



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO

INSTITUTO DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

CENTRO DE INVESTIGACIÓN AVANZADA EN INGENIERÍA INDUSTRIAL

**TÉCNICAS ESTADÍSTICAS (DOE,
RSM Y VRT) PARA EL ANÁLISIS DE
UN MODELO DE SIMULACIÓN.**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
**MAESTRO EN CIENCIAS EN
INGENIERÍA INDUSTRIAL**

PRESENTA:

ING. FRANCISCA SANTANA ROBLES

DIRECTORA:

DRA. MIRIAM M. ÁLVAREZ SUÁREZ

DICIEMBRE 2007

AGRADECIMIENTOS:

A **Isidora Robles López** por el gran apoyo que me ha brindado a lo largo de mi vida, y que sin el cual no hubiera sido posible alcanzar esta meta. Gracias por existir, estoy orgullosa de ti.

A la **Dra. Miriam Álvarez Suárez** por su amistad, sus enseñanzas y su colaboración en el desarrollo de esta tesis. Por ayudarme a resolver los inconvenientes que se presentaron durante este proceso. Gracias por su comprensión.

Al **Dr. Gilberto Pérez Lechuga** por su apoyo incondicional en la licenciatura y durante la maestría; además de la valiosa participación en la elaboración de este trabajo. Siempre le estaré agradecida por sus consejos, comprensión y motivación para mi desarrollo profesional.

Al **Dr. Joselito Medina Marin** por brindarme todo el apoyo al inicio y al final de este trabajo. Por su orientación para realizar mejoras a la tesis.

Al **Dr. Manuel González Hernández** por sus valiosas recomendaciones que contribuyeron en la mejora de este proyecto.

A **Todos mis profesores de maestría** por sus enseñanzas y orientación.

A **Todos mis hermanos y amigos** por su apoyo y comprensión.

Índice general

GLOSARIO	V
ÍNDICE DE FIGURAS	VII
ÍNDICE DE CUADROS	VIII
RESUMEN	X
ABSTRACT	XI
INTRODUCCIÓN	XII
JUSTIFICACIÓN	XIV
ANTECEDENTES	XV
1. MODELOS LINEALES	1
1.1. Introducción	1
1.2. Modelos de análisis de varianza	3
1.2.1. Matriz de variables aleatorias	7
1.3. Modelo general lineal	8
1.3.1. Clasificación del modelo según sus x_{ij}	8
1.3.2. Clasificación del modelo según sus β_j	9
1.4. Modelos de diseños factoriales de dos factores	9
1.4.1. Caso general de un diseño con dos factores (Bifactorial)	12
1.4.2. Análisis estadístico del modelo de efectos fijos	13
1.4.3. Análisis estadístico del modelo de efectos aleatorios	17
1.4.4. Análisis estadístico del modelo de efectos mixtos	20
1.5. Modelos de diseños factoriales a dos niveles	21
1.5.1. Diseño factorial 2^2	21
1.5.2. Cálculo de efectos de factores	22
1.5.3. Diseño factorial 2^3	26
1.5.4. Representación geométrica de los contrastes (efectos principales e interacciones)	29
1.6. Superficies de respuesta	29

1.7. Análisis del capítulo	32
2. LA SIMULACIÓN DIGITAL	34
2.1. Introducción	34
2.2. Sistemas, modelos y simulación	36
2.2.1. Experimentos con el sistema actual vs Experimentos con un modelo del sistema	37
2.2.2. Modelo físico vs Modelo matemático	38
2.2.3. Solución analítica vs Simulación	38
2.3. Pasos en un estudio de simulación	40
2.3.1. Formular el problema y el plan de estudio	42
2.3.2. Recoger datos y definir un modelo	43
2.3.3. Verificar si el modelo conceptual es válido	47
2.3.4. Construir un programa de computadora y verificarlo	47
2.3.5. Hacer corridas piloto	49
2.3.6. Comprobar si el modelo programado es válido	49
2.3.7. Diseño de experimentos	51
2.3.8. Hacer corridas de producción	52
2.3.9. Analizar datos de salida	52
2.3.10. Documentar, presentar y usar resultados	53
2.4. Técnicas para la reducción de la varianza	53
2.5. ProModel	57
2.6. Paquetes para el análisis de datos	58
2.6.1. BestFit	58
2.6.2. SPSS	59
2.6.3. JMP	59
2.7. Análisis del capítulo	60
3. DOE Y SUPERFICIES DE RESPUESTA	62
3.1. Introducción	62
3.2. CASO DE ESTUDIO	63
3.2.1. Modelo de simulación	64
3.3. Análisis de datos recopilados del sistema real	66
3.3.1. Estudio del tiempo de recorrido de los montacargas desde el almacén hasta la zona de embarque	66
3.3.2. Análisis del sistema de montacargas y los turnos vespertino y nocturno	69
3.4. DOE para el modelo de simulación	73

3.4.1.	Justificación del uso de diseño de experimentos en un modelo de simulación	73
3.4.2.	Planeación del diseño de experimentos para el modelo de simulación	74
3.4.3.	Estudio de la saturación del almacén de productos UP	77
3.4.4.	Estudio de la utilización de los andenes de productos UP	83
3.5.	Modelos de superficies de respuesta	90
3.5.1.	Desarrollo de un modelo de superficie de respuesta	90
3.6.	Análisis del capítulo	107
4.	TÉCNICAS DE REDUCCIÓN DE VARIANZA	109
4.1.	Introducción	109
4.2.	CASO DE ESTUDIO	110
4.3.	Números aleatorios comunes	111
4.4.	Streams	113
4.5.	Especificación de streams para el caso de estudio	116
4.5.1.	Especificación de los parámetros para correr el modelo	117
4.6.	Fundamentos estadísticos	120
4.6.1.	Fórmulas para la estimación de medias y varianzas	123
4.7.	Intervalos de confianza	125
4.7.1.	Un intervalo de confianza pareado t	126
4.7.2.	Un intervalo de confianza de dos muestras t modificado	128
4.8.	Estimación de varianzas	131
4.9.	Análisis del capítulo	135
	CONCLUSIONES GENERALES	135
	BIBLIOGRAFÍA	137

GLOSARIO

Análisis de varianza. Es una técnica estadística para analizar medidas dependiendo de varias clases de efectos operando simultáneamente, para decidir qué clase de efectos son importantes y poderlos estimar.

Condiciones experimentales. Son las variables aleatorias generadas que son usadas para manejar los modelos a través del tiempo simulado.

Corrida de simulación. Es un experimento de muestreo estadístico realizado en computadora de acuerdo a ciertas configuraciones.

Efecto. En diseño de experimentos un efecto se refiere a un cambio en la respuesta promedio entre combinaciones de los niveles de dos factores o entre dos condiciones experimentales.

Modelo de efectos aleatorios. Es un modelo en el cual todos los β_j son variables aleatorias, excepto una que es una constante aditiva.

Modelo de efectos fijos. Si todos los efectos β_j son constantes desconocidas o parámetros, el modelo se conoce como un “modelo de efectos fijos”.

Modelo de efectos mixtos. Son aquellos casos donde al menos un efecto β_j es una variable aleatoria y al menos otro β_j es una constante no aditiva.

Números aleatorios comunes. Es una técnica que intenta conducir una correlación positiva usando los mismos números aleatorios para simular todas las configuraciones.

Periodo trascendente. Permite determinar las condiciones iniciales apropiadas para la simulación antes de iniciar el muestreo.

Stream. Es una secuencia cíclica de números aleatorios de forma independiente. Los streams generan números aleatorios entre 0 y 1 que son usados para muestreo de distribuciones seleccionadas.

Técnicas de reducción de varianza. Son métodos que explotan la capacidad de control de los generadores de números aleatorios que conducen una simulación.

ABREVIACIONES:

ANOVA: Análisis de varianza.

AV: Variables antitéticas.

CRN: Números aleatorios comunes.

CV: Variables de control.

DOE: Diseño de experimentos.

RSM: Modelos de superficie de respuesta.

UP: Productos ultrapasteurizados.

VRT: Técnicas de reducción de varianza.

Índice de figuras

1.1.	Disposición general para un diseño bifactorial	12
1.2.	Combinaciones de tratamientos en el diseño 2^2	25
1.3.	Diseño factorial 2^3	27
1.4.	Contrastes correspondientes a efectos principales	29
1.5.	Contrastes correspondientes a la interacción de dos factores	29
1.6.	Contrastes correspondientes a la interacción de tres factores	30
2.1.	Formas para estudiar un sistema	37
2.2.	Pasos en un estudio de simulación	41
3.1.	Plano de la planta empacadora de leche	65
3.2.	Flujo de proceso	65
3.3.	Valores originales para Montacargas B (MB) y Montacargas C1 (MB)	104
3.4.	Gráfica de contornos y superficie de respuesta	105
3.5.	Figura de contornos con decrementos	106
3.6.	Superficie de respuesta	107

Índice de cuadros

1.1. Grados de libertad	15
1.2. ANOVA para el modelo bifactorial de efectos fijos	17
1.3. Matriz de diseño para un factorial 2^2	22
1.4. Matriz de diseño para un factorial 2^3	27
2.1. Fuentes de aleatoriedad de algunos tipos de sistemas	44
3.1. Diseño factorial 2^2 para el tiempo de recorrido de los montacargas	68
3.2. ANOVA para el tiempo de recorrido de los montacargas	69
3.3. Diseño factorial 2×5	72
3.4. ANOVA para el diseño factorial 2×5	72
3.5. Factores y variable de respuesta para el estudio de la saturación del almacén	76
3.6. Factores y variable de respuesta para el estudio de la saturación de los andenes	76
3.7. Diseño 2^4 para el estudio de la saturación del almacén	80
3.8. Signos para calcular efectos principales e interacciones del diseño 2^4	81
3.9. Cantidades totales de las cinco réplicas y efectos	82
3.10. ANOVA para el diseño factorial 2^4	84
3.11. Diseño 2^4 para la saturación de los andenes de productos UP	87
3.12. Cantidades totales de las tres réplicas y efectos de las variables	88
3.13. ANOVA para el diseño 2^4 del estudio de los andenes	89
3.14. Diseño factorial 2^2 con tres puntos centrales	92
3.15. ANOVA para el diseño factorial 2^2 con tres puntos centrales	96
3.16. Variación de los montacargas en dos unidades	98
3.17. Diseño 2^2 con cinco puntos centrales	99
3.18. ANOVA para el diseño 2^2 con cinco puntos centrales	99
3.19. Diseño compuesto central	101

3.20. Resumen de ajuste	102
3.21. ANOVA para el diseño compuesto central	102
3.22. Estimación de parámetros	103
3.23. Prueba de efectos	103
3.24. Coeficiente	104
3.25. Solución de la superficie de respuesta	104

RESUMEN

TÉCNICAS ESTADÍSTICAS (DOE, RSM Y VRT) PARA EL ANÁLISIS DE UN MODELO DE SIMULACIÓN

La competencia global de las empresas y en particular las manufactureras, cada vez es más compleja, por lo que es necesario que los empresarios o directores de las mismas se mantengan actualizados de la tecnología y las técnicas de procesamiento de la información que se desarrollan cada día y que pueden ser aplicados a sus negocios para hacer más eficientes los procesos y poder ser competitivas.

Actualmente las empresas u organizaciones requieren de soluciones rápidas y eficientes para poder hacer frente a sus problemas. En este contexto, el diseño de experimentos y la simulación adquieren gran importancia, puesto que permiten conocer qué factores pueden estabilizar o desestabilizar un sistema.

Los modelos de simulación son una herramienta útil para predecir el comportamiento de sistemas complejos, en particular sistemas que incluyen fenómenos aleatorios. Los proyectos de simulación pueden requerir demasiado tiempo y recursos, por lo que resultan costosos. Como una simulación es un experimento de muestreo estadístico realizado por computadora, es imprescindible que el analista o encargado del proyecto utilice técnicas estadísticas apropiadas para diseñar y analizar los experimentos de simulación. En este punto, el diseño de experimentos juega un papel importante para seleccionar y conducir de forma cuidadosa los experimentos de la misma. Los modelos de superficies de respuesta son una herramienta valiosa puesto que son útiles para modelar y analizar problemas donde una respuesta de interés es influida por varias variables, y el objetivo es optimizar la respuesta. Por otro lado, la aplicación de técnicas de reducción de varianza es también de vital importancia, ya que permiten explotar la capacidad de control de los generadores de números aleatorios que conducen una simulación.

Esta tesis presenta de forma detallada el desarrollo y análisis de los modelos de diseño de experimentos y de superficie de respuesta, así como la utilización de técnicas de reducción de varianza como herramientas esenciales para evaluar estrategias de optimización del sistema de una planta empaquera de leche, específicamente el estudio del almacén principal y el área de embarque.

ABSTRACT

STATISTICAL TECHNIQUES (DOE, RSM AND VRT) TO ANALYZE SIMULATION MODEL

The global competition of the companies and in individual manufacturing, become more complex every day. That is the reason why it is necessary that the industrialists or directors stay updated of the technology and the techniques of information developed every day and that can be applied to their businesses to be more efficient the processes and power to be competitive.

At the moment, the companies require efficient solutions to be able to face their problems. In this context, the design of experiments and the simulation acquire great importance, since they allow to know which factors can stabilize or destabilize a system.

The simulation models are a useful tool to predict the behavior of complex systems in individual systems that include random phenomena. The simulation projects can require too much time and resources, reason why they are expensive. As a simulation is an experiment statistical sampling by computers means it is important that the analyst or the responsible uses appropriate statistical techniques to design and to analyze the simulation experiments. Therefore, the design of experiments plays a role very important to select and to lead of careful form the experiments of the same one. The models of response surface are a valuable tool since they are useful to model and to analyze problems where an interest answer is influenced by several variables, and the purpose is to optimize the answer. On the other hand, the application of variance reduction techniques is also of great importance, since they allow to operate the capacity of control of the random number generators that lead a simulation.

This thesis is carried out to develop and analyze the models of design experiments and response surface, as well as the use of variance reduction techniques as essential tools to evaluate strategies of optimization of the system of a pack milk plant, specifically the study of the warehouse and the boarding area.

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo de tesis se describe en cuatro capítulos, como se muestra a continuación:

En el capítulo I se presentan las bases teóricas de los modelos lineales, como son modelos de análisis de varianza, modelo lineal general, modelos de diseños factoriales de dos factores, modelos de diseños factoriales a dos niveles y modelos de superficies de respuesta; que posteriormente son usados en el capítulo III.

El capítulo II trata sobre los pasos básicos para desarrollar modelos de simulación, los cuales se deben realizar de forma secuencial para garantizar el éxito de dicha simulación; sin embargo, si al validar el modelo, lo cual consiste en verificar que el modelo de simulación conceptual sea una representación exacta del sistema bajo estudio; si esto no se cumple es necesario regresar a pasos anteriores hasta que la validación sea correcta. En este capítulo, se mencionan algunos programas para el análisis de datos antes de la simulación, como son: BestFit y SPSS. El programa JMP es una herramienta muy útil para el análisis de datos después de realizar la simulación.

En el capítulo III se desarrollan y analizan diseños de experimentos con datos obtenidos del sistema real. Posteriormente, se utilizan diseños de experimentos desarrollados con el modelo de simulación que permiten conocer los factores que inciden en la saturación del almacén principal y el congestionamiento de los andenes de productos ultrapasteurizados (UP); además se usan modelos de superficie de respuesta para encontrar el punto donde la saturación del almacén de producto terminados UP se hace mínima.

En el capítulo IV se utilizan intervalos de confianza para conocer la diferencia entre respuestas esperadas de dos sistemas, el sistema 1 se refiere al que utiliza actualmente la empresa; el sistema 2 es el sugerido de acuerdo a los resultados obtenidos en el capítulo III. Además se utiliza una técnica de reducción de varianza (números aleatorios comunes) y se realiza la estimación de la misma.

