2}b + a^{k-3}b^2 + \cdots + (-1)^{k-i}a^{k-i}b^{i-1} + \cdots + b^{k-1}),$$

Esta igualdad se puede verificar desarrollando el producto de la derecha.

De esto se tiene, haciendo $a = 10$ y $b = 1$, que $10^k + 1 = 10^k + 1^k$ se puede factorizar como:

$$\left(10^k + 1\right) = (10+1)(10^{k-1} - 10^{k-2} + \cdots + (-1)^{k-i}10^{k-i} + \cdots + 1),$$

que claramente es divisible entre 11 para k impar.

Si k es par, podemos factorizarlo en la forma $k = 2^e m$, para algún entero $e \geq 1$ y m entero positivo impar. Mostraremos que $a+b$ divide a $a^k - b^k$. Usando la representación de k

$$a^k - b^k = a^{2^e m} - b^{2^e m} = \left(a^{2^{e-1}m} + b^{2^{e-1}m}\right)\left(a^{2^{e-1}m} - b^{2^{e-1}m}\right).$$

Si $e = 1$, el factor de la izquierda se reduce a $a^m + b^m$; como m es impar, por lo demostrado antes, $a+b$ es uno de sus factores y de esto se tiene que $a+b$ es factor de $a^k - b^k$. Si $e > 1$, el proceso se repite en el factor $\left(a^{2^{e-1}m} - b^{2^{e-1}m}\right)$ hasta que el exponente de 2 sea uno y nuevamente se invoca el caso m impar. Nuevamente, haciendo $a = 10$ y $b = 1$ se concluye que 11 divide a $10^k - 1$ para k par.

De esta discusión hemos demostrado que 11 divide al segundo bloque de sumandos en

$$\begin{aligned} n &= a_{k-1}10^{k-1} + a_{k-2}10^{k-2} + \cdots + a_1 10 + a_0 \\ &= a_0 - a_1 + a_2 + \cdots + (-1)^{k-1} a_{k-1} + 11a_1 + 99a_2 + \cdots \end{aligned}$$

Por lo que 11 divide a n si y solo si, 11 divide a $a_0 - a_1 + a_2 + \cdots + (-1)^{k-1} a_{k-1}$.

Ejemplo. Decidir si 11 divide a n=1 358 016. Aplicando el criterio, calculamos 6-1+0-8+5-3+1 que es cero, concluyendo que 11 si lo divide.

El resultado que hemos probado proporciona más información; en caso de que 11 no divida a n, el residuo que deja la división es igual al residuo que se obtiene al dividir $a_0 - a_1 + a_2 + \cdots + (-1)^{k-1} a_{k-1}$ entre 11.

Los criterios de divisibilidad entre 2 y 5 son de los más fáciles de aplicar, lo cual se debe a que, al representar un entero n en base 10, digamos

$$n = a_{k-1}a_{k-2}\cdots a_0 = a_{k-1}10^{k-1} + a_{k-2}10^{k-2} + \cdots + a_1 10 + a_0,$$

todos los sumandos, excepto el de las unidades, tienen de factor al 2 y al 5, por lo cual, n es divisible entre 2 o 5 si y solo si el dígito de las unidades es divisible entre 2 o 5.

Tomando esta observación en cuenta, las hipótesis que siguen sobre un entero m, son naturales.

Teorema 1. Sea m>1 un entero que no tiene de factores al 2 y al 5, entonces existe un entero positivo k mínimo, tal que m divide a $10^k - 1$.

Demostración. Como m y 10 son primos relativos, entonces para todo n entero positivo, al dividir 10^n entre m deja residuo diferente de cero. Los residuos de la división por m son $0, 1, 2, \ldots, (m-1)$, entonces existen n y l enteros positivos diferentes tales que $10^n = qm + r$ y $10^l = q_1 m + r$, para algunos enteros q y q_1. De estas ecuaciones se obtiene $10^n - qm = 10^l - q_1 m$. Como n y l son diferentes, entonces uno es mayor que el otro; supongamos por ejemplo que *n>l,* entonces de la ecuación anterior se llega a

$10^l\left(10^{n-l} - 1\right) = m(q - q_1)$. Como m y 10 son primos relativos, entonces necesariamente m divide a $10^{n-l} - 1$. Tome el menor exponente de 10 que cumple la condición.

