Raíces Cuadradas y Uso de Tecnología en el Aprendizaje de Matemáticas

F. Barrera Mora (1), A. Reyes Rodríguez (2)

(1) *Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo*
Área Académica de Matemáticas y Física
Carretera Pachuca-Tulancingo Km. 4.5, Col. Carboneras
Mineral de la Reforma, Hidalgo, México. C. P. 42184
barrera@uaeh.edu.mx

(2) *Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo*
Área Académica de Matemáticas y Física
Carretera Pachuca-Tulancingo Km. 4.5, Col. Carboneras
Mineral de la Reforma, Hidalgo, México, C. P. 42184
aaronr@uaeh.edu.mx

***Resumen*—En este artículo se documenta y analiza la forma en que el uso de tecnologías digitales tales como una hoja electrónica de cálculo y un sistema de álgebra computacional, puede apoyar la enseñanza del concepto de irracionalidad en los primeros semestres de licenciatura. Los resultados indican que el uso de las herramientas computacionales permitió el desarrollo de diversos elementos del pensamiento matemático, y el establecimiento de conexiones entre la irracionalidad de raíces de números primos, así como la discusión de contenidos y métodos, tales como la ecuación de Pell y ecuaciones en diferencias. También se obtuvo evidencia de que las observaciones e ideas de los estudiantes, expresadas durante el desarrollo de tareas, pueden ser el punto de partida para que el profesor diseñe o modifique rutas de instrucción que favorezcan un aprendizaje con entendimiento.**

Palabras clave—Pensamiento Matemático, Rutas de Instrucción, Tecnologías Digitales, Aprendizaje con entendimiento, Irracionalidad.

I. INTRODUCCIÓN

En algunos cursos de cálculo de licenciaturas en matemáticas y física o de algunas ingenierías, uno de los primeros tópicos que se aborda es el análisis del sistema de los números reales; en este se incluye el estudio de la irracionalidad de algunos números. Uno de los ejemplos más importantes, por su relativa simplicidad y relevancia histórica es $\sqrt{2}$, cuyo descubrimiento causó asombro y confusión entre los Pitagóricos, quienes pensaban que los números enteros eran la causa de diversas cualidades de la materia y el hombre [1]. Además, actualmente aún hay investigadores en teoría de números interesados en revisar el significado geométrico de este número [2].

En diferentes libros de texto, la irracionalidad de $\sqrt{2}$ se prueba, generalmente, mediante un argumento por contradicción, el cual era conocido por los griegos [3], [4]. Sin embargo, en diferentes trabajos de investigación en educación matemática se reporta que esta forma de abordar el concepto resulta difícil de comprender para la mayoría de los estudiantes [5].

En este contexto, resulta relevante preguntar: ¿es posible desarrollar rutas de instrucción para analizar la irracionalidad de $\sqrt{2}$, de forma que los estudiantes obtengan una mejor comprensión de ésta? ¿En qué medida el uso de herramientas computacionales puede apoyar la discusión y análisis de la irracionalidad de $\sqrt{2}$?

El objetivo de este estudio consiste en proporcionar algunos elementos que permitan responder a las preguntas anteriores, mediante el análisis de una ruta de instrucción basada en la búsqueda de soluciones enteras de la ecuación $x^2 = 2y^2$.

II. MARCO CONCEPTUAL

El marco conceptual de este estudio se estructuró a partir de tres elementos: (i) la resolución de problemas como una metodología para aprender matemáticas [6], (ii) la aproximación sociocultural del aprendizaje de Vygotsky, particularmente el constructor de la Zona de Desarrollo Próximo (ZDP) [7], y (iii) la consideración de las tecnologías digitales como amplificadores y reorganizadores cognitivos [8], [9].

Los elementos anteriores se eligieron tomando como referente que el uso de las tecnologías digitales favorece interacciones entre actividades de resolución de problemas y los aspectos socioculturales del aprendizaje. Cuando se usa una herramienta computacional para abordar una tarea, la tecnología permite representar los datos del problema y generar información relevante, la cual puede usarse para promover una interacción entre los estudiantes y el instructor al abordar la tarea.