OBJETIVOS

El objetivo general de este trabajo es: presentar, desarrollar y analizar diseños de experimentos (DOE), superficies de respuesta (MSR) y técnicas de reducción de varianza (TRVs) para el estudio de un modelo de simulación que representa el funcionamiento de una planta empacadora de leche.

Como objetivos parciales se presentan los siguientes:

1. Seleccionar, desarrollar y analizar diseños de experimentos que permitan conocer qué factores son los que más afectan en la saturación del almacén de productos UP, así como encontrar los factores de mayor impacto en la utilización de los andenes.
2. Desarrollar y analizar los modelos de superficies de respuesta con el fin de determinar el punto donde la saturación del almacén de productos terminados UP se hace mínima.
3. Presentar y desarrollar técnicas de reducción de varianza que permitan una estimación más exacta de los parámetros de interés.

JUSTIFICACIÓN

La evolución del mundo actual a generado la necesidad de mayor competitividad de las organizaciones. Actualmente la competitividad económica que presenta nuestro país es alarmante, debido a ello muchas empresas no les queda otra alternativa que cerrar, o son absorbidas por otras del exterior. Lo cual genera un gran problema social y por supuesto económico, puesto que provoca desempleo y amplios grupos de pobreza.

Una de las cuasas principales de la baja competitividad de las organizaciones, es la falta de conocimiento del comportamiento de sus sistemas de operación y en consecuencia carecen de la aplicación de alternativas óptimas que mejoren este comportamiento.

En este contexto, los modelos de simulación adquieren gran importancia, puesto que son útiles para analizar el desempeño de la configuración actual, así como configuraciones sobre sistemas que aún no existen. Dentro del campo de la simulación, los modelos de diseños de experimentos y de superficies de respuesta tienen un papel importante, debido a que el éxito de ésta también depende de la aplicación de técnicas estadísticas apropiadas a los datos de entrada y de salida de la simulación. Otras de las técnicas estaísticas de gran relevancia para el buen desempeño de una simulación son las técnicas de reducción de varianza.

La importancia de esta tesis “TÉCNICAS ESTADÍSTICAS (DOE, RSM Y VRT) PARA EL ANÁLISIS DE UN MODELO DE SIMULACIÓN” es mostrar que el uso de técnicas estadísticas (DOE, MSR y TRVs) son imprescindibles para el estudio de un modelo de simulación. Para el presente trabajo, el modelo de simulación estudiado es un caso práctico, ya que representa una aproximación de la dinámica del comportamiento del sistema de operaciones de una planta empacadora de leche, especialmente el problema relacionado con las operaciones del sistema de embarque y de saturación del almacén. Con los resultados obtenidos se pretende proponer mejoras a dicho sistema, además de extender y promover el uso de estas técnicas estadísticas en los modelos de simulación y además enfatizar el empleo de esta importante herramienta que es la simulación a las organizaciones para un mejor desempeño de sus negocios.

ANTECEDENTES

Las primeras aplicaciones del diseño de experimentos se dieron en el área de la agricultura y ciencias biológicas. Posteriormente, en la década de 1930 se hicieron las primeras aplicaciones en la industria (Montgomery, 1991 [1]), no obstante, en años recientes ha habido un renovado interés por el diseño de experimentos. (Law and Kelton, 2002 [2]), hacen referencia de la importancia que tiene esta herramienta para aplicarla al análisis de cualquier modelo de simulación, puesto que provee una forma de decidir antes de realizar las corridas qué configuraciones simular, de tal forma que se pueda obtener la información deseada con una cantidad mínima de simulaciones; además se tiene un mayor control de los factores que son analizados en el modelo, esto permite hacer combinaciones óptimas de los niveles de los factores para maximizar o minimizar la variable de respuesta.

Por otro lado, (Box, Hunter y Hunter, 1999 [3]) mencionan que el diseño de experimentos puede ser utilizado para realizar un análisis de sensibilidad de un modelo de simulación que permita conocer qué efectos tienen en las respuestas los cambios en los factores. Además, de acuerdo a (Kleijnen, 1999 [4]) una de las ventajas de DOE es que puede ser aplicado a todos los modelos de simulación, determinísticos o estocásticos, de eventos discretos o continuos. Algunos trabajos interesantes que se han realizado aplicando DOE son: Experimental Design for Sensitivity Analysis, Optimization, and Validation of Simulation Models (Kleijnen, 1998 [5]); Validation of Models: Statistical Techniques and Data Availability (Kleijnen, 1999 [4]); Designing Simulation Experiments (Barton, 2001 [6]); A Methodology for Fitting and Validation Metamodels in Simulation (Kleijnen and Sargent, 1999 [7]); The Use of Simulation and Design of Experiments for Productivity Improvement in the Sawmill Industry, (Sepúlveda, Baesler, Araya and Ramis, 2004 [8]).

Los modelos de superficie de respuesta, propuestos por (Box y Wilson, 1951 [9]) han sido aplicados con éxito a disciplinas tan diversas como la agricultura, las investigaciones biológicas, la ingeniería química y el desarrollo de productos alimenticios. Las bases de estos modelos se derivan de la teoría del modelo lineal general; se supone que existe una variable de respuesta, que depende de variables independientes cuantitativas a través de una función f , que puede ser muy complicada o desconocida. La función usualmente se aproxima en la región de interés, por un polinomio de orden bajo, generalmente menor o igual a tres.

Por otro lado, las técnicas de reducción de varianza, originalmente fueron desarrolladas para ser aplicadas en simulaciones Monte Carlo, en la etapa temprana de la computación, (Hammersley and Handscomb, 1964 [10]), ver además (Bratley, Fox, and Schrage, 1987 [11]). Sin embargo, muchas de esas VRTs han sido aplicadas a simulaciones de sistemas dinámicos complejos, (Morgan, 1984 [12]), (Wilson, 1984 [13]).

Capítulo 1

MODELOS LINEALES

1.1. Introducción

Los modelos y la construcción de los mismos son muy comunes en ciencias de ingeniería y física. Un ingeniero o científico generalmente tiene un conocimiento básico acerca del fenómeno bajo estudio y busca usar esta información para obtener un modelo verosímil del proceso de datos generado. Los experimentos son conducidos para caracterizar, confirmar o desechar modelos, en particular, a través de hipótesis acerca de estos modelos. Los modelos toman muchas formas y clases, pero en general todos buscan caracterizar una o más variables de respuesta, quizás a través de relaciones con uno o más factores. Los modelos se pueden clasificar en dos grandes categorías:

1. Modelo Matemático

De acuerdo a (Mason, Gunst and Hess, 2003 [14]) un modelo es llamado matemático si es derivado de consideraciones teóricas o mecánicas, que represente de forma exacta, con suposiciones libres de error entre las variables.

2. Modelo Estadístico

Un modelo es llamado estadístico si es derivado de datos que son sujetos a varios tipos de especificación, observación, experimental y/o medidas de error.

Los modelos matemáticos tienen la característica común que las variables de respuesta y las pronosticadas son asumidas como libres de error de especificación y medidas inciertas. Los modelos matemáticos pueden ser pobres descriptores de sistemas físicos, debido a la falta de explicación de varios tipos de errores, los cuales si son incluidos en los modelos estadísticos. Los modelos estadísticos son aproximaciones para sistemas físicos actuales y son sujetos a especificaciones y medidas de error.

Un ejemplo de un modelo matemático es la relación mecánica de fractura:

$$K_{IC} = \gamma S a^{\frac{1}{2}}$$

donde K_{IC} es el factor de intensidad de presión crítica, S es la fuerza de fractura, a es el tamaño de la grieta causada de la fractura, y γ es una constante referente a la geometría de la grieta. Esta fórmula puede ser utilizada para relacionar el tamaño de grieta de un material frágil para su fuerza de fractura. Su validez es aceptada por los ingenieros mecánicos, debido a que está basada en los fundamentos teóricos de mecánica de fractura que han sido confirmados a través de pruebas experimentales extensas.

Generalmente los estudios empíricos no operan bajo las condiciones ideales necesarias para que un modelo como el descrito anteriormente sea válido. De hecho, frecuentemente no es posible postular un modelo matemático para el mecanismo que esté siendo estudiado. Incluso, un modelo como el de la relación mecánica de fractura que se sabe que debería ser válido, el error experimental puede llegar a ser un problema no trivial. En estas situaciones, los modelos estadísticos son importantes, ya que éstos pueden ser usados para aproximar la variable de respuesta sobre algún rango apropiado de las otras variables del modelo. Por ejemplo, los errores aditivos o multiplicativos pueden ser incluidos en el modelo de mecánica de fractura, resultando los modelos estadísticos

$$K_{IC} = \gamma S a^{\frac{1}{2}} + e$$

o

$$K_{IC} = \gamma S a^{\frac{1}{2}} e$$

donde e es el error. Note que el uso del “error” en el modelo estadístico no intenta

indicar que el modelo es incorrecto, sólo indica que hay fuentes desconocidas de variación no controlable, frecuentemente error de medidas.

En muchos estudios de investigación hay modelos matemáticos para guiar la investigación. Los investigadores normalmente producen modelos estadísticos que pueden ser parcialmente basados en consideraciones teóricas que deben ser validadas a través de pares de rangos de las variables experimentales.

1.2. Modelos de análisis de varianza

El **análisis de varianza** (ANOVA)¹ es una técnica estadística para analizar medidas dependiendo de varias clases de efectos operando simultáneamente, para decidir qué clase de efectos son importantes y poderlos estimar. Las medidas u observaciones pueden ser en ciencia experimental por ejemplo genética o no experimental como astronomía. Una teoría de analizar medidas, naturalmente tiene implicaciones acerca de cómo deben ser planeados los experimentos o como deberían ser tomadas las observaciones, por ejemplo, **diseño de experimentos**.

Los procedimientos de ANOVA separan o reparten la variación observable en una variable de respuesta en dos componentes básicos: *variación debida a causas asignables*² y *variación aleatoria o incontrolada*³. Las causas asignables se refieren a fuentes de variación conocidas o sospechadas de variantes que son controladas (factores experimentales) o medidas (covariantes) durante la conducción de un experimento. La variación aleatoria incluye los efectos de todas las otras fuentes no controladas o medidas durante el experimento. Mientras que las fuentes aleatorias de variabilidad de la respuesta son normalmente descritas como incluyendo sólo cambios de variación o error de medida, cualquiera de los efectos de los factores que no han sido controlados o medidos son también incluidos en la medida del componente de variación aleatoria. Una descripción más completa y explícita de los efectos de los

¹El análisis de varianza como comúnmente es entendido y practicado hoy en día, fue desarrollado por (Fisher, 1918, 1925, 1935, [15]) quien introdujo los términos de varianza y análisis de varianza. El último término parecería más apropiado para modelos de efectos aleatorios

²**Causas asignables.** Debida a cambios en factores experimentales

³**Variación aleatoria.** Debida a efectos incontrolables, incluyendo causas de cambio y errores de medición

factores requiere la especificación de un modelo estadístico que incluya tanto causas asignables como variación aleatoria, (Scheffé, 1957 [16]).

Suponga que se tienen n observaciones de medidas (o resultados). En los modelos usados en el análisis de varianza, se supone que estas observaciones son valores tomados de n variables aleatorias y_1, y_2, \dots, y_n , que están compuestas de combinaciones lineales de p cantidades desconocidas $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, más errores e_1, e_2, \dots, e_n ,

$$y_i = x_{1i}\beta_1 + x_{2i}\beta_2 + \dots + x_{pi}\beta_p + e_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1,1)$$

donde las $\{x_{ji}\}$ son coeficientes constantes conocidas. (Las llaves $\{\}$ denotan el conjunto de cantidades indicadas: en este caso, $\{x_{ji}\}$ significa el conjunto que consiste de las np cantidades x_{ji} con $j = 1, 2, \dots, p$; $i = 1, 2, \dots, n$.) Los $\{\beta_j\}$ son más o menos formulaciones idealizadas de algunos aspectos de interés para el investigador en el fenómeno de las observaciones. El propósito del análisis de varianza es hacer inferencias acerca de los $\{e_i\}$ y algunos de los $\{\beta_j\}$, las inferencias para ser válidas a pesar de los valores de los otros $\{\beta_j\}$, de tal forma que se puedan agregar o quitar, de acuerdo a la conveniencia.

Una suposición mínima que siempre se hace en las variables aleatorias $\{e_i\}$ es que sus valores esperados sean cero.

$$E(e_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (1,2)$$

Además también generalmente se supone que

$$E(e_i e_j) = \sigma^2 \delta_{ij}, \quad (1,3)$$

donde σ^2 es una constante desconocida y δ_{ij} es 0 o 1, de acuerdo a $i \neq j$ o $i = j$, respectivamente. Esto es equivalente a decir, que las variables aleatorias $\{e_i\}$ no son correlacionadas (tienen coeficiente cero de correlación) y tienen igual varianza σ^2 .

Una definición más precisa del análisis de varianza es: *un cuerpo de los métodos estadísticos para analizar medias con el supuesto que tienen la estructura de la ecuación (1.1)*, donde los coeficientes $\{x_{ji}\}$ son enteros, normalmente 0 o 1. Para aclarar esto, es necesario considerar no sólo los valores de las $\{x_{ji}\}$ sino también su origen en la situación real que se esté investigando: En el análisis de varianza las $\{x_{ji}\}$ son los

valores de “variables discretas” o “variables indicadoras” que se refieren a la presencia o ausencia de los efectos $\{\beta_j\}$ en las condiciones bajo las cuales las observaciones son tomadas: x_{ji} es el número de veces que ocurre β_j en la i -ésima observación, y éste es normalmente 0 o 1. Si las $\{x_{ji}\}$ son valores tomados en las observaciones no para variables discretas pero si para variables continuas, por ejemplo: $t =$ tiempo, $T =$ temperatura, t^2 , e^{-t} , tT , t^0 etc. (éstas son llamadas variables independientes o concomitantes, y de las observaciones $\{y_i\}$ se dice que es una variable dependiente y), por otro lado, también se dice que se tiene un caso de análisis de regresión. Si hay algunas de ambas clases, se tiene un análisis de covarianza.

Hasta ahora no se ha especificado la naturaleza de los efectos desconocidos $\{\beta_j\}$: pueden ser tanto constantes desconocidas, que son llamadas parámetros, o variables aleatorias no observables sujetas a suposiciones futuras acerca de su distribución involucrando otros parámetros no conocidos. A un modelo en el que todos los $\{\beta_j\}$ son constantes desconocidas se le llama **modelo de efectos fijos**. Frecuentemente sucede que uno de los $\{\beta_j\}$ es una constante que ocurre con cada observación con coeficiente 1 así que, para esta j , $x_{ji} = 1$, para toda i . Se puede llamar a un tal β_j una *constante aditiva* (en aplicaciones es normalmente una “media general” en algún sentido). Un modelo en el que todos los $\{\beta_j\}$ son variables aleatorias, excepto posiblemente para uno que es una constante aditiva, es llamado **modelo de efectos aleatorios**. Los casos intermedios, donde por lo menos un β_j es una variable aleatoria y por lo menos, uno es una constante no aditiva, son llamados **modelos de efectos mixtos**.

Ahora se desea ilustrar la notación, pero no es conveniente usar ejemplos de análisis de varianza típicos, debido a que antes se debería introducir algunas complicaciones, (Radhakrishna, 1965 [17]).