Teorema 2. Sean m y k como en el teorema anterior. Pongamos $r = 10^k$ y representemos a un entero N en base r, es decir, sea $N = \sum_{i=0}^{l} a_i r^i$, $0 \le a_i < r$ para todo i desde 1 hasta l.

Entonces m divide a N si y solo si m divide a $(a_l + a_{l-1} + \cdots + a_1 + a_0)$.

La demostración del Teorema 2 sigue las mismas líneas que la demostración del criterio de divisibilidad entre 9 y usa el hecho de que m divide a $10^k - 1$ y éste divide a $r^i - 1$.

En lo que sigue presentamos otro criterio de divisibilidad que sigue líneas diferentes. Este criterio lo justificamos cuando un estudiante mencionó conocer un procedimiento para establecer la divisibilidad entre 7, pero no sabía porqué funcionaba. Deseamos determinar si 8 642 046 es divisible entre 7; para responder usamos el criterio siguiente:

La cifra de las unidades del número, en este caso el 6, se multiplica por dos y el resultado se resta del número que se obtiene del original "suprimiendo" las unidades (el resultado que se obtiene al suprimir 6 es 864 204). Traducido a símbolos se tiene 864204 - 2(6)= 864 192. Ahora el mismo procedimiento se aplica al nuevo número (864 192). Este proceso se repite hasta obtener un número en el que sea "fácil" saber si es divisible o no entre 7 (ver Figura 14). El último resultado que se ha obtenido es cero, el cual es divisible entre 7. Notemos que el proceso pudo haberse detenido cuando se obtuvo el 84, que es divisible entre 7.

```
 8   6   4   2   0   4 | 6
                -(1  2)|
 8   6   4   1   9 | 2
               (-4)|
 8   6   4   1 | 5
       (-1  0) |
 8   6   3 | 1
       (-2)|
 8   6 | 1
   (-2)
 8 | 4
(-8)|
 0
```

Figura 14: Aplicación del criterio para divisibilidad entre 7.

La fundamentación de este criterio se aplica a cualquier primo diferente de 2 y 5. En la justificación del criterio será necesario el siguiente resultado.

Lema. Sea p un primo diferente de 2 y 5, entonces existen enteros positivos l y k tales que $10l+1=kp$.

Demostración. Aplicando el algoritmo de la división a p y 10 se tiene que existen enteros q y r tales que $p=10q+r$, con $0 \leq r < 10$. Como p es primo, los posibles valores de r son 1, 3, 7 y 9. Si r=1, tomamos l=q y k=1; si r=3, entonces $p=10q+3$. Multiplicando esta ecuación por 7 y agrupando se tiene $7p=10(7q+2)+1$; tomamos $l=7q+2$ y k=7. Si r=7, entonces $p=10q+7$, multiplicando por 3 esta ecuación y agrupando se tiene $3p=10(3q+2)+1$. Tomamos $l=3q+2$ y k=3. Si r=9, entonces $p=10q+9$; multiplicando por 9 y agrupando se tiene $9p=10(9q+8)+1$. Tomamos $l=9q+8$ y k=9. Con esto se ha terminado la prueba del lema.

Dado que el valor de l es muy importante en la aplicación del criterio de divisibilidad, y depende de p, lo escribimos en la siguiente forma.

$$l_p = \begin{cases} \dfrac{p-1}{10} & \text{si } p \equiv 1 \bmod 10 \\ \dfrac{7p-1}{10} & \text{si } p \equiv 3 \bmod 10 \\ \dfrac{3p-1}{10} & \text{si } p \equiv 7 \bmod 10 \\ \dfrac{9p-1}{10} & \text{si } p \equiv 9 \bmod 10 \end{cases} \qquad (*)$$

Teorema. Sea *n* un entero positivo representado en la forma $n = 10r_n + u_n$, con $0 \leq u_n < 10$ y *p* un primo diferente de 2 y 5. Entonces existe un *l* tal que: (a) el primo *p* divide a $10l+1$; (b) *p* divide a *n* sí y solo sí *p* divide a $r_n - lu_n$.