Esta interacción proporciona elementos que pueden favorecer el pensamiento matemático de los estudiantes; a la vez que puede ayudar a que el instructor elabore o modifique rutas de instrucción que posibiliten establecer extensiones de una tarea o problema, así como conexiones entre diversos conceptos matemáticos, lo cual es un elemento esencial del aprendizaje con entendimiento [10].

Cuando se hace uso de las tecnologías digitales para abordar tareas matemáticas, aparecen al menos dos elementos que es importante considerar: uno de ellos se relaciona con el desarrollo de aspectos del pensamiento matemático tales como la solución de casos particulares, la identificación de patrones, la formulación de conjeturas, entre otras. El otro elemento se relaciona con las características de las tecnologías digitales que permiten la reorganización de los procesos cognitivos, al favorecer mecanismos que podrían no ponerse en juego al resolver problemas únicamente con papel y lápiz.

De acuerdo con Vygotsky, la ZDP es la diferencia que existe entre lo que el estudiante puede hacer por sí mismo al resolver un problema y lo que puede hacer con la ayuda de un par más capaz o del profesor. La relevancia de este constructo en el análisis de los procesos de aprendizaje, se basa en la consideración de que existen mecanismos cognitivos que pueden activarse cuando el estudiante participa en una comunidad de aprendizaje al resolver un problema.

En este estudio se documenta cómo la interacción entre el estudiante y el profesor, mediada por el uso de las tecnologías digitales puede conducir a: (i) ampliar y favorecer el desarrollo de una forma matemática de pensar entre los estudiantes y (ii) apoyar al profesor en el diseño o reestructuración de rutas de instrucción, así como en la adquisición de un entendimiento profundo de los procesos de aprendizaje.

¿En qué forma la interacción que se lleva a cabo en el salón de clases entre los estudiantes y el profesor, puede favorecer el desarrollo de un aprendizaje con entendimiento? Al abordar una tarea matemática el instructor puede proponer que los estudiantes elaboren una tabla, que bosquejen una figura y que formulen preguntas, cuya discusión en el aula puede conducir a los estudiantes a observar patrones o relaciones, las cuales pueden ser el punto de partida para que la comunidad de aprendizaje explore y construya conexiones entre diversas ideas matemáticas.

¿Cuáles son las características de los conocimientos de un profesor que le pueden permitir identificar oportunidades didácticas para construir o modificar rutas de instrucción a partir de las ideas u observaciones realizadas por los estudiantes durante el proceso de resolución de un problema? Argumentamos que el profesor debe poseer una red conceptual robusta [11][1] a partir de la cual pueda establecer conexiones novedosas (para él) entre diversas ideas o conceptos matemáticos, además de que le permita desarrollar la creatividad en el proceso de enseñanza. Por otro lado, es fundamental que las tareas que el profesor proponga, se diseñen de tal forma que estimulen la curiosidad del estudiante con la finalidad de que se apropie de la tarea o problema.

III. METODOLOGÍA

Las tareas se desarrollaron en un curso de cálculo de primer semestre de una licenciatura en matemáticas aplicadas, que se ofrece en una universidad pública. Al curso asistieron 22 estudiantes, cuya edad media era de 18 años. Dos de los estudiantes, Leonardo e Isaac[2], participaron en las olimpiadas de las matemáticas siendo estudiantes de bachillerato. Además, un estudiante, de once años de edad (Inti), quien se encontraba inscrito en un programa de "niños con talento" participó en el curso como invitado del profesor del curso.

La recolección de los datos se llevó a cabo mediante notas de campo que elaboró un observador, quien no tomó parte en las discusiones que se llevaron a cabo en el salón de clases. Asimismo se contó con los registros escritos de las actividades que llevaron a cabo los estudiantes. El análisis de las tareas se basa fundamentalmente en las interacciones que tuvieron lugar entre los estudiantes y el profesor, así como en las ideas y observaciones formuladas por los estudiantes que permitieron al instructor modificar la ruta de instrucción inicialmente planteada, así como establecer nuevas conexiones entre los conceptos presentes en su red conceptual.

La tarea inicial consistió en determinar si la ecuación (1)

$$x^2 = 2y^2 \qquad (1)$$

[1] El concepto de red conceptual es una herramienta teórica que considera la forma en que los conceptos matemáticos, así como las concepciones de la forma en que se construye el aprendizaje se encuentran estructurados en la mente del profesor. Una red conceptual es robusta si se es capaz de establecer conexiones entre los diversos elementos presentes en esa red conceptual.