1. *Considerar el problema de ajustar un polinomio de grado tres*

$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, para un conjunto de valores observados (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, n$, suponga que y_i es una variable aleatoria, x_i no es variable aleatoria, y el valor esperado de y_i es la ordenada en la curva cúbica en $x = x_i$:

$$E(y_i) = a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + a_3x_i^3.$$

Se tiene en este caso, $p = 4$, $\beta_j = a_{j-1}$ ($j = 1, \dots, 4$). Note que la regresión, en

este caso $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, no necesita ser lineal en la variable independiente x , sino sólo en los parámetros desconocidos.

2. *Otro problema puede ser ajustar un polinomio trigonométrico para algunos datos periódicos con periodos conocidos*

$$E(y_i) = a_0 + a_1 \cos t_i + b_1 \sin t_i + a_2 \cos 2t_i + b_2 \sin 2t_i + a_3 \cos 3t_i + b_3 \sin 3t_i$$

Aquí la observación y_i es realizada en el tiempo t_i y los $\{\beta_j\}$ son las siete constantes a's y b's.

Estos ejemplos indican que los modelos incluyen una gran variedad de situaciones.

A continuación se definen los vectores

$$\mathbf{y}^{n \times 1} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\beta}^{p \times 1} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_p \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e}^{n \times 1} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ e_n \end{pmatrix}$$

y la matriz

$$\mathbf{X}^{p \times n} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_{p1} & x_{p2} & \dots & x_{pn} \end{pmatrix}$$

Donde los súper-índices (exponentes) $r \times s$ en una matriz indican que la matriz tiene r renglones y s columnas. Cuando no hay riesgo de ambigüedad se omiten los súper-índices. El conjunto de *ecuaciones* (1.1), toma la forma simple

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}'\beta + \mathbf{e}, \quad (1,4)$$

donde \mathbf{X}' denota la transpuesta de \mathbf{X} .

1.2.1. Matriz de variables aleatorias

Definición, (Scheffé, 1957 [16]): Dada una matriz $\mathbf{V}^{r \times s}$ de variables aleatorias distribuidas de forma conjunta con esperanzas finitas $\{v_{ij}\}$,

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1s} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2s} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ v_{r1} & v_{r2} & \dots & v_{rs} \end{pmatrix}$$

(Scheffé, 1957 [16]) define el valor esperado de la matriz \mathbf{V} como la matriz $E(\mathbf{V})$

$$E(\mathbf{V}) = \begin{pmatrix} E(v_{11}) & E(v_{12}) & \dots & E(v_{1s}) \\ E(v_{21}) & E(v_{22}) & \dots & E(v_{2s}) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ E(v_{r1}) & E(v_{r2}) & \dots & E(v_{rs}) \end{pmatrix}$$

(1,5)

Esta definición permite escribir las condiciones de las *ecuaciones* (1.2) y (1.3) en la forma de matriz condensada

$$E(\mathbf{e}) = \mathbf{0}, \quad E(\mathbf{e}\mathbf{e}') = \sigma^2\mathbf{I}, \quad (1.6)$$

Donde $\mathbf{0}$ es la matriz cero $n \times 1$ e \mathbf{I} es la matriz de identidad $n \times n$.

El modelo de la ecuación (1.4) se resuelve mediante el método de los mínimos cuadrados y de las ecuaciones normales (Scheffé, 1957 [16]).

1.3. Modelo general lineal

El modelo general lineal es una clase genérica de modelos lineales, que amplía la variedad disponible de modelos probabilísticos para errores experimentales y formas no lineales en el modelo. Éste introduce funciones separadas para permitir varianzas heterogéneas y no linealidad, (Kuehl, 2001 [18]).

Si se tienen “ n ” observaciones o mediciones que son los valores que toman las “ n ” variables aleatorias y_1, y_2, \dots, y_n que son combinaciones lineales de “ p ” cantidades desconocidas $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$ más errores e_1, e_2, \dots, e_n .

$$y_{ij} = x_{1i}\beta_1 + x_{2i}\beta_2 + \dots + x_{pi}\beta_p + e_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.7)$$

donde $i = 1, \dots, n$ y las x_{ij} son constantes conocidas. Las β_j son formulaciones idealizadas de algunos aspectos de interés para el investigador con respecto a las observaciones del problema de estudio, donde se cumple igualmente la ecuación (1.6).

1.3.1. Clasificación del modelo según sus x_{ij}

El **análisis de varianza** es un grupo de métodos para analizar observaciones que se supone que tienen una estructura como la del modelo de la *ecuación* (1.7), donde los coeficientes x_{ij} son enteros iguales a 0 o 1.

Se debe tener en cuenta el origen de los x_{ij} en la situación real que se está investigando; es decir, son las variables indicadoras o controlables que se refieren a la presencia o a la ausencia de los “efectos β_j ”⁴ en las condiciones bajo las cuales han sido tomadas las observaciones; en otras palabras, x_{ij} es el número de veces que ocurre β_j en la i -ésima observación y es generalmente 0 ó 1.

Si los x_{ij} fueran los valores que tomaran las observaciones sobre variables continuas como $t =$ tiempo, $T =$ temperatura, etc. Se estaría ante el modelo de *análisis de regresión* y si se tuvieran ambos tipos de variables, se trataría de un modelo de *análisis de covarianza*.

1.3.2. Clasificación del modelo según sus β_j

Si todos los efectos β_j son constantes desconocidas o parámetros, el modelo se conoce como un “modelo de efectos fijos”. Un modelo en el cual todos los β_j son variables aleatorias, excepto una que es una constante aditiva, se conoce como “modelo de efectos aleatorios”. Aquellos casos donde al menos un efecto β_j es una variable aleatoria y al menos otro β_j es una constante no aditiva, se conocen como un “modelo de efectos mixtos”.

1.4. Modelos de diseños factoriales de dos factores

Los modelos de diseño de experimentos factoriales son modelos estadísticos clásicos que tienen por objetivo determinar si uno u otro factor influye en una variable de interés y, si existe dicha influencia de algún factor cuantificarla. La metodología del diseño de experimentos estudia cómo variar las condiciones habituales de realización de un proceso empírico para aumentar la posibilidad de detectar cambios significativos en la respuesta; de esta forma se obtiene un mayor conocimiento del

⁴En diseño de experimentos un **efecto se refiere a un cambio en la respuesta promedio entre combinaciones de los niveles de dos factores o entre dos condiciones experimentales.**

comportamiento del proceso de interés, y hacerlo lo más eficiente posible, a este proceso se le llama experimentación.

Los **modelos de diseños factoriales** son un tipo de diseño experimental en el que hay más de una variable independiente que recibe el nombre de factor, su principal acción es que sirven para valorar el efecto de la interacción, es decir conocer el efecto combinado de las distintas variables.

En definitiva, los diseños factoriales son usados para estudiar los efectos producidos por dos o más factores. Un diseño factorial es aquel en el que se investigan todas las posibles combinaciones de los niveles de los factores en cada ensayo completo o réplica del experimento. Son ampliamente utilizados en experimentos en los que intervienen varios factores para estudiar el efecto conjunto de estos sobre una respuesta.

Por otro lado, el efecto de un factor se define como el cambio en la respuesta producida por un cambio en el nivel del factor, lo cual también es conocido como efecto principal porque se refiere a los factores de interés primordial del experimento. En algunos experimentos puede encontrarse que la diferencia en la respuesta entre los niveles de un factor no es la misma en todos los niveles de los otros factores, cuando esto ocurre quiere decir que existe una interacción entre los factores.

Existen varios casos especiales del diseño factorial general que resultan importantes porque se usan ampliamente en el trabajo de investigación, y además constituyen la base para otros diseños de gran valor práctico. El más importante de estos casos especiales ocurre cuando se tienen k factores, cada uno con dos niveles. Estos niveles pueden ser cuantitativos como sería el caso de dos valores de temperatura, presión o tiempo. También pueden ser cualitativos como sería el caso de dos máquinas, dos operadores, los niveles “superior” e “inferior” de un factor, o quizá, la ausencia o presencia de un factor. Una réplica completa de tal diseño requiere que se recopilen $2 \times 2 \times 2, \dots, \times 2 = 2^k$ observaciones y se conoce como diseño general 2^k , este diseño es particularmente útil en las primeras fases del trabajo experimental, cuando es probable que haya muchos factores por investigar. Conlleva el menor número de corridas con las cuales pueden estudiarse k factores en un diseño factorial completo. Debido a que sólo hay dos niveles para cada factor, debe suponerse que la respuesta es aproximadamente lineal en el intervalo de los niveles elegidos de los factores.

El segundo caso especial es el de k factores con tres niveles cada uno, conocido como

diseño factorial 3^k . En este diseño se supone que: a) los factores son fijos, b) los diseños son completamente aleatorios y c) se satisface la suposición usual de normalidad. Los factores y las interacciones se representan mediante letras mayúsculas. Los tres niveles de los factores pueden referirse como nivel inferior, intermedio y superior. Estos niveles se representan mediante los dígitos 0 (nivel inferior), 1 (intermedio) y 2 (superior). Cada combinación de tratamientos de un diseño 3^k se presenta mediante k dígitos, donde el primero indica el nivel de A , el segundo señale al nivel de B , y el k -ésimo dígito, el nivel del factor k .

La adición de un tercer nivel permite modelar con una relación cuadrática la relación entre la respuesta y cada factor, sin embargo es necesario considerar dos puntos: 1) el diseño 3^k no es el mejor medio para modelar una relación cuadrática, para este caso una mejor alternativa es el uso de superficies de respuesta; 2) el diseño 2^k aumentado con puntos centrales es un excelente medio para obtener una indicación de curvatura. Permite mantener reducidos el tamaño y la complejidad del diseño y al mismo tiempo obtener cierta protección contra la curvatura.

De acuerdo a lo anterior, se concluye que los diseños factoriales son más eficientes que los experimentos de un factor a la vez, ya que, el primero permite observar el comportamiento de una variable bajo todas las condiciones, conocer el efecto principal de los factores y valorar el efecto de interacción, lo cual posibilita producir conclusiones válidas sobre toda la extensión de las condiciones experimentales; además los diseños factoriales son necesarios cuando se sospecha que puede haber alguna interacción entre los factores.

Además, es de vital importancia mencionar que para el **análisis de varianza** los diseños factoriales pueden dividirse en: **modelos de efectos fijos**, **modelos de efectos aleatorios** y **modelos de efectos mixtos**. Si todos los efectos β_j son constantes desconocidas o parámetros, el modelo se conoce como un “modelo de efectos fijos”. Un modelo en el cual todos los β_j son variables aleatorias, excepto una que es una constante aditiva, se conoce como “modelo de efectos aleatorios”. Aquellos casos donde al menos un efecto β_j es una variable aleatoria y al menos otro β_j es una constante no aditiva, se conoce como un “modelo de efectos mixtos”.

		Factor B			
		1	2	...	b
Factor A	1	$y_{111}, y_{112}, \dots, y_{11n}$	$y_{121}, y_{122}, \dots, y_{12n}$		$y_{1b1}, y_{1b2}, \dots, y_{1bn}$
	2	$y_{211}, y_{212}, \dots, y_{21n}$	$y_{221}, y_{222}, \dots, y_{22n}$		$y_{2b1}, y_{2b2}, \dots, y_{2bn}$
	.				
	.				
	a	$y_{a11}, y_{a12}, \dots, y_{a1n}$	$y_{a21}, y_{a22}, \dots, y_{a2n}$		$y_{ab1}, y_{ab2}, \dots, y_{abn}$

Figura 1.1: Disposición general para un diseño bifactorial

1.4.1. Caso general de un diseño con dos factores (Bifactorial)

Suponga que se estudian dos factores A y B . Para el caso general, sea y_{ijk} la respuesta observada cuando el factor A se encuentra en el i -ésimo nivel; donde i toma los valores desde 1 hasta a , j de 1 hasta b y k desde 1 hasta n ; n representa el número de réplicas. En general, las respuestas observadas se verán como se muestran en la figura (1.1). El orden en el cual se toman las abn observaciones es aleatorio, de modo que éste es un diseño completamente aleatorizado.

Las observaciones pueden describirse mediante el modelo estadístico lineal

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + e_{ijk} \begin{cases} i = 1, 2, \dots, a \\ j = 1, 2, \dots, b \\ k = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (1,8)$$

en donde μ es el efecto medio general, τ_i es el efecto del i -ésimo nivel del factor renglón A , β_j , es el efecto del j -ésimo nivel del factor columna B , $(\tau\beta)_{ij}$ es el efecto de la interacción entre τ_i y β_j , y e_{ijk} es el componente del error aleatorio. Inicialmente se supone que ambos factores son fijos y que los factores de tratamiento se definen

como desviaciones de la media general, por lo tanto $\sum_{i=1}^a \tau_i = 0$ y $\sum_{j=1}^b \beta_j = 0$. Se supone que los efectos de interacción son fijos y que se definen de manera que $\sum_{i=1}^a (\tau\beta)_{ij} = 0$. Hay un total de abn observaciones debido a que se realizan n réplicas.

En un diseño factorial de dos factores, tanto los factores (o tratamientos) de renglón como columna tienen la misma importancia. Específicamente el interés consiste en probar hipótesis acerca de la igualdad de los efectos de tratamiento de renglón, es decir,

$$H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_a = 0$$

$$H_1 : \text{al menos una } \tau_i \neq 0$$

y de la igualdad de los efectos de tratamiento de columna

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_b = 0$$

$$H_1 : \text{al menos una } \beta_j \neq 0$$

También es interesante determinar si los tratamientos de renglón y columna interactúan. Por lo cual, resulta conveniente probar

$$H_0 : (\tau\beta)_{ij} = 0 \text{ para toda } i, j$$

$$H_1 : \text{al menos una } (\tau\beta)_{ij} \neq 0$$

1.4.2. Análisis estadístico del modelo de efectos fijos

En el modelo de efectos fijos se supone que tanto el factor A como el factor B son fijos. En otras palabras, que el experimentador ha elegido específicamente los a niveles del factor A y los b niveles del factor B usados en el diseño. En consecuencia, las inferencias hechas con base en el análisis de varianza pueden aplicarse sólo a los niveles específicos de A y B que se probaron.

Según (Mason, Gunst and Hess, 2003 [14]) los supuestos hechos en el modelo de efectos fijos son los que se muestran a continuación.

Supuestos del modelo de efectos fijos

1. Los niveles de todos los factores en el experimento representan sólo los niveles de los que son deseadas las inferencias.
2. El modelo de análisis de varianza contiene parámetros (contantes desconocidas) para todos los efectos principales e interacciones de interés en el experimento.
3. Los errores experimentales son estadísticamente independientes.
4. Los errores experimentales son satisfactoriamente modelados por la distribución de probabilidad normal con media cero y desviación estándar constante (desconocida).

Sea $y_{i..}$ el total de las observaciones bajo el i -ésimo nivel factor A , $y_{.j}$ el total de las observaciones bajo el i -ésimo nivel del factor B , y_{ij} el total de las observaciones de la ij -ésima celda, e $y_{...}$ el total general de todas las observaciones. Se definen $\bar{y}_{i..}$, $\bar{y}_{.j}$, \bar{y}_{ij} y $\bar{y}_{...}$ como los promedios de renglón, columna, celda y general, respectivamente.