Demostración. El inciso (a) es justamente el lema anterior; para probar la parte (b), declaramos $m = r_n - lu_n$, entonces despejando r_n y sustituyendo en la ecuación que expresa a *n*, obtenemos $n = 10\left(m + lu_n\right) + u_n = 10m + \left(10l+1\right)u_n$. Por el inciso (a) sabemos que *p* divide a $10l+1$, entonces *p* divide a *n* si y solo si *p* divide a $10m$, como *p* y 10 son primos relativos, *p* divide a *n* si y solo si *p* divide a $m = r_n - lu_n$.

Ejemplos. En la aplicación del criterio, se debe determinar el valor de *l* de acuerdo con la ecuación (*). Por ejemplo, si $p = 13$, el valor de l_{13} es: $l_{13} = \frac{7(13)-1}{10} = \frac{90}{10} = 9$. Si $p = 23$, entonces $l_{23} = \frac{7\left(23\right)-1}{10} = \frac{161-1}{10} = 16$.

1. Decidir si 23 divide a 287 476 123.

En primer término se calcula l_{23}, el cual es igual a 16 por lo mencionado en el párrafo previo. La cifra de las unidades del número, en este caso el 3, se multiplica por 16 y el resultado se resta del número que se obtiene del original "suprimiendo" las unidades (el resultado que se obtiene al suprimir 3 es 28 747 612). Traducido a símbolos se tiene 28747612- 16(3)= 28 747 564. Ahora el mismo procedimiento se aplica al nuevo número (28 747 564). Este proceso se repite hasta obtener un número en el que sea "fácil" decidir si es divisible o no entre 23 (ver Figura 15). El último resultado que se ha obtenido es 172, el cual no es divisible entre 23. Por lo tanto, el número original tampoco es divisible entre 23.

2	8	7	4	7	6	1	2	3
						-(4	8)	
2	8	7	4	7	5	6	4	
					-(6	4)		
2	8	7	4	6	9	2		
				-(3	2)			
2	8	7	4	3	7			
		-(1	1	2)				
2	8	6	3	1				
		-(1	6)					
2	8	4	7					
-(1	1	2)						
1	7	2						

Figura 15: Aplicación del criterio para divisibilidad entre 23.

2. Decidir si 602 468 38 037 es divisible entre 11

En primer lugar calculamos $l_{11} = \frac{11-1}{10} = \frac{10}{10} = 1$. La cifra de las unidades del número, en este caso el 7, se multiplica por uno y el resultado se resta del número que se obtiene del original "suprimiendo" las unidades (el resultado que se obtiene al suprimir 7 es 6024683803). Traducido a símbolos se tiene 6024683803 - 1(7)= 6 024 683 796. Ahora el mismo procedimiento se aplica al nuevo número (6 024 683 796). Este proceso se repite hasta obtener un número en el que sea "fácil" saber si es divisible o no por 11 (ver Figura 16). El último resultado que se ha obtenido es 1, el cual no es divisible entre 11. Notemos que el proceso pudo haberse detenido cuando se obtuvo el 54, que no es divisible entre 11.

6	0	2	4	6	8	3	8	0	3	7
									-7	
6	0	2	4	6	8	3	7	9	6	
								-6		
6	0	2	4	6	8	3	7	3		
							-3			
6	0	2	4	6	8	3	4			
						-4				
6	0	2	4	6	7	9				
					-9					
6	0	2	4	5	8					
				-8						
6	0	2	3	7						
			-7							
6	0	1	6							
		-6								
5	9	5								
	-5									
5	4									
-4										
1										

Figura 16: Aplicación del criterio de divisibilidad entre 11.

Los criterios para divisibilidad entre 9 y 11 son muy fáciles de recordar y de aplicar, además de tener algunas propiedades interesantes, por ejemplo, al aplicar el criterio de divisibilidad entre 9, a un número *n*, y posteriormente a la suma de sus dígitos hasta obtener una cifra, ésta última es igual al residuo que resulta de dividir *n* entre 9. Por ejemplo, apliquemos el criterio de divisibilidad entre 9 al número 47 893 425, la suma de sus dígitos es 42, al sumar 4+2 obtenemos el número 6 que es el residuo de la división $\frac{47893425}{9}$.