[2] Los nombres utilizados para referirnos a los estudiantes son seudónimos.

tiene soluciones enteras. Se pidió a los estudiantes que construyeran una tabla en la cual representaran a los dos miembros de (1), es decir que en una columna calcularan los cuadrados de los números naturales y en una segunda columna calcularan los dobles de esos números. Una vez construida la tabla se les pidió que buscaran elementos comunes en ambas columnas.

En la ruta de instrucción se supuso que a partir de esa observación los estudiantes podrían conjeturar que la ecuación no tiene soluciones enteras y se iniciaría un proceso de discusión para explicar y justificar esa conjetura.

IV. ANÁLISIS DE RESULTADOS

El análisis de los resultados se llevará a cabo mediante episodios en cada uno de los cuales se exponen los elementos de mayor relevancia llevados a cabo por la comunidad de aprendizaje.

A. *Primer episodio: exploración del problema*

En este episodio los estudiantes utilizaron Excel para construir la tabla que se les solicitó y observaron que no hay elementos comunes entre las columnas B y C de la tabla, como se muestra en la Fig. 1; y con base en esa observación conjeturaron que (1) no tiene soluciones enteras, lo cual equivale a decir que no hay números enteros x y y tales que $\frac{x^2}{y^2}=2$, o que $\sqrt{2}$ no es un número racional.

Durante el proceso de discusión de las observaciones, Inti comentó que no había números en ambas columnas que fueran iguales, pero sí había números que "son casi iguales"; es decir, números cuya diferencia es 1 o -1.

	A	B	C
1	n	x^2	$2y^2$
2	1	1	2
3	2	4	8
4	3	9	18
5	4	16	32
6	5	25	50
7	6	36	72
8	7	49	98
9	8	64	128
10	9	81	162
11	10	100	200
12	11	121	242
13	12	144	288
14	13	169	338
15	14	196	392
16	15	225	450
17	16	256	512
18	17	289	578

Fig. 1. Cuadrados y dobles de los cuadrados de algunos números naturales

Esta observación condujo a los estudiantes a comentar que la ecuación (2):

$$x^2-2y^2=\pm 1 \qquad (2),$$

tiene solución, y a preguntarse cómo calcular esas soluciones y determinar si las soluciones siguen algún patrón.

Por otra parte, la observación de Inti y la discusión que se llevó a cabo entre los estudiantes permitió al instructor identificar una relación entre la irracionalidad de raíces de números primos y la ecuación de Pell (2), la cual, a su vez, puede utilizarse para elaborar una ruta de instrucción en la que se construya un método para encontrar una aproximación de los valores de esas raíces. El instructor también se dio cuenta que existe una relación entre el análisis de la irracionalidad de números enteros y las fracciones continuadas.

Los estudiantes abordaron la pregunta relativa a la existencia de otras soluciones enteras de (2) organizando aquellas que encontraron previamente, como se muestra en la Fig. 2.

	A	B	C
1	x	y	x^2-$2y^2$
2	1	1	-1
3	3	2	1
4	7	5	-1
5	17	12	1
6	41	29	-1
7	99	70	1

Fig. 2. Algunas soluciones enteras de la ecuación de Pell

Con base en los datos de la Fig. 2, los estudiantes notaron que podían obtener una nueva solución (x_{n+1}, y_{n+1}) de (2) a partir de una solución previa (x_n, y_n), mediante las ecuaciones (3) y (4).

$$x_{n+1}=x_n+2y_n \qquad (3)$$

$$y_{n+1}=x_n+y_n \qquad (4)$$

Usando (3) y (4) los estudiantes construyeron más soluciones de (2) con Excel. El instructor les solicitó que calcularan los cocientes $\frac{x_n}{y_n}$. Apoyados en los datos de la Fig. 3, los estudiantes conjeturaron que los cocientes convergen a $\sqrt{2}$ cuando n se incrementa. Esa evidencia numérica motivó la necesidad de presentar argumentos formales para justificar la conjetura.