Matemáticamente

$$\begin{aligned}
 y_{i..} &= \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n y_{ijk} & \bar{y}_{i..} &= \frac{y_{i..}}{bn} & i &= 1, 2, \dots, a \\
 y_{.j} &= \sum_{i=1}^a \sum_{k=1}^n y_{ijk} & \bar{y}_{.j} &= \frac{y_{.j}}{an} & j &= 1, 2, \dots, b \\
 y_{ij} &= \sum_{k=1}^n y_{ijk} & \bar{y}_{ij} &= \frac{y_{ij}}{n} & i &= 1, 2, \dots, a \quad j = 1, 2, \dots, b \\
 y_{...} &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n y_{ijk} & \bar{y}_{...} &= \frac{y_{...}}{abn}
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

La suma total de cuadrados puede expresarse de forma simbólica mediante la *ecuación (1.9)*:

$$SS_T = SS_A + SS_B + SS_{AB} + SS_E \tag{1.10}$$

Los grados de libertad asociados a cada suma de cuadrados son

Tabla 1.1: Grados de libertad

Efecto	Grados de libertad
A	$a - 1$
B	$b - 1$
Interacción AB	$(a - 1)(b - 1)$
Error	$ab(n - 1)$
Total	$abn - 1$

Esta descomposición del total de abn grados de libertad para las sumas de cuadrados se puede justificar como sigue: Los efectos principales de A y B tienen a y b niveles, respectivamente, por lo tanto, tienen $a - 1$ y $b - 1$ grados de libertad como se muestra. Los grados de libertad de la interacción simplemente corresponden a los grados de libertad de cada celda (los cuales son iguales a $ab - 1$) menos los grados de libertad de los dos efectos principales A y B ; en otras palabras, $ab - 1 - (a - 1) - (b - 1) = (a - 1)(b - 1)$ dentro de cada una de las ab celdas del error. Se observa que la suma de los grados de libertad de los términos del miembro derecho de la ecuación (1.10) es igual al total de los grados de libertad.

Cada suma de cuadrados dividida entre sus grados de libertad produce una *media de cuadrados*. Los valores esperados de las medias de cuadrados son

$$E(MS_A) = E\left(\frac{SS_A}{a - 1}\right) = \sigma^2 + \frac{bn \sum_{i=1}^a \tau_i^2}{a - 1}$$

$$E(MS_B) = E\left(\frac{SS_B}{b - 1}\right) = \sigma^2 + \frac{an \sum_{j=1}^b \beta_j^2}{b - 1}$$

$$E(MS_{AB}) = E\left(\frac{SS_{AB}}{(a - 1)(b - 1)}\right) = \sigma^2 + \frac{n \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\tau\beta)_{ij}^2}{(a - 1)(b - 1)}$$

$$E(MS_E) = E\left(\frac{SS_E}{ab(n - 1)}\right) = \sigma^2$$

Si se considera que el modelo *ecuación (1.8)* es adecuado y que los términos del error e_{ijk} son independientes con distribuciones normales con varianza constante σ^2 , entonces las razones de las medias de cuadrados MS_A/MS_E , MS_B/MS_E y MS_{AB}/MS_E tienen *distribución F* con $a-1$, $b-1$ y $(a-1)(b-1)$ grados de libertad en el numerador, respectivamente, y $ab(n-1)$ grados de libertad en el denominador. Las regiones críticas corresponden al extremo superior de la distribución *F*. El resumen del análisis de varianza se presenta en la *tabla 1.2*.

Por otro lado, es posible obtener las fórmulas para calcular las sumas de cuadrados de la *ecuación (1.10)*. La suma total de cuadrados se calcula en forma usual mediante

$$SS_T = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n y_{ijk}^2 - \frac{y_{...}^2}{abn} \quad (1,11)$$

Las sumas de cuadrados para los efectos principales son

$$SS_A = \sum_{i=1}^a \frac{y_{i..}^2}{bn} - \frac{y_{...}^2}{abn} \quad (1,12)$$

y

$$SS_B = \sum_{j=1}^b \frac{y_{.j.}^2}{an} - \frac{y_{...}^2}{abn} \quad (1,13)$$

Es conveniente obtener SS_{AB} en dos etapas. Primero se calcula la suma de cuadrados entre los totales de las ab celdas, conocida como la suma de cuadrados debido a los “subtotales”.

$$SS_{Subtotales} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \frac{y_{ij.}^2}{n} - \frac{y_{...}^2}{abn}$$

Esta suma de cuadrados contiene a la SS_A y SS_B . Por lo tanto, la segunda etapa consiste en calcular SS_{AB} mediante

Tabla 1.2: ANOVA para el modelo bifactorial de efectos fijos

Fuente de variación	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Cuadrado medio	F_0
Tratamientos A	SS_A	$a - 1$	$MS_A = \frac{SS_A}{a-1}$	$F_0 = \frac{MS_A}{MS_E}$
Tratamientos B	SS_B	$b - 1$	$MS_B = \frac{SS_B}{b-1}$	$F_0 = \frac{MS_B}{MS_E}$
Interacción	SS_{AB}	$(a - 1)(b - 1)$	$MS_{AB} = \frac{SS_{AB}}{(a-1)(b-1)}$	$F_0 = \frac{MS_{AB}}{MS_E}$
Error	SS_E	$ab(n - 1)$	$MS_E = \frac{SS_E}{ab(n-1)}$	
Total	SS_T	$abn - 1$		

$$SS_{AB} = SS_{Subtotales} - SS_A - SS_B \quad (1,14)$$

La SS_E se calcula por diferencia

$$SS_E = SS_T - SS_{AB} - SS_A - SS_B \quad (1,15)$$

o bien,

$$SS_E = SS_T - SS_{Subtotales}$$

1.4.3. Análisis estadístico del modelo de efectos aleatorios

Anteriormente en la sección 1.4.2 se suponía que tanto el factor A como el factor B son fijos, ahora se considerará un modelo alternativo: el modelo de efectos aleatorios en el que los niveles de A y B son seleccionados al azar.

Se considera la situación en la que los niveles de los factores A y B se eligen al azar de poblaciones más grandes. Éste es el modelo de efectos aleatorios o de componentes de variación. Las inferencias pueden generalizarse a todos los niveles de las poblaciones bajo estudio, porque los a niveles de A y los b niveles de B se eligieron al azar. Las observaciones se pueden representar mediante el modelo lineal

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + e_{ijk} \begin{cases} i = 1, 2, \dots, a \\ j = 1, 2, \dots, b \\ k = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (1,16)$$

en donde los parámetros del modelo τ_i , β_j , $(\tau\beta)_{ij}$ y e_{ijk} son variables aleatorias. Específicamente, se supone que τ_i es NID($0, \sigma_\tau^2$), β_j es NID($0, \sigma_\beta^2$), $(\tau\beta)_{ij}$ es NID($0, \sigma_{\tau\beta}^2$), y e_{ijk} es NID($0, \sigma^2$). La varianza de cualquier observación es

$$V(y_{ijk}) = \sigma_\tau^2 + \sigma_\beta^2 + \sigma_{\tau\beta}^2 + \sigma^2$$

y σ_τ^2 , σ_β^2 , $\sigma_{\tau\beta}^2$ y σ^2 se conocen como *componentes de varianza*. Las hipótesis que deben probarse son $H_0 : \sigma_\tau^2 = 0$, y $H_0 : \sigma_\beta^2 = 0$, y $H_0 : \sigma_{\tau\beta}^2 = 0$.

El análisis de varianza básico permanece sin cambios; en otras palabras, SS_A , SS_B , SS_{AB} , SS_T y SS_E se calculan como en el modelo de efectos fijos. Sin embargo, para determinar las estadísticas con objeto de probar las hipótesis, deben examinarse antes los valores esperados de las medias de cuadrados. Es posible demostrar que

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(MS_A) &= \sigma^2 + n\sigma_{\tau\beta}^2 + bn\sigma_\tau^2 \\ \mathbf{E}(MS_B) &= \sigma^2 + n\sigma_{\tau\beta}^2 + an\sigma_\beta^2 \\ \mathbf{E}(MS_{AB}) &= \sigma^2 + n\sigma_{\tau\beta}^2 \end{aligned} \quad (1,17)$$

y

$$\mathbf{E}(MS_E) = \sigma^2$$

A partir de estos valores esperados, puede apreciarse que la estadística apropiada para probar la hipótesis $H_0 : \sigma_{\tau\beta}^2 = 0$ y es

$$F_0 = \frac{MS_{AB}}{MS_E} \quad (1,18)$$

porque si la hipótesis nula es verdadera, tanto el numerador como el denominador de F_0 tienen valor esperado igual a σ^2 y sólo si H_0 es falsa $\mathbf{E}(MS_{AB})$ será mayor que

$\mathbf{E}(MS_E)$. La razón F_0 tiene una distribución $F_{(a-1)(b-1), ab(n-1)}$. En forma similar, para probar $H_0 : \sigma_\tau^2 = 0$ debe usarse

$$F_0 = \frac{MS_A}{MS_{AB}} \quad (1,19)$$

que tiene una distribución $F_{a-1, (a-1)(b-1)}$; para probar $H_0 : \sigma_\beta^2 = 0$ la estadística debe ser

$$F_0 = \frac{MS_B}{MS_{AB}} \quad (1,20)$$

que tiene una distribución $F_{b-1, (a-1)(b-1)}$. Todas estas son pruebas unilaterales del extremo superior. Las estadísticas para realizar las pruebas no son las mismas que las usadas si los factores A y B son fijos.

Los supuestos hechos en el modelo de efectos aleatorios son los que se muestran a continuación, (Mason, Gunst and Hess, 2003 [14]).

Supuestos del modelo de efectos aleatorios

1. Los niveles de todos los factores en el experimento representan sólo un subconjunto aleatorio de los posibles niveles de los factores de interés.
2. El modelo de análisis de varianza contiene variables aleatorias representando efectos principales e interacciones. Estas variables aleatorias son asumidas como estadísticamente independientes.
3. Los errores experimentales son estadísticamente independientes de cada uno de los otros y de los términos del modelo de efectos aleatorios.
4. Los términos del modelo de cada efecto principal, cada interacción y los errores experimentales son modelados satisfactoriamente por distribuciones de probabilidad normal, que tienen media cero, pero posiblemente desviaciones estándar diferentes.

1.4.4. Análisis estadístico del modelo de efectos mixtos

A continuación se considera la situación en la que uno de los factores A es fijo, mientras que el otro B es aleatorio. Este se denomina *modelo mixto* del análisis de varianza. El modelo estadístico lineal es

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + e_{ijk} \begin{cases} i = 1, 2, \dots, a \\ j = 1, 2, \dots, b \\ k = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (1,21)$$

En esta ecuación τ_i es un efecto fijo, β_j es un efecto aleatorio, se supone que la interacción $(\tau\beta)_{ij}$ es un efecto aleatorio y que e_{ijk} es el error aleatorio. También se supone que las $\{\tau\}$ son efectos fijos, de manera que $\sum_{i=1}^a \tau_i = 0$ y β_j es una variable aleatoria NID($0, \sigma_\beta^2$). El efecto de interacción $(\tau\beta)_{ij}$ es una variable con distribución normal con media cero y varianza $[(a-1)/a]\sigma_{\tau\beta}^2$. Sin embargo, la suma del componente de la interacción sobre el factor fijo es igual a cero. En otras palabras,

$$\sum_{i=1}^a (\tau\beta)_{ij} = (\tau\beta)_{.j} = 0 \quad j = 1, 2, \dots, b$$

Esto significa que a diferentes niveles del factor fijo ciertos elementos de la interacción no son independientes. En este modelo la varianza de $(\tau\beta)_{ij}$ se define mediante $[(a-1)/a]\sigma_{\tau\beta}^2$ en lugar de $\sigma_{\tau\beta}^2$. Esto se hace con el propósito de simplificar los valores esperados de las medias de cuadrados.

La estadística apropiada para probar $H_0 : \tau_i = 0$ es

$$F_0 = \frac{MS_A}{MS_{AB}}$$

que tiene una distribución $F_{a-1, (a-1)(b-1)}$. Para probar $H_0 : \sigma_{\tau\beta}^2 = 0$, la estadística correspondiente debe ser

$$F_0 = \frac{MS_B}{MS_E}$$

cuya distribución es $F_{b-1, (a-1)(b-1)}$. Finalmente, para probar $H_0 : \sigma_{\tau\beta}^2 = 0$ se debe usar

$$F_0 = \frac{MS_{AB}}{MS_E}$$

que tiene una distribución $F_{(a-1)(b-1), ab(n-1)}$.

1.5. Modelos de diseños factoriales a dos niveles

En la sección 1.4 se vieron los métodos para el análisis de varianza de diseños factoriales de dos factores. En esta sección se discute la generación y análisis de los diseños factoriales a dos niveles (en los que cada variable ocurre únicamente a dos niveles). Estos diseños son importantes por varias razones: requieren relativamente pocos experimentos elementales por cada factor, y a pesar de que no permiten explorar exhaustivamente una amplia región del espacio de los factores pueden indicar las tendencias y así determinar una dirección prometedora para futuros experimentos, cuando se necesita una exploración más completa se pueden aumentar de modo apropiado para formar diseños compuestos, además éstos constituyen la base para otros diseños de gran valor práctico.

El número de niveles de cada factor determina el tipo de función matemática que se puede estimar. Así, los factoriales 2^k , conocido también como diseño de primer orden, permiten fijar un polinomio de primer grado.

1.5.1. Diseño factorial 2^2

El primer diseño de la serie 2^k (el número 2 representa la cantidad de niveles de cada factor k) es aquel que tiene sólo dos factores, A y B , cada uno con dos niveles. Este diseño se conoce como diseño factorial 2^2 . Arbitrariamente, los niveles del factor pueden llamarse “inferior” y “superior”, por cuestiones prácticas también se representan con los signos $-$ y $+$. En la *tabla 1.3* se muestra la matriz de diseño, en esta tabla se representan los efectos⁵ del factor A y del factor B , así como la

⁵Los efectos para factores a dos niveles son: 1) **Efecto principal**. Es la diferencia entre las respuestas promedio en los dos niveles de un factor; 2) **Interacción de dos factores**. Mitad de

Tabla 1.3: Matriz de diseño para un factorial 2^2

No.de experimento	Factor A	Factor B	AB	Resp. promedio
1	-	-	+	\bar{y}_{11}
2	+	-	-	\bar{y}_{12}
3	-	+	-	\bar{y}_{21}
4	+	+	+	\bar{y}_{22}

interacción⁶ de estos dos factores.

1.5.2. Cálculo de efectos de factores

Como ya se definió anteriormente, un *efecto* es un cambio en la respuesta promedio correspondiente a un cambio en las combinaciones de los niveles de los factores o a un cambio en las condiciones experimentales.

En diseño de experimentos, los factores se denotan con por letras latinas mayúsculas: A, B, C, \dots, K . Una respuesta individual es representada generalmente por y teniendo uno o más sub-índices, estos sub-índices indican la combinación específica de los niveles de los factores de los cuales se obtiene dicha respuesta. También hay uno o más sub-índices para designar observaciones repetidas para niveles de factores fijos. Por ejemplo, las respuestas de un experimento de tres factores con r pruebas repetidas por cada combinación de los niveles de los factores debería ser denotado por y_{ijkl} , con $i = 1, 2, \dots, a$, $j = 1, 2, \dots, b$, $k = 1, 2, \dots, c$ y $l = 1, 2, \dots, r$. Los límites a , b , c , y r de los sub-índices denotan el número de niveles de los tres factores A , B , C y el número de observaciones repetidas, respectivamente.

Las respuestas promedio son representadas sustituyendo uno o más de los sub-índices por un punto y poniendo una barra sobre el símbolo de la respuesta.

$$\bar{y}_{\dots} = n^{-1} \sum_{ijkl} y_{ijkl} \quad (1,22)$$

la diferencia entre los efectos principales de un factor en los dos niveles de un segundo factor.

⁶Existe una **interacción** entre dos o más factores si el efecto de un factor sobre una respuesta depende de los niveles de los otros factores.

Denota la respuesta promedio total para un experimento de tres factores con pruebas repetidas, donde $n = abc$ y la suma es sobre todas las observaciones (todos los posibles valores de los sub-índices). De forma similar,

$$\bar{y}_{i\dots} = (bcr)^{-1} \sum_{jkl} y_{ijkl} \quad (1,23)$$

es la respuesta promedio para todas las respuestas que tienen el nivel i -ésimo del factor A . El símbolo $\bar{y}_{2,1}$ denota la respuesta promedio para todas las corridas de prueba que tienen el segundo nivel del primer factor y el primer nivel del tercer factor.

Ahora se considera un experimento factorial en el que cada factor tiene dos niveles y r observaciones repetidas para cada combinación de niveles de los factores. Las combinaciones de niveles de factores en el experimento pueden ser representadas en varias formas equivalentes. Una forma útil de representar las combinaciones de niveles de los factores es usando la *representación de efectos*. Esta representación se hace codificando los niveles de los factores, en este caso, el signo $-$ se usa para representar el nivel bajo y el signo $+$ para representar el nivel alto de los factores. La codificación de los efectos de la interacción es similar a la de los efectos de los factores individuales, los elementos de la columna de interacción son el producto de los elementos individuales en las columnas del factor A y el factor B , estas ideas son resumidas en la *tabla 1.3*, donde además se muestra la respuesta promedio simbólica.

Ahora se considerará el efecto principal para el factor A , denotado por $M(A)$, para un experimento a dos niveles con pruebas repetidas. De la definición de un efecto principal como la diferencia en la respuesta promedio en cada nivel de un factor, el efecto principal para A puede ser calculado como

$$M(A) = \bar{y}_{2..} - \bar{y}_{1..} = \frac{-\bar{y}_{11.} - \bar{y}_{12.} + \bar{y}_{21.} + \bar{y}_{22.}}{2} \quad (1,24)$$

Note que los signos de las respuestas promedio para este efecto principal son los mismos que se encuentran en la *tabla 1.3* para el factor A . De la misma forma ocurre con el factor B .

$$M(B) = \frac{-\bar{y}_{11.} + \bar{y}_{12.} - \bar{y}_{21.} + \bar{y}_{22.}}{2} \quad (1,25)$$

La definición de un efecto de interacción de dos factores se refiere a que es la mitad de la diferencia entre los efectos principales para uno de los factores a los dos niveles del otro factor. El efecto principal para el factor A en cada nivel del factor B es calculado de la forma siguiente, para el nivel bajo del factor B :

$$M(A)_{j=1} = \bar{y}_{21.} - \bar{y}_{11.} \quad (1,26)$$

y para el nivel alto del factor B

$$M(A)_{j=2} = \bar{y}_{22.} - \bar{y}_{12.} \quad (1,27)$$

Para estos efectos la interacción entre los factores A y B , es denotada por $I(AB)$, y puede ser calculada como

$$I(AB) = \frac{M(A)_{j=2} - M(A)_{j=1}}{2} = \frac{(\bar{y}_{22.} - \bar{y}_{12.}) - (\bar{y}_{21.} - \bar{y}_{11.})}{2} \quad (1,28)$$

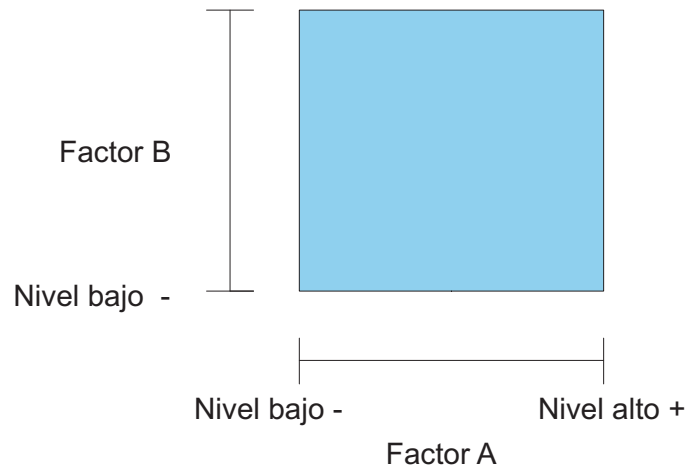
Los signos en las respuestas promedio para este efecto de interacción son los mismos que aquellos en la columna AB de la *tabla 1.3*.

Las fórmulas para los efectos de A , B , y AB pueden también deducirse por otro método con el cual se llega a las mismas ecuaciones presentadas anteriormente. Este otro método se presenta a continuación.

El efecto promedio de un factor se define como el cambio en la respuesta producida por un cambio en el nivel de ese factor, promediado sobre los niveles del otro factor. Como se ilustra en la *figura (1.1)*, las letras minúsculas (1) , a , b , ab también se usan para representar los totales de n réplicas de las combinaciones de tratamientos correspondientes. Ahora bien, el efecto de A en el nivel inferior de B es $[a - (1)]/n$, mientras que en el nivel superior de B es $[ab - b]/n$. Tomando el promedio de estas dos cantidades se obtiene

$$A = \frac{1}{2n}[(ab - b) + (a - (1))] = \frac{1}{2n}(ab + a - b - (1)) \quad (1,29)$$

El efecto promedio de B se determina a partir de su efecto en el nivel inferior de A (esto es $[b - (1)]/n$), y su efecto en el nivel superior de A (que es igual a $[ab - a]/n$) obteniéndose

Figura 1.2: Combinaciones de tratamientos en el diseño 2^2

$$B = \frac{1}{2n}[(ab - a) + (b - (1))] = \frac{1}{2n}(ab + b - a - (1)) \quad (1,30)$$

El efecto de interacción AB se define como la diferencia promedio entre el efecto de A en el nivel superior de B y su efecto en el nivel inferior de B . Así

$$AB = \frac{1}{2n}[(ab - b) - (a - (1))] = \frac{1}{2n}(ab + (1) - a - b) \quad (1,31)$$

Por otro lado, se puede definir AB como la diferencia promedio entre el efecto de B en el nivel superior de A y el efecto de B en el nivel inferior de A , lo cual conduce a la misma ecuación (1.31). La figura (1.2) muestra las combinaciones de tratamientos en el diseño 2^2

En muchos experimentos que implican diseños 2^k se examina la magnitud y dirección de los efectos de los factores para determinar cuáles variables es probable que sean importantes. Por lo general, puede emplearse el análisis de varianza para confirmar esta interpretación. En el diseño 2^k existen algunos métodos rápidos especiales para realizar los cálculos del análisis de varianza. Se considera la suma de cuadrados para A , B y AB . A partir de la ecuación (1.29) se utiliza un contraste para estimar A ; esto es,

$$\text{contraste}_A = ab + a - b - (1)$$

Este contraste suele llamarse efecto *total* de A . A partir de las *ecuaciones* (1.30) y (1.31), puede apreciarse que también se usan contrastes para estimar B y AB . Además estos contrastes son ortogonales. La suma de cuadrados de un contraste es igual al contraste elevado al cuadrado entre el producto del número de las observaciones de cada total del contraste por la suma de los cuadrados de los coeficientes del mismo. En consecuencia, se obtiene que las sumas de cuadrados de A , B y AB son

$$SS_A = \frac{[ab + a - b - (1)]^2}{n \times 4} \quad (1,32)$$

$$SS_B = \frac{[ab + b - a - (1)]^2}{n \times 4} \quad (1,33)$$

y

$$SS_{AB} = \frac{[ab + (1) - a - b]^2}{n \times 4} \quad (1,34)$$

respectivamente.

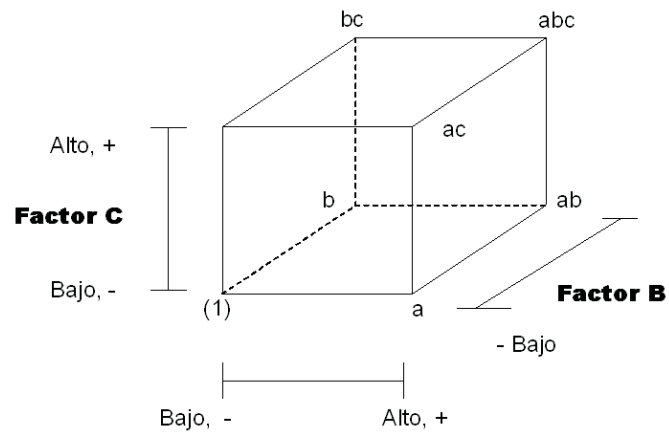
1.5.3. Diseño factorial 2^3

Supóngase ahora que se encuentran en estudio tres factores A , B y C , cada uno con dos niveles. Este diseño se conoce como diseño factorial 2^3 y las ocho combinaciones de tratamientos pueden representarse gráficamente mediante un cubo, como se muestra en la *figura* (1.3). El orden estándar de las combinaciones de tratamientos sería (1), a, b, ab, c, ac, bc, y abc, como se muestra en la *tabla* 1.4.

Existen siete grados de libertad entre las ocho combinaciones de tratamientos en el diseño 2^3 . Tres de esos grados de libertad se asocian con los efectos principales de A , B y C . Cuatro se asocian con interacciones (AB, AC, BC y ABC), uno para cada una.

Tabla 1.4: Matriz de diseño para un factorial 2^3

No. de experimento	Factor A	Factor B	Factor C	Combinación de tratamientos
1	-	-	-	(1)
2	+	-	-	a
3	-	+	-	b
4	+	+	-	ab
5	-	-	+	c
6	+	-	+	ac
7	-	+	+	bc
8	+	+	+	abc

Figura 1.3: Diseño factorial 2^3

Los efectos principales para cada uno de los tres factores se calculan como se presenta a continuación

$$A = \frac{1}{4n}[a - (1) + ab - b + ac - c + abc - bc] \quad (1,35)$$

Esta ecuación también puede deducirse como un contraste entre las cuatro combinaciones de tratamientos de la cara derecha del cubo de la *figura 1.3* y las cuatro de la izquierda, y la ecuación resultante es de la siguiente forma

$$A = \frac{1}{4n}[a + ab + ac + abc - (1) - b - c - bc]$$

que es idéntica a la *ecuación (1.35)*

En forma similar, el efecto de B es un contraste entre las cuatro combinaciones de tratamientos de la cara anterior del cubo y las de la cara posterior. Esto conduce a

$$B = \bar{y}_{B^+} - \bar{y}_{B^-} = \frac{1}{4n}[b + ab + bc + abc - (1) - a - c - ac] \quad (1,36)$$

El efecto C es un contraste entre las cuatro combinaciones de tratamientos en la cara superior del cubo y las de la cara inferior; esto es

$$C = \bar{y}_{C^+} - \bar{y}_{C^-} = \frac{1}{4n}[c + ac + bc + abc - (1) - a - b - ab] \quad (1,37)$$

Los efectos de la interacción de dos factores pueden calcularse de la siguiente forma

$$AB = \frac{[abc - bc + ab - b - ac + c - a + (1)]}{4n} \quad (1,38)$$

$$AC = \frac{1}{4n}[(1) - a + b - ab - c + ac - bc + abc] \quad (1,39)$$

$$BC = \frac{1}{4n}[(1) + a - b - ab - c - ac + bc + abc] \quad (1,40)$$

La interacción ABC se define como la diferencia promedio entre la interacción AB para los dos niveles distintos de C . De este modo,

$$ABC = \frac{1}{4n}((abc - bc) - (ac - c) - (ab - b) + (a - (1))) \quad (1,41)$$

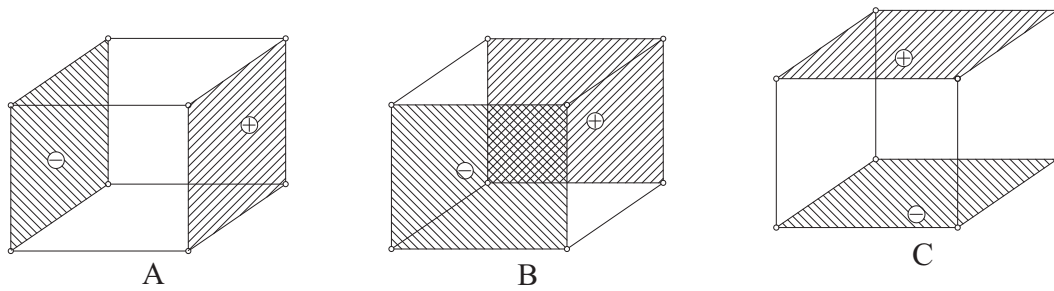


Figura 1.4: Contrastes correspondientes a efectos principales

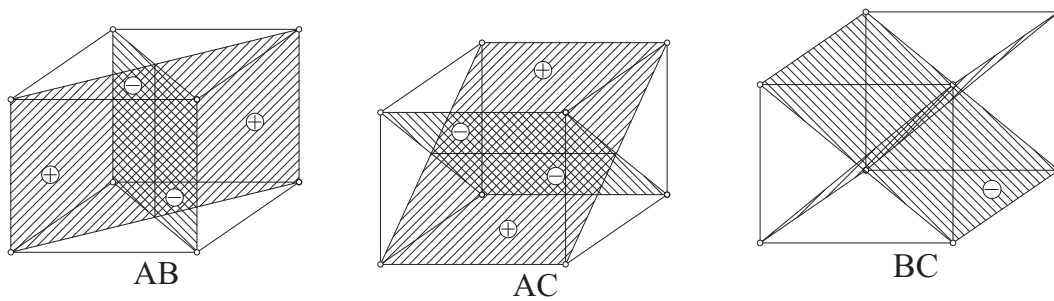


Figura 1.5: Contrastes correspondientes a la interacción de dos factores

1.5.4. Representación geométrica de los contrastes (efectos principales e interacciones)

La representación geométrica de los contrastes correspondientes a los efectos principales, interacción de dos factores y la interacción de tres factores en el diseño 2^3 se realiza como se muestra en las *figuras (1.4), (1.5) y (1.6)*, respectivamente.

1.6. Superficies de respuesta

Los modelos de superficies de respuesta, (MSR o RSM, por sus siglas en inglés) son un conjunto de técnicas matemáticas y estadísticas útiles para modelar y analizar problemas en los cuales una respuesta de interés es influida por varias variables, y el objetivo es optimizar la respuesta.

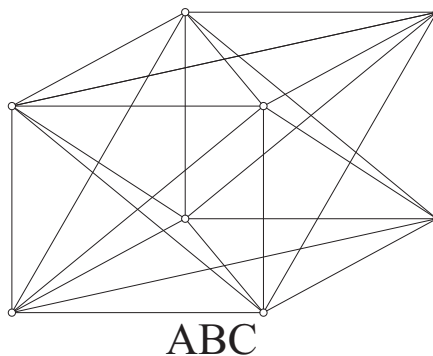


Figura 1.6: Contrastes correspondientes a la interacción de tres factores

Los RSM fueron introducidos por (Box y Wilson, 1951 [9]) y es una colección de técnicas que permiten al investigador inspeccionar una respuesta, que se puede mostrar como una superficie, cuando los experimentos investigan el efecto que tiene el variar factores cuantitativos en los valores que toma una variable dependiente o respuesta. Se trata de encontrar los valores óptimos para las variables independientes que maximizan, minimizan o cumplen ciertas restricciones en la variable de respuesta.

Los RSM son una técnica secuencial, esto es, la aproximación a la región de interés se realiza de forma iterativa utilizando diseños cada vez más complejos que dependen de la información que se obtiene en cada etapa.

Con frecuencia, la estimación inicial de las condiciones de operación óptimas para un sistema estará alejada del óptimo real. En tales circunstancias, el objetivo del experimento es moverse rápidamente a la vecindad general del óptimo. En la lejanía de un óptimo, generalmente se supone que un modelo de primer orden es una aproximación adecuada a la superficie real en regiones pequeñas de las x . El método de máxima pendiente con ascenso es un procedimiento para recorrer secuencialmente a lo largo de la trayectoria de la máxima pendiente, es decir, en la dirección del máximo incremento en la respuesta, si se desea la minimización se hablará del método de máxima pendiente en descenso.

La representación matemática de los modelos de MSR puede ser de diversas maneras:

1. Un modelo de primer orden (lineal) sin interacciones o productos cruzados:

$$y = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i x_i + e \quad (1,42)$$

2. El modelo lineal de primer orden con interacciones:

$$y = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i x_i + \sum_{j=2}^k \sum_{i=1}^{j-1} \beta_{ij} x_i x_j + e \quad (1,43)$$

3. y el modelo cuadrático o de segundo orden:

$$y = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i x_i + \sum_{j=2}^k \sum_{i=1}^{j-1} \beta_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^k \beta_{ii} x_i^2 + e \quad (1,44)$$

donde e representa el ruido o el error observado en la respuesta y .

En los modelos de superficies de respuesta se supone que la variable de respuesta y está en función de los niveles de los factores cuantitativos representados por las variables x_1, x_2, \dots, x_k . Los modelos polinomiales se utilizan como una aproximación a la función de respuesta real, y generalmente son buenas aproximaciones cuando se trabaja en pequeñas zonas de los factores cuantitativos.

Cuando se trabaja con dos factores el modelo lineal ajustado de primer orden es

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 \quad (1,45)$$

Si el modelo anterior se convierte en un modelo de segundo orden, el modelo ajustado sería

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \hat{\beta}_{11} x_1^2 + \hat{\beta}_{22} x_2^2 + \hat{\beta}_{12} x_1 x_2 \quad (1,46)$$

Debido a la curvatura de la superficie real, el experimentador requiere de un modelo cuyo grado sea mayor o igual a 2, para aproximar la respuesta cuando se encuentra relativamente cercana al óptimo. En la mayoría de los casos, el modelo de segundo orden de la ecuación (1.46) es adecuado.

El ajuste y análisis de superficies de respuesta se facilitan en gran medida con la elección apropiada de un diseño experimental. Hay una clase única de diseños que minimizan la varianza de los coeficientes de regresión $\{\hat{B}_i\}$. Éstos son los diseños ortogonales de primer orden. Un diseño de primer orden es ortogonal si los elementos de la diagonal de la matriz $(X'X)$ son iguales a cero. Esta clase de diseños ortogonales de primer orden incluye diseños factoriales 2^k y fraccionarios de la serie 2^k . Por otro lado, para ajustar un modelo de segundo orden el diseño elegido debe tener por lo menos tres niveles de cada factor. Existen muchos diseños que podrían emplearse para ajustar un modelo de segundo orden, sin embargo el más adecuado es el diseño compuesto central.

1.7. Análisis del capítulo

En este capítulo, se resume la parte teórica de los modelos lineales que posteriormente son usados para el desarrollo del capítulo III. Los *modelos de análisis de varianza* desarrollados por (Fisher, 1918, 1925, 1935, [15]), son una técnica para analizar medidas dependiendo de varias clases de efectos operando de forma simultánea, para decidir qué clase de efectos son importantes y poderlos estimar. Estos modelos separan o reparten la variación observable en una variable de respuesta con dos componentes básicos: variación debida a cambios en factores experimentales y variación aleatoria, debida a efectos incontrolables.

Otro de los modelos que se presentan en este capítulo es el *modelo lineal general*, desarrollado por Nelder y Webberburn que amplía la variedad disponible de modelos probabilísticos para errores experimentales y formas no lineales en el modelo, además introduce funciones separadas para permitir varianzas heterogéneas y no linealidad. El modelo lineal general se clasifica de acuerdo a los coeficientes x_{ij} y los efectos β_j , los x_{ij} son las variables indicadoras o controlables que se refieren a la presencia o ausencia de efectos en las condiciones bajo las cuales han sido tomadas las observaciones. Por otro lado, si los efectos β_j son constantes desconocidas, el modelo se conoce como “modelo de efectos fijos”; un modelo en el cual todos los β_j son variables aleatorias, excepto una que es una constante aditiva, se conoce como “modelo de efectos aleatorios”. Existen otros casos donde al menos un efecto β_j es una variable aleatoria y al menos otro β_j es una contante no aditiva, a éstos se les llama “modelos de efectos mixtos”.

En el estudio de diseño de experimentos, los diseños factoriales son de gran impor-

tancia. Estos modelos estudian cómo variar las condiciones habituales de realización de un proceso empírico para aumentar la posibilidad de detectar cambios significativos en la respuesta. Por otro lado, los diseños factoriales son modelos estadísticos que tienen por objetivo determinar si uno u otro factor influye en una variable de interés, en éste se investigan todas las posibles combinaciones de los niveles de los factores en cada réplica del experimento. Uno de los casos especiales de los diseños factoriales y que es generalmente el más usado en los trabajos de investigación es el que tiene k factores, cada uno a dos niveles (2^k); otro caso especial es 3^k , el cual cuenta con k factores, cada uno a tres niveles. Dentro del diseño de experimentos, los modelos de superficies de respuesta también juegan un papel importante, puesto que son útiles para modelar y analizar problemas donde una respuesta de interés es influida por varias variables, y el objetivo es optimizar la respuesta. Estos modelos permiten encontrar los valores óptimos para las variables independientes que maximizan, minimizan o cumplen ciertas restricciones en la variable de respuesta. La representación matemática de los modelos de superficies se realiza por medio de modelos lineales o de primer orden con o sin interacciones, estos se usan en la primera etapa de la investigación, en la segunda etapa se usan los modelos de segundo orden, cuando se está seguro que existe curvatura.

Capítulo 2

LA SIMULACIÓN DIGITAL

2.1. Introducción

La *simulación* digital es una técnica que permite imitar (o simular) en un ordenador (computadora) el comportamiento de un sistema real o hipotético según ciertas condiciones particulares de operación. Para estudiar, analizar y mejorar el comportamiento de un sistema mediante las técnicas de simulación digital es necesario primero describir bajo un cierto formalismo el conocimiento que se tiene sobre las dinámicas de interés (modelo conceptual), y luego codificarlo en un entorno de simulación para poder realizar experimentos y analizar los resultados.

Para poder comprender toda la realidad y toda la complejidad que un sistema puede conllevar, ha sido necesario construir artificialmente objetos y experimentar con ellos dinámicamente antes de interactuar con el sistema real. La simulación digital puede verse como el equivalente computarizado a este tipo de experimentación. Para lo cual, es necesario construir objetos (modelos) que representen la realidad, de tal modo que puedan ser interpretados por un ordenador.

Las operaciones, procesos o servicios de varias clases que existen en el mundo real (o de forma hipotética) son normalmente llamados *sistemas* y para estudiarlos de forma científica frecuentemente se hace un conjunto de suposiciones acerca de cómo éstos trabajan. Estas suposiciones, que normalmente toman la forma de relaciones

matemáticas o lógicas constituyen un *modelo* que es usado para intentar ganar algún entendimiento de cómo se comporta el sistema correspondiente.

Si las relaciones que componen el modelo son bastante simples, puede ser posible usar métodos matemáticos (tales como, cálculo, o teoría de probabilidad) para obtener información exacta en cuestiones de interés, a esto se le llama solución *analítica*. Sin embargo, la mayoría de sistemas del mundo real son complejos, por lo que, éstos deben ser estudiados por medio de simulación para permitir que éstos modelos sean realistas y puedan ser evaluados de forma analítica.

En una simulación se usa una computadora para evaluar un modelo de forma numérica, y los datos son recogidos para estimar las características deseadas del modelo.

Las áreas de aplicación de la simulación son numerosas y diversas; es usual encontrar aplicaciones en ingeniería, economía, medicina, biología, ecología o ciencias sociales. Algunas clases particulares de problemas para los que la simulación es útil son:

1. Diseño y análisis de sistemas de manufactura
2. Evaluación de sistemas de armas militares o sus requerimientos logísticos
3. Determinación de requerimientos de hardware o protocolos para redes de comunicación
4. Determinación de requerimientos de hardware y software para un sistema de computadora
5. Diseño y operación de sistemas de transporte, tales como aeropuertos, autopistas, puertos, y metros.
6. Evaluación de diseños para organizaciones de servicios tales como, call centers, restaurantes de comida rápida, hospitales y oficinas postales
7. Reingeniería de procesos de negocios
8. Determinación de políticas de pedidos para un sistema de inventarios
9. Análisis financiero o de sistemas económicos.

2.2. Sistemas, modelos y simulación

Un *sistema* puede definirse como una colección de entidades, por ejemplo, personas o máquinas que actúan e interactúan juntas hacia la realización de algún fin lógico (esta definición fue propuesta por Schmidt y Taylor (1970)). En la práctica el significado de sistema depende de los objetivos de un estudio particular. La colección de entidades que comprende un sistema para un estudio puede ser sólo un subconjunto del sistema total para otro. Se define el *estado* de un sistema como la colección de variables necesarias para describir todos aquellos aspectos de interés del sistema en un cierto instante de tiempo, relativo a los objetivos de estudio. A estas variables se les denomina variables de estado, cabe reiterar que el número y tipo de éstas vienen condicionados por los objetivos de estudio.

Los sistemas pueden clasificarse en dos tipos, sistemas discretos y sistemas continuos. Un sistema *discreto* es aquel en el que las variables de estado cambian instantáneamente en puntos separados en el tiempo. Es decir, se caracterizan en que las propiedades de interés del sistema cambian únicamente en un cierto instante o secuencia de instantes, y permanecen constantes el resto del tiempo. La secuencia de instantes en los cuales el estado del sistema puede presentar un cambio obedece a un patrón periódico. Un banco es un ejemplo de un sistema discreto, puesto que las variables de estado (por ejemplo, el número de clientes en el banco) cambian sólo cuando un cliente llega o cuando un cliente ha sido terminado de ser atendido y se va. Un sistema *continuo* es aquel en el que las variables de estado cambian continuamente con respecto al tiempo. Es decir, evolucionan de modo continuo a lo largo del tiempo. Un ejemplo de este tipo de sistemas es la evolución de la temperatura en una habitación durante cualquier intervalo de tiempo. O bien, un avión moviéndose en el aire, puesto que las variables de estado, tales como posición y velocidad cambian continuamente con respecto al tiempo. En la práctica, pocos sistemas son completamente continuos o completamente discretos.

En algún punto en la vida de la mayoría de los sistemas, hay necesidad de estudiarlos para intentar ganar perspicacia en las relaciones entre varios componentes, o para predecir el rendimiento bajo algunas nuevas condiciones que estén siendo consideradas. En la *figura 2.1* se muestran las diferentes formas en que un sistema puede ser estudiado.

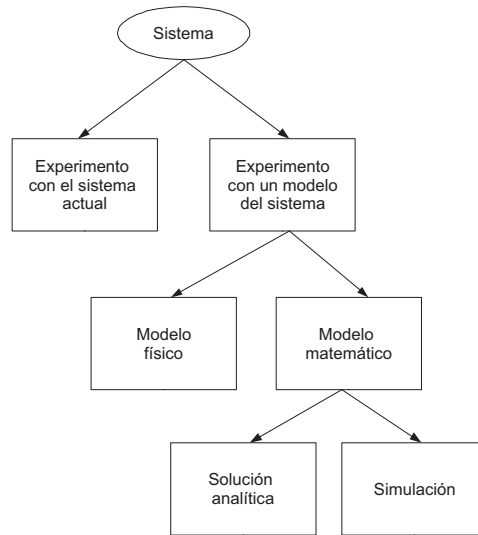


Figura 2.1: Formas para estudiar un sistema

2.2.1. Experimentos con el sistema actual vs Experimentos con un modelo del sistema

Si es posible (y el costo es accesible) alterar el sistema de forma física y puede operarse bajo las nuevas condiciones, es deseable probablemente hacerlo, en este caso no hay preguntas acerca de si el estudio es válido. Sin embargo, rara vez es factible hacerlo, debido a que un experimento frecuentemente es costoso y además la mayoría de las veces no es conveniente interrumpir el sistema actual. Por ejemplo, un banco puede considerar reducir el número de cajeros para reducir costos, pero generalmente esto podría conducir a una gran demora de los clientes. Por otro lado, el sistema podría incluso no existir, sin embargo, se desea estudiarlo en sus diferentes configuraciones alternativas propuestas para ver cómo debería ser construido en la primera etapa. Ejemplos de esta situación pueden ser un sistema de redes de comunicaciones propuesta o un sistema de armas nucleares estratégico. Por estas razones, normalmente es necesario construir un *modelo* como una representación del sistema y estudiarlo como un partador de la información del sistema actual. Cuando se usa un modelo siempre hay preguntas acerca de si el modelo es una representación exacta del sistema para el propósito de las decisiones que serán hechas.

2.2.2. Modelo físico vs Modelo matemático

Algunas veces al escuchar la palabra “modelo” llegamos a evocar imágenes de prototipos o figuras a escala que intentan representar el sistema actual, por ejemplo, miniaturas de carros que se mueven a través de un túnel, un modelo a escala de un sistema de manejo de materiales, estos son ejemplos de modelos físicos y no son típicos de las clases de modelos que son normalmente de interés en análisis de sistemas e investigación de operaciones. Ocasionalmente, sin embargo, han sido útiles para construir modelos físicos para estudiar sistemas de ingeniería, un ejemplo de esto es, un modelo físico a escala de un restaurante de comida rápida en el interior de un almacén. Pero la gran mayoría de construcción de modelos para estos propósitos son *matemáticos*, representando un sistema en términos de relaciones lógicas y cuantitativas, las cuales son cambiadas y manipuladas para ver cómo reacciona el modelo, y de este modo, conocer como podría reaccionar el sistema real (siempre y cuando el modelo sea válido para el sistema).

2.2.3. Solución analítica vs Simulación

Una vez que se ha construido el modelo matemático, debe ser examinado para ver cómo puede ser usado para responder las preguntas de interés acerca del sistema. Si el modelo es bastante simple, puede ser posible trabajar con sus relaciones y cantidades para encontrar una solución analítica exacta. Pero algunas soluciones analíticas pueden llegar a ser extraordinariamente complejas requiriendo enormes recursos de cálculo para obtener la solución. Si una solución analítica para un modelo matemático es factible de ser calculada, es recomendable estudiar el modelo en esta forma más que por vía de simulación. Sin embargo, muchos sistemas son altamente complejos, así que los modelos matemáticos válidos para estos sistemas son de igual forma complejos excluyendo cualquier posibilidad de una solución analítica. En este caso, el modelo debe ser estudiado por medio de *simulación*, ejercitando numéricamente el modelo para las entradas en cuestión para ver cómo ellas afectan las medidas de salida de desempeño.

Una vez que se tiene un modelo matemático (que a partir de este momento será llamado *modelo de simulación*) para ser estudiado por medio de simulación, se debe saber qué herramientas particulares utilizar para realizar el estudio. Para este propósito

es útil clasificar los modelos de simulación en tres diferentes dimensiones:

1. **Modelos de simulación estáticos vs Modelos de simulación dinámicos.** Un modelo de simulación estático es una representación de un sistema en un momento particular, o uno que puede ser usado para representar un sistema en que juega un sólo tiempo; ejemplos de simulaciones estáticas son los modelos Monte Carlo. Por otro lado, un modelo de simulación dinámico representa un sistema que evoluciona en el tiempo, tal como un sistema de transporte de piezas electrónico (cinta transportadora) en una fábrica.
2. **Modelos de simulación determinísticos vs Modelos de simulación estocásticos.** Si un modelo de simulación no contiene componentes probabilísticos (por ejemplo, aleatorios), es llamado *determinístico*; un sistema complicado (y analíticamente intratable) de ecuaciones diferenciales que describe una reacción química, puede ser un modelo de este tipo. En los modelos determinísticos, la salida es “determinada” una vez que el conjunto de relaciones y cantidades de entrada en el modelo ha sido especificada, aunque puede tomar mucho tiempo de computadora para que sea evaluado. Sin embargo, muchos sistemas pueden ser modelados teniendo, por lo menos algún componente de entrada aleatorio, esto da lugar a modelos de simulación estocásticos. La mayoría de los sistemas de inventarios y de filas son modelados de forma estocástica. Los modelos de simulación estocásticos producen salidas aleatorias y deben además ser tratados como sólo un estimado de las características verdaderas del modelo; esto es una de las desventajas principales de la simulación.
3. **Modelos de simulación continuos vs Modelos de simulación discretos.** Los modelos de simulación discretos (también llamados *simulación de eventos discretos*, como serán nombrados a partir de este momento) tienen que ver con el modelado de un sistema que evoluciona durante el tiempo por una representación en que el estado de las variables cambian instantáneamente en puntos separados en el tiempo. (En términos más matemáticos, se podría decir que el sistema puede cambiar sólo en un número contable de puntos en el tiempo.) Estos puntos en el tiempo son en los que ocurre un evento, donde un *evento* es definido como una ocurrencia instantánea que puede cambiar el estado del sistema. Los modelos de eventos discretos son modelos dinámicos, estocásticos y discretos en los que las variables de estado cambian de valor en instantes no periódicos del tiempo sin estar dirigidos por un reloj. Aunque una

simulación de eventos discretos puede conceptualmente ser hecha por cálculos a mano, la cantidad de datos que puede ser almacenada y manipulada en la mayoría de los sistemas del mundo real impone que las simulaciones sean realizadas por medio de una computadora digital. Por otro lado, los modelos de simulación continuos comprenden el modelado sobre el tiempo de un sistema por una representación en la que las variables de estado cambian continuamente con respecto al tiempo. Normalmente, los modelos de simulación continuos involucran ecuaciones diferenciales que relacionan las tasas de cambios de las variables de estado con el tiempo. Si las ecuaciones diferenciales son particularmente simples, pueden ser resueltos de forma analítica, lo cual da los valores de las variables de estado para todos los valores del tiempo como una función de los valores de las variables de estado en tiempo cero. Para la mayoría de los modelos continuos las soluciones analíticas no son posibles, sin embargo, son utilizadas algunas técnicas (por ejemplo, integración de Runge-Kutta) para integrar las ecuaciones diferenciales de forma numérica, dando valores específicos para las variables de estado en el tiempo cero.

2.3. Pasos en un estudio de simulación

La construcción de un modelo de simulación es sólo una parte de todo el esfuerzo necesario para diseñar o analizar un sistema complejo por medio de simulación. También debe ponerse atención en otros aspectos tales como, análisis estadístico de los datos de salida de la simulación. En la *figura 2.2* se muestran los pasos que componen un estudio de simulación razonable, (Law and Kelton, 2000 [2]). Un estudio de simulación no es un proceso secuencial simple, una vez que se procede con el estudio, puede ser necesario regresar a un paso previo; por ejemplo, si el modelo de simulación obtenido no supera la etapa de validación (paso 3), es posible que sea necesario, modificar tanto el modelo conceptual como el de simulación.

A continuación se desarrollará cada uno de los pasos de la *figura 2.2* de forma más explícita.

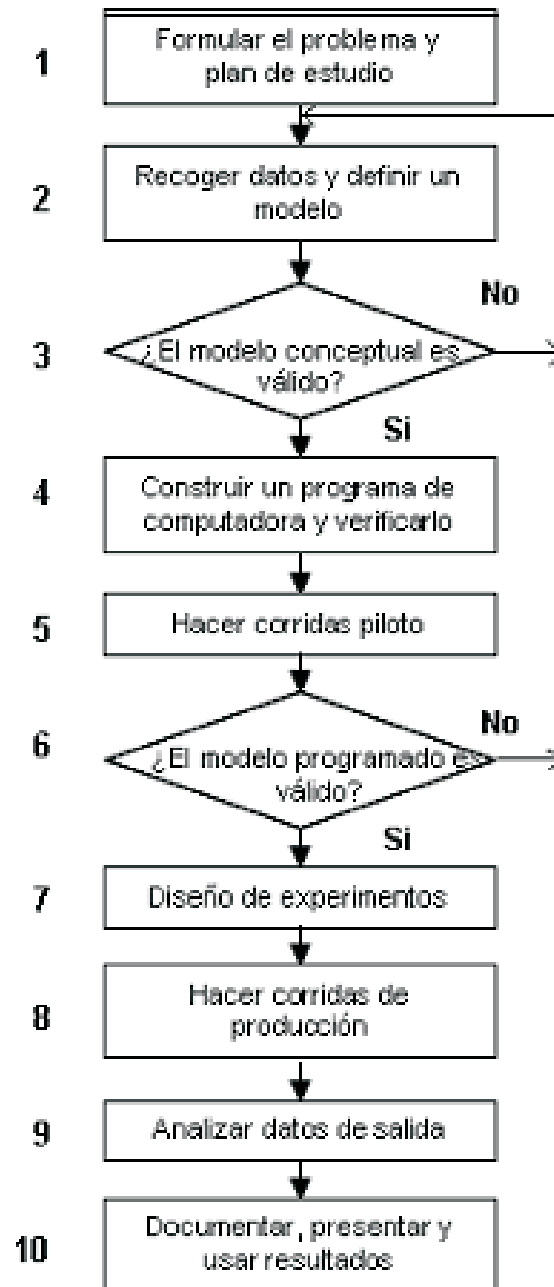


Figura 2.2: Pasos en un estudio de simulación

2.3.1. Formular el problema y el plan de estudio

1. El problema de interés es declarado por el director.
2. Son conducidas una o más reuniones iniciales con el director del proyecto, los analistas de simulación y personas expertas en el tema (SMEs) para discutir:
 - *Todos los objetivos del estudio.* La especificación de los objetivos es una de las tareas más importantes de un proyecto de simulación. Si los objetivos no están claros o son poco concretos, existe el peligro de no abordar correctamente el problema para el cual ha sido solicitado el proyecto de simulación y de ser incapaz de responder a las expectativas generadas. Estos objetivos servirán de guía a lo largo del proyecto, por lo tanto deben ser precisos, razonables, comprensibles y medibles.
 - *Preguntas específicas que deben ser constestadas por el estudio*
 - *Medidas de desempeño que serán usadas para evaluar la eficiencia de diferentes configuraciones del sistema*
 - *Libertad del modelo*
 - *Configuraciones del sistema para ser modeladas*
 - *Programas a utilizar.* El creciente mejoramiento y gran facilidad de uso de los paquetes de simulación con propósito especial ha sido uno de los factores que más ha influido en el incremento de popularidad de la simulación en los últimos años. Una de las decisiones más importantes que un modelador o analista debe tomar al realizar un estudio de simulación consiste en seleccionar el programa. Si el programa seleccionado no es lo bastante flexible o si es difícil de usarlo, entonces el proyecto de simulación puede producir resultados erróneos o incluso puede no ser terminado. Existen algunas ventajas de usar un paquete de simulación más que un lenguaje de programación de propósito general, las cuales son mencionadas a continuación:
 - Los paquetes de simulación proveen automáticamente más de las características necesitadas para construir un modelo de simulación, resultando un decremento importante en el tiempo de programación y en consecuencia en la reducción del costo total del proyecto.

- Proveen un marco natural para el modelado de simulación.
- Los modelos de simulación son generalmente fáciles de modificar cuando son escritos en un paquete de simulación.
- Proporcionan una mejor detección del error, debido a que muchos tipos potenciales de errores son controlados automáticamente.

A continuación se mostrará una lista de algunos de los paquetes de simulación de aplicación orientada que están disponibles actualmente

Manufactura: AutoMod [AutoSimulations (1999a)], AutoSched AP [AutoSimulations (1999b)], Extend + Manufacturing [Imagine (1997a)], Arena Packaging Edition [System (1999b)], ProModel [PROMODEL (1999b)], QUEST [Deneb (1998)], Taylor Enterprise Dynamics [F and H (1998)], y WITNESS [Lanner (1998b)].

Redes de comunicación: COMNET III [CACI (1999)], IT DecisionGuru [MIL 3 (1999a)], y OPNET Modeler [MIL 3 (1999b)].

Reingeniería de procesos y Servicios: Arena Business Edition [Systems (1999d)], Extend + BPR [Imagine (1998)] ProcessModel [ProcessModel (1998)], ServiceModel [PROMODEL (1999c)], y SIMPPOCESS [CACI (1998)].

Cuidados del corazón: MedModel [PROMODEL (1999a)].

Call Center: Arena Call Center Edition [Systems (1999a)]

Animación: Proof Animation [Wolverine (1996)].

- *Marco (periodo) de tiempo para el estudio y los recursos requeridos.*

2.3.2. Recoger datos y definir un modelo

1. Recoger información del layout del sistema y procedimientos de operación.
 - No es suficiente una sola persona para recolectar la información y se deben realizar los documentos necesarios para documentarla.
 - Algunas personas pueden tener información incorrecta, se debe estar seguro en identificar a las personas expertas en el tema que cuenten con información verdadera.
 - Los procedimientos de operación pueden no estar formalizados.

Tabla 2.1: Fuentes de aleatoriedad de algunos tipos de sistemas

Tipo de sistema	Fuentes de aleatoriedad
Manufactura	Tiempos de proceso, tiempos de falla de máquinas tiempos de reparación de máquinas
Relacionados a la defensa	Tiempos de arribo y tiempos de carga de misiles o aviones, resultados de un compromiso, distancias de pérdida para municiones
Comunicación	Tiempos de interarribo de mensajes, tipos de mensajes, longitud de mensajes
Transporte	Tiempos de carga de barcos, tiempos de interarribo de clientes en el metro.

2. Recoger datos (si es posible) para especificar los parámetros del modelo y las distribuciones de probabilidad de los datos de entrada.

Selección de distribuciones de probabilidad de entrada

Para realizar una simulación usando entradas aleatorias, tales como tiempos de interarribo o tamaños de demanda, se deben especificar sus distribuciones de probabilidad. Dado que las variables aleatorias de entrada permiten a un modelo de simulación seguir distribuciones particulares, la simulación procede a través del tiempo generando valores aleatorios de estas distribuciones.

La mayoría de todos los sistemas reales contienen uno o más fuentes de aleatoriedad, como se ilustra en la *tabla 2.1*

Algunas veces los analistas de simulación reemplazan las distribuciones de probabilidad por su media en los modelos de simulación. Esta práctica puede ser debida a la falta de comprensión por parte del analista o por la falta de información de la forma de la distribución (por ejemplo, sólo un estimado de la media de la distribución está disponible). Lo anterior causa daños a los resultados de la simulación, puesto que tanto las varianzas como las medias de las distribuciones afectan las medidas de desempeño de los sistemas, por lo que es necesario representar cada fuente de aleatoriedad del sistema por

una distribución de probabilidad (en lugar de hacerlo sólo por su media) en el modelo de simulación.

Si es posible recoger datos de una variable aleatoria de entrada de interés, estos datos pueden ser usados en uno de los siguientes enfoques para especificar una distribución:

- a) Los mismos valores de los datos son usados directamente en la simulación. Por ejemplo, si los datos representan tiempos de servicio, entonces uno de los valores de los datos es usado cuando un tiempo de servicio es necesitado en la simulación.
- b) Los mismos valores de los datos son usados para definir de alguna forma una función de distribución empírica. Si estos datos representan tiempos de servicio, se haría uso de esta distribución cuando un tiempo de servicio es necesitado en la simulación.
- c) Son usadas técnicas estadísticas estándar de inferencia estadística para “ajustar” una forma de distribución *teórica*, por ejemplo, Exponencial o Poisson, para los datos y para realizar pruebas de hipótesis para determinar las bondades de ajuste. Si una distribución teórica particular con ciertos valores para sus parámetros es un buen modelo para los datos de tiempo de servicio, entonces se usaría esta distribución cuando un tiempo de servicio es necesitado en la simulación.

3. Modelo conceptual.

En esta etapa se realiza la especificación del modelo a partir de las características de los elementos del sistema que se requiere estudiar y sus interacciones teniendo en cuenta los objetivos del problema.

Es muy importante recordar las suposiciones hechas en el modelo de simulación en un reporte que se llamará documento de suposiciones (*o modelo conceptual*). El cual debe ser escrito de forma entendible para los ingenieros y gerentes. Y debe contener los siguientes puntos:

- Una sección de resumen que discuta todos los objetivos del proyecto, los resultados específicos para los cuales es destinado el estudio de simulación y las medidas de desempeño para evaluación.

- Descripción detallada de cada subsistema y cómo estos subsistemas interactúan.
 - Qué suposiciones fueron simplificadas y por qué. Recordar que un modelo de simulación es una simplificación supuesta o abstracción de la realidad.
 - Resúmenes de datos tales como, la media de la muestra e histograma de un conjunto de datos. La distribución de probabilidad actual que mejor se ajusta a un conjunto de datos.
 - Fuentes de importancia o información discutible.
4. Recolectar datos (si es posible) del desempeño del sistema existente (para propósitos de validación).
 5. El nivel de detalle del modelo debería depender de lo siguiente:
 - Objetivos del proyecto
 - Medidas de desempeño
 - Disponibilidad de datos
 - Importancia de credibilidad
 - Restricción del equipo de cómputo
 - Opiniones de las personas expertas en el tema
 - Restricciones de tiempo y dinero.
 6. Estar en contacto de forma regular con el director (y otras personas clave del proyecto) del proyecto.

Es extremadamente importante para el modelador tener comunicación con el gerente de forma constante durante todo el curso del estudio de simulación. Este enfoque tiene los siguientes beneficios:

- Cuando se inicia un estudio de simulación, puede no estar clara la idea del problema a resolver. Cuando el estudio procede y la naturaleza del problema llega a ser clara, esta información debe ser llevada al gerente quien puede reformular los objetivos de estudio.
- Se mantiene el interés y la participación del gerente.

- El conocimiento del sistema por parte del gerente contribuye a la validez actual del modelo.
- El modelo es más creíble puesto que el gerente entiende y acepta las suposiciones del mismo.

2.3.3. Verificar si el modelo conceptual es válido

1. Realizar una revisión estructurada del modelo conceptual usando el documento de suposiciones antes de una audiencia de directores, analistas y personas expertas en el tema. Esto otorga los siguientes beneficios:
 - Ayuda a asegurar que las suposiciones del modelo son correctas y completas.
 - Fomenta posesión del modelo.
 - Toma lugar antes de que se realice el programa para evitar una reprogramación significativa después.

2.3.4. Construir un programa de computadora y verificarlo

1. Programar el modelo en un lenguaje de programación (por ejemplo, C o FORTRAN) o en un programa de simulación (por ejemplo, Arena, ProModel, AutoMod, Extend, WITNESS). Los beneficios de usar lenguajes de programación son: frecuentemente éstos son más conocidos, sus costos de compra son bajos y pueden tener un tiempo de ejecución corto del modelo. Por otro lado, el uso de programa de simulación, reduce el tiempo de programación y resultados, por tanto se reducen los costos del proyecto total, para mayor información de estas ventajas.
2. Verificar el programa de computadora de simulación.

Para la verificación de programas de computadora se usan las siguientes técnicas:

Técnica 1 En el desarrollo de un modelo de simulación, se deben escribir los programas de computadora en módulos o subprogramas. Debido a que cuando el programa es muy grande es extremadamente difícil localizar los errores.

Técnica 2 Es aconsejable que en el desarrollo de modelos de simulación grandes se cuente con más de una persona para revisar el programa de computadora. Puesto que el escritor de un subprograma particular puede entrar en una rutina mental, y puede no ser muy buen crítico.

Técnica 3 Correr la simulación bajo una variedad de supuestos de los parámetros de entrada y verificar si la salida es razonable. En algunos casos, ciertas medidas simples de desempeño pueden ser calculadas de forma exacta y usadas para comparación.

Técnica 4 Una de las técnicas más poderosas que puede ser usada para verificar un programa de simulación de eventos discretos es un “trazado”. En un trazado, el estado del sistema simulado, por ejemplo, el contenido de la lista de eventos, las variables de estado, ciertos contadores estadísticos, etc., son exhibidos justo después que ocurre cada evento y son comparados con cálculos a mano para ver si el programa está operando como se había propuesto.

Técnica 5 El modelo debe ser corrido, cuando es posible, bajo suposiciones simplificadas para las cuales sus características verdaderas son conocidas o pueden ser calculadas fácilmente.

Técnica 6 Con algunos tipos de modelos de simulación, puede ser útil observar una animación de las salidas de simulación.

Técnica 7 Calcular la media de la muestra y la varianza de la muestra para cada distribución de probabilidad de los datos de entrada de la simulación, y compararlos con la media y varianza deseadas. Esto sugiere que los valores están siendo generados correctamente de estas distribuciones.

Técnica 8 El uso de un paquete de simulación comercial reduce la cantidad de programación requerida. Por otro lado, debe tenerse cuidado cuando se use un paquete, puesto que pueden tener errores de una naturaleza sutil.

2.3.5. Hacer corridas piloto

Hacer corridas piloto para propósitos de validación, que se discute en la sección 2.3.6.

2.3.6. Comprobar si el modelo programado es válido

Validación de un modelo de simulación

Una vez que los analistas creen que el modelo de simulación está programado correctamente, ellos deben hacer frente a la siguiente pregunta, es el modelo de simulación conceptual (a diferencia del programa de computadora) una representación exacta del sistema bajo estudio (Kleijnen, 1995 [?]).

Algunos de los puntos que se abordan en la validación son: 1) obtención de datos reales, que pueden ser escasos o abundantes, 2) pruebas simples para comparar datos reales y simulados (normalmente gráficas, prueba Schruben-Turing y prueba t, 3) dos nuevos procedimientos estadísticos simples (basados en análisis de regresión) para probar si las respuestas simuladas y reales son correlacionadas positivamente y posiblemente tengan también los mismos promedios, 4) análisis de sensibilidad (usando diseño de experimentos con su análisis de regresión concomitante) y análisis de riesgo (basado en pruebas Monte Carlo.)

Obtención de datos reales

Los analistas del sistema deben formular explícitamente las reglas que ellos piensan gobiernan el sistema bajo estudio, que es un sistema que ya existe o es planeado para ser instalado en la vida real. El concepto de sistema supone que los analistas deben decidir subjetivamente en el límite del sistema y en los atributos para ser cuantificados en el modelo.

Para obtener un modelo válido, los analistas deben intentar medir las entradas y salidas del sistema real y los atributos de las variables intermedias. En la práctica, los datos están disponibles en distintas cantidades, como en las siguientes cuatro situaciones.

1. Algunas veces es difícil o imposible obtener datos relevantes. Por ejemplo, en

un estudio de simulación de guerra nuclear es imposible conseguir los datos necesarios. En la simulación de dinámicas de población de ballenas, un gran problema es que los datos de la conducta de las ballenas son muy difíciles de obtener, en este ejemplo es necesario mucho esfuerzo para recoger datos.

2. Normalmente es posible obtener algunos datos.
3. En el área militar es común conducir pruebas de campo para obtener datos de variantes futuras.
4. En algunas aplicaciones hay una sobrecarga de datos de entrada, normalmente estos son coleccionados de forma electrónica.

Validar las salidas del modelo de simulación total

La mejor prueba definitiva de una validación de un modelo de simulación es establecer que sus datos de salida son estrechamente parecidos a los datos de salida que deberían ser esperados del sistema actual (propuesto).

Si un sistema similar al propuesto existe actualmente, entonces un modelo de simulación del sistema existente es desarrollado y sus datos de salida son comparados con aquellos del mismo sistema existente. Si los dos conjuntos de datos son estrechamente comparados, entonces el modelo del sistema existente es considerado válido. La idea de comparar los datos de salida del modelo y el sistema para el sistema existente puede ser llamada validación de resultados.

La comparación no es tan simple como parece, puesto que los procesos de salida de casi todos los sistemas del mundo real y simulaciones son no estacionarios (las distribuciones de las observaciones sucesivas cambian en el tiempo) y autocorrelacionados (las observaciones en el proceso son correlacionadas con otras). De este modo, las pruebas estadísticas básicas basadas en observaciones IID (independientes e idénticamente distribuidas) no son aplicadas directamente. Además también existen dudas si las pruebas de hipótesis comparadas con construir intervalos de confianza para diferencias son incluso los enfoques estadísticos apropiados. Puesto que el modelo es sólo una aproximación del sistema actual, una hipótesis nula de que el sistema y el modelo son los mismos es claramente falsa. Es más útil preguntarse si las diferencias del sistema y el modelo son bastante significantes para influir en cualquier conclusión derivada del modelo.

Si las decisiones que se tomarán con un modelo de simulación son de importancia particular, las pruebas de campo son algunas veces usadas para obtener datos de salida del sistema de una versión del sistema propuesto (o un subsistema) para propuestas de validación.

Por ejemplo, suponer que una organización militar está pensando en comparar un sistema de armas para el cual es no es factible o es demasiado caro realizar un conjunto completo de pruebas de evaluación. Como una alternativa, un modelo de simulación del sistema es desarrollado, y entonces un prototipo del sistema actual es “prueba de campo” en una reservación militar para uno o más escenarios específicos. Si los datos de salida del modelo y del sistema son estrechamente comparados para cada uno de los escenarios especificados el modelo de simulación “validado” es usado para validar el sistema por escenarios para el cual las pruebas de campo del sistema no son posibles.

Sin considerar si hay un sistema existente, el analista de simulación y las personas expertas en el tema deben revisar los resultados del modelo para corrección. Usar el análisis de sensibilidad para determinar qué factores del modelo tienen un impacto significativo en las medidas de desempeño y además tienen que ser cuidadosamente modelados.

2.3.7. Diseño de experimentos

En el diseño de experimentos es importante especificar las siguientes configuraciones de interés para cada sistema:

- Longitud de cada corrida.
- Longitud del estado trascendente.
- Número de corridas de simulación independientes usando números aleatorios diferentes.

Una simulación para un sistema particular puede ser terminal o no terminal dependiendo de los objetivos del estudio del modelo de simulación.

Simulación terminal. Es aquella donde hay un evento “natural” que especifica la longitud de cada corrida (réplica). Puesto que diferentes corridas usan números aleatorios independientes y la misma regla de iniciación, esto supone que las variables aleatorias comparables de las diferentes corridas son independientes e idénticamente distribuidas (IID, por sus siglas en inglés). El evento E debe ser especificado antes de realizar las corridas y el tiempo de ocurrencia de E para una corrida particular puede ser aleatorio. Puesto que las condiciones iniciales para una simulación terminal normalmente afecta las medidas de desempeño deseadas, estas condiciones deben ser representativas de aquellas para el sistema actual.

Simulación no terminal. Es aquella donde no hay un evento natural para especificar la longitud de la corrida. Esto frecuentemente ocurre cuando se realiza un sistema nuevo o se cambia un sistema existente y se está interesado en el comportamiento del sistema a lo largo de la corrida cuando está operando “de forma normal”. Un ejemplo de una simulación sin terminación es un modelo de una operación de manufactura.

Para ambos tipos de simulación se necesita determinar la longitud de corrida apropiada y el número de réplicas. Para la simulación sin terminación es necesario además indicar el estado trascendente.

2.3.8. Hacer corridas de producción

Se deben realizar corridas de producción para uso en el paso de Analizar datos de salida.

2.3.9. Analizar datos de salida

Dos objetivos principales en el análisis de datos de salida son:

- Determinación del desempeño absoluto de ciertas configuraciones del sistema.
- Comparación de configuraciones alternativas del sistema en un sentido relativo.

2.3.10. Documentar, presentar y usar resultados

1. Documentar suposiciones, programa de computadora, y resultados del estudio para uso en proyectos futuros.
2. Presentar resultados del estudio.
 - Usar animación para comunicar el modelo a directores, gerentes y otras personas que no están familiarizadas con todos los detalles del modelo.
 - Discutir el proceso de construcción y validación del modelo para dar credibilidad.

2.4. Técnicas para la reducción de la varianza

La reducción de varianza puede ser vista como un medio de utilizar información conocida acerca del modelo para obtener estimadores más exactos de su desempeño. Muchas veces las técnicas de reducción de varianza¹ pueden hacer la diferencia entre un proyecto de simulación demasiado costoso y uno útil. Una técnica de reducción de varianza esencialmente transforma el modelo de simulación básico en uno relacionado, esto permite una estimación más exacta de los parámetros de interés (Rubinstein and Melamed, 1998 [28]).

En realidad, la reducción de varianza no puede ser lograda sin previo conocimiento del sistema. Generalmente, entre más conocimiento se tenga del sistema, más efectiva es la reducción de varianza. Una forma de obtener conocimiento (información) es a través de una simulación inicial del modelo. Los resultados de esta simulación (primera etapa) pueden ser usados para desarrollar las técnicas de reducción de varianza que posteriormente mejorarán la exactitud de los estimadores en la segunda etapa de la simulación.

De acuerdo a (Law and Kelton, 2000 [2]), las técnicas de reducción de varianza incluyen los métodos de números aleatorios comunes (CRN, por sus siglas en inglés),

¹Las **técnicas de reducción de varianza** (VRTs, por sus siglas en inglés) son métodos que explotan la capacidad de control de los generadores de números aleatorios que conducen una simulación.

variables antitéticas (AV), variables de control (CV, por sus siglas en inglés), condicional Monte Carlo, Muestreo estratificado y muestreo de importancia. Sin embargo, para este caso de estudio sólo se hará uso de CRN, puesto que la aplicación de cada una de la técnicas depende principalmente de la naturaleza del modelo bajo estudio.

Todas las técnicas de reducción de varianza son inherentemente dependientes del modelo y su aplicación exitosa es más vista como un arte que como una ciencia.

Para motivar el uso de variables antitéticas y variables comunes en simulación, considerar el siguiente ejemplo. Supóngase que X y Y son variables con funciones de distribución acumulativa (cdfs, por sus siglas en inglés), F_1 y F_2 , respectivamente. Se desea un estimador del valor esperado de su diferencia, $E\{X - Y\}$, con varianza mínima. Puesto que

$$\text{var}\{X - Y\} = \text{var}\{X\} + \text{var}\{Y\} - 2\text{cov}\{X, Y\}, \quad (2,1)$$

y puesto que, las cdf marginales de X y Y han sido prescritas, sigue que la varianza de $X - Y$ es minimizada maximizando la covarianza en la *ecuación 2.1*. Suponga que, X y Y pueden ser generadas por el método de la transformada inversa, así que,

$$X = F_1^{-1}(U_1) = \inf\{x : F_1(x) \geq U_1\}, \quad (2,2)$$

$$Y = F_2^{-1}(U_2) = \inf\{y : F_2(y) \geq U_2\},$$

donde U_1 y U_2 son distribuidas de forma uniforme en $(0, 1)$.

Definición. Los números aleatorios comunes (CRNs) son usados, si $U_2 = U_1$, y las variables aleatorias entitéticas (ARVs) son usadas si $U_2 = 1 - U_1$ [recordar que $U_1 \sim u(0, 1)$ implica $U_2 = 1 - U_1 \sim u(0, 1)$].

Puesto que, F_1^{-1} y F_2^{-1} son funciones no decrecientes de U , usando CRNs implica

$$\text{cov}\{F_1^{-1}(U), F_2^{-1}(U)\} \geq 0,$$

y consecuentemente, la reducción de varianza es lograda en el sentido que el estimador

$$F_1^{-1} - F_2^{-1}(U) \text{ de } E\{X - Y\}$$

tiene una varianza más pequeña que el estimador Monte Carlo

$$X - Y = F_1^{-1}(U_1) - F_2^{-1}(U_2).$$

Además, se sabe que usando CRN se maximiza $cov\{X, Y\}$, (Law and Kelton, 2000 [2]), así que, $var\{X - Y\}$ es minimizada también. De forma similar, $var\{X + Y\}$ es minimizada cuando ARVs son usadas.

Ahora considerar la estimación de varianza mínima de $E\{L_1(X) - L_2(Y)\}$, donde X y Y son variables unidimensionales con cdf marginal conocida, F_1 y F_2 , respectivamente, y las funciones L_1 y L_2 son funciones monótonas valoradas de forma real. Matemáticamente, el problema puede ser formulado como sigue:

Dentro del conjunto F_2 de todas las cdf juntas de dos dimensiones de variables aleatorias pares, (X_1, X_2) se encuentra una función de distribución de dos dimensiones F^ , así que para*

$$\text{minimizar } var\{L_1(X) - L_2(Y)\} \quad (2,3)$$

sujeto a las cdf prescritas F_1 y F_2 .

Este problema fue resuelto por Gal (1984), el cual probó que si L_1 y L_2 son monótonas en la misma dirección, entonces

$$\min_{F \in F_2} var\{L_1(X) - L_2(Y)\} = var\{L_1[F_1^{-1}(U)] - L_2[F_2^{-1}(U)]\}. \quad (2,4)$$

De la ecuación 2.4 sigue que el uso de CRN (lo que quiere decir, $U_1 = U_2 = U$) conduce otra vez a una reducción de varianza óptima. La prueba de la ecuación 2.4 usa el hecho que si $L(u)$ es una función monótona, entonces $L(F^{-1}(U))$ es también monótona, puesto que $F^{-1}(U)$ lo es. Por simetría, si L_1 y L_2 son monótonas en dirección opuesta, entonces el uso de ARVs (esto quiere decir, $U_2 = 1 - U_1$) es óptima para el problema de minimización de varianza (ecuación 2.3).

Considerar ahora, la estimación de varianza mínima de $E\{L_1(X) - L_2(Y)\}$, donde X y Y son valores aleatorios de n dimensiones, y las funciones L_1 y L_2 son evaluados de forma real y monótona en cada componente de X y Y . El problema de minimización de varianza (ecuación 2.3) se extiende a casos multidimensiones en una forma natural:

Dentro del conjunto de todas las cdf juntas de dos dimensiones $F \in F_{2n}$ de pares de vectores aleatorios, (X, Y) , donde cada vector aleatorio tiene componentes independientes, encontrar una función de distribución de 2 dimensiones $F^ \in F_{2n}$ así que para*

$$\text{minimizar } \text{var}\{L_1(X) - L_2(Y)\}, \quad (2,5)$$

sujeto a las distribuciones de n dimensiones preescritas

$$F_1(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n F_{1i}(x_i)$$

y

$$F_2(y_1, \dots, y_n) = \prod_{i=1}^n F_{2i}(y_i),$$

donde

$$X = F_1^{-1}(U_1) = \{F_{11}^{-1}(U_{11}), \dots, F_{1n}^{-1}(U_{1n})\},$$

y

$$Y = F_2^{-1}(U_2) = \{F_{21}^{-1}(U_{21}), \dots, F_{2n}^{-1}(U_{2n})\}$$

suponga además que, dentro del conjunto de todas las cdf $F \in F_{2n}$ de R^{2n} , se permite dependencia sólo entre componentes semejantes de los vectores X e Y (componentes con los mismos índices). La solución del problema correspondiente de varianza mínima fue dado por Rubinstein (1985) que muestra que si L_1 y L_2 son monótonas