Otro ejemplo, la suma de los dígitos del número 5 673 412 856 es 47, al sumar 4+7 obtenemos el número 11, y nuevamente al sumar 1+1 obtenemos el número 2, que es el residuo que resulta del cociente $\frac{5673412856}{9}$.

Algo similar ocurre al aplicar el criterio de divisibilidad entre 11. Por ejemplo, considérese el número 3 475 468 923, al sumar los dígitos, iniciando por las unidades con signos alternados se tiene como resultado $3-2+9-8+6-4+5-7+4-3=3$, el cual es el residuo de la división $\frac{3475468923}{11}$.

Agradecimientos

El primer autor Agradece al CONACYT el apoyo recibido, a través del proyecto de investigación con número de referencia 61996, para la realización de este material.

Referencias

Avilés, K. (2009, Septiembre 8). En los dos niveles más bajos de matemáticas, 81.2% de los alumnos de Bachillerato. *La Jornada*, p. 41.

Ball, D. L, Thames, M. H. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*, 389-407.

Ball, D. L., & Bass, H. (2003). Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. In B. Davis & E. Simmt (Eds.), *Proceedings of the 2002 Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group* (pp. 3-14). Edmonton, AB: CMESG/GCEDM.

Barrera, F. (2009a, Diciembre 9). *El aprovechamiento de los estudiantes y su relación con los conocimientos de los profesores*. El Independiente de Hidalgo.

Barrera, F. (2009b). Reporte de la segunda fase del proyecto “Bases teóricas y conceptuales en la construcción del conocimiento matemático y el empleo de herramientas digitales”. Informe del proyecto financiado por Conacyt con número de referencia 61996. Pachuca, Hidalgo.

Barrera, F. y Reyes, A. (2010). Curso: Pensamiento Matemático, Resolución de Problemas y Formación Docente. Pachuca, Hidalgo: Centro Universitario de Formación (UAEH).

Davis, B. & Simmt, E. (2006). Mathematics-for-teaching: An ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 293-319.

Fernández-Vega, C. (2009, Agosto 26). México SA. *La Jornada*. Recuperado de http://www.jornada.unam.mx/2009/08/26/index.php?section=opinion&article=028o1eco, el 18 de Junio de 2010.

Harel, G. & Lim, H. K. (2004). Mathematics teachers’ knowledge base: Preliminary results. En M. J. Hoines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 25-32). Bergen, Norway: PME.

Harel, G. (1994). On teacher education programmes in mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 25*(1), 113-119.

Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K. C., Wearne, D., Murray, H., Olivier, A., & Human, P. (1997). *Making sense: teaching and learning mathematics with understanding*. Portsmouth: NH: Heinemann.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Olivares-Alonso, E. (2009, Enero 28). Sin título, 40% de maestros de bachillerato público; emprenderá la SEP programas de formación docente. La Jornada. Recuperado de http://www.jornada.unam.mx/2009/01/28/index.php?section=sociedad&article=045n1so, el 18 de junio de 2010.

Poy, L. (2009, Diciembre 30). Creará UAM centro especializado ante bajos resultados de matemáticas. *La Jornada*, p. 25.

Santos-Trigo, M. (2007). Mathematical problem solving: an evolving research and practice domain. *ZDM, 39*, 523-536.

Santos-Trigo, M. (2008). Sobre la construcción de una comunidad de práctica en la resolución de problemas. En F. Barrera, et al. (Eds.), *Memorias del Segundo Seminario Nacional sobre Resolución de Problemas y el Aprendizaje de las Matemáticas* (pp. 133-144). Pachuca, Hidalgo.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1-22.

Silverman, J. H. (2006). *A friendly introduction to number theory*. Pearson Prentice Hall, third edition.

Simon, M. A. & Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: An elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 91-104.

Sowder J. T. (2007). The mathematical education and development of teachers. In F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 167-224). Charlotte, NC: Information Age Publishing.