	A	B	C	D
1	n	x_n	y_n	$a_n= x_n/y_n$
2	1	1	1	1
3	2	3	2	1.5
4	3	7	5	1.4
5	4	17	12	1.41666666666670
6	5	41	29	1.41379310344828
7	6	99	70	1.41428571428571
8	7	239	169	1.41420118343195
9	8	577	408	1.41421568627451
10	9	1,393	985	1.41421319796954
11	10	3,363	2,378	1.41421362489487
12	11	8,119	5,741	1.41421355164605
13	12	19,601	13,860	1.41421356421356

Fig. 3. Uso de Excel para el análisis de convergencia

B. Segundo episodio: búsqueda de justificaciones

Los estudiantes justificaron el hecho de que los cocientes $\frac{x_n}{y_n}$ se aproximan a $\sqrt{2}$ cuando n se aproxima a infinito como sigue: si x_n y y_n satisfacen (2), entonces se tiene la ecuación (5).

$$\left(\frac{x_n}{y_n}\right)^2 - 2 = \frac{\pm 1}{y_n^{\,2}} \qquad (5)$$

Además, los estudiantes argumentaron, basándose en los datos de la Fig. 3, que x_n y y_n crecen cuando n se incrementa, por lo que ambos miembros de (5) se aproximan a cero, o en forma equivalente, los cocientes $\frac{x_n}{y_n}$ se aproximan a $\sqrt{2}$.

C. Tercer episodio: Generalización de resultados y establecimiento de conexiones

En esta etapa de la discusión, uno de los estudiantes sugirió sustituir el 2 por el 3 en (2), y tratar de encontrar soluciones enteras de la ecuación resultante. en general, se consideró discutir la ecuación (6)

$$x^2 - py^2 = \pm 1 \qquad (6),$$

en donde p es un número primo. la generalidad de la ecuación y sus características llevó al profesor a decidir utilizar un sistema de algebra computacional como sage (software for algebra and geometry experimentation). se pidió la colaboración de un experto para elaborar un programa que aceptara como entrada un primo p y un entero n y que proporcionara como resultados: (i) la menor solución positiva (x_0, y_0) de (6) en el sentido de que si (x, y) es otra solución entonces $x_0 + y_0\sqrt{p} < x + y\sqrt{p}$; (ii) las parejas (x_n, y_n)para algunos valores de n y (iii) los cocientes $\frac{x_n}{y_n}$ y una aproximación de $\sqrt{p}$.

la principal característica del programa es que los resultados se pueden manejar de forma interactiva cambiando los valores del primo p y controlando el número de dígitos en el resultado. Con el uso de este programa, los estudiantes conjeturaron que la ecuación de pell tiene solución para cada primo p, y que obteniendo la menor de ellas, el resto se puede calcular mediante alguna relación de recurrencia. Por ejemplo, en el caso en que p=3, los estudiantes obtuvieron las ecuaciones (7) y (8).

$$x_{n+1} = 2x_n + 3y_n \qquad (7)$$

$$y_{n+1} = x_n + 2y_n \qquad (8).$$

asimismo, los estudiantes observaron que los cocientes $\frac{x_n}{y_n}$ convergen a $\sqrt{3}$. Estas observaciones motivaron una segunda etapa de discusión en la que aparecieron preguntas relativas a cómo calcular la menor solución positiva de (6) y determinar el tipo de estructura algebraica que posee el conjunto de soluciones. las preguntas anteriores fueron la base para que el instructor mencionara a los estudiantes que se pueden establecer conexiones entre el concepto de irracionalidad y fracciones continuadas o unidades en un campo cuadrático real y aun cuando estos temas no se discuten en un curso de cálculo, la discusión permitió a los estudiantes darse cuenta que las diversas áreas de las matemáticas se encuentran estrechamente relacionadas; también fue una oportunidad para mostrar una conexión entre las matemáticas escolares y la investigación en matemáticas, ya que algunas de las preguntas planteadas por los estudiantes subyacen a algunas líneas de investigación en teoría de números.

V. CONSIDERACIONES FINALES

Existe evidencia de que el uso de un sistema computacional, como una herramienta de aprendizaje, proporciona a los estudiantes oportunidades para explorar diferentes aspectos de un problema, favorece la formulación de conjeturas y la generalización de resultados matemáticos, así como el establecimiento de conexiones entre diversos contenidos o resultados. Particularmente, el uso de Excel y SAGE, no solamente facilitó las operaciones aritméticas, sino que también sustentó la búsqueda de patrones numéricos [12] que llevaron a cabo los estudiantes. Particularmente, Excel ayudó a los estudiantes a conjeturar que (1) no tiene soluciones enteras y a construir una sucesión de cocientes que se aproximan a $\sqrt{2}$.

Durante el desarrollo de las actividades, las preguntas y comentarios formulados por los estudiantes ayudaron al profesor a establecer conexiones claras entre $\sqrt{2}$, la ecuación de Pell y un método para obtener sucesiones de cocientes que se aproximan a $\sqrt{p}$, con p un número primo; lo cual provocó que modificara la ruta de instrucción inicial que había planeado. Esta capacidad para aprovechar las oportunidades didácticas derivadas de los comentarios y sugerencias de los estudiantes demanda del instructor un marco bien estructurado para identificar y extender el valor y utilidad didáctica de las ideas matemáticas de los estudiantes.

Los resultados de este trabajo indican que la guía del instructor y el uso sistemático de las tecnologías digitales fueron cruciales para aprovechar las ideas expresadas por los estudiantes en su ZDP. Es importante resaltar que la estructura conceptual del profesor fue modificada por los comentarios y observaciones de los estudiantes al resolver la tarea, lo cual originó conexiones entre elementos de su red conceptual, las cuales no se habían establecido de forma previa, como el propio instructor admitió.

Este estudio aporta algunos elementos que sustentan las siguientes afirmaciones: (i) la identificación de oportunidades didácticas que orienten posibles rutas de instrucción, depende directamente de la interacción entre el profesor y los estudiantes por medio de ideas que surgen durante la discusión en la clase y (ii) las características de las tareas de aprendizaje y del escenario de instrucción, guían el tipo de reflexión matemática que los estudiantes desarrollan, así como las características del conocimiento que logran construir como miembros de una comunidad de aprendizaje.

VI. AGRADECIMIENTOS

El primer autor agradece el apoyo recibido de Conacyt, a través del proyecto de investigación con referencia #61996. Ambos autores agradecen sinceramente a Fidel Barrera Cruz por el programa en SAGE, usado en la discusión con los estudiantes en el aula.

VII. REFERENCIAS

[1] H. Eves, *An Introduction to the History of Mathematics*. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1969, p. 52.

[2] T. M. Apostol, "Irrationality of square root of 2 –A geometric proof," *The American Mathematical Monthly*, vol. 107, pp. 841-842, Nov. 2000.

[3] R. Courant, and H. Robbins, *What is Mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods*. New York: Oxford University Press, 2006, pp.

[4] M. Spivak, *Calculus*. Mexico: Reverte, 1996, pp.

[5] T. Barnard and D. Tall, "Cognitive units, connections and mathematical proof," *in Proc. 1997 21st Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, pp. 41-48.

[6] M. Santos-Trigo, *La resolución de problemas matemáticos: fundamentos cognitivos*. México: Trillas, 2007.

[7] L. S. Vygotsky, *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Cambridge: Harvard University Press, 1978.

[8] R. D. Pea, "Cognitive technologies for mathematics education," in *Cognitive sciences in mathematics education*, A. Schoenfeld, Ed. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

[9] L. Moreno-Armella, "Instrumentos matemáticos computacionales," En Memorias 2002 *Seminario Nacional Formación de Docentes sobre el Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas*, pp. 81-86.

[10] J. Hiebert, T. P. Carpenter, E. Fennema, K. C. Fuson, D. Wearne, H. Murray, A. Olivier, and P. Human, *Making sense: teaching and learning mathematics with understanding*. Portsmouth, NH: Heinemann, 1997.

[11] F. Barrera-Mora, and A. Reyes-Rodríguez, "Instructional routes and teacher's conceptual network: irrationality of square root of two," *Primus (Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies)*, in revision.

[12] J. M. Borwein and D. H. Bailey, *Mathematics by experiment: Plausible reasoning in the 21st century*. Natick, MA: AK Peters, 2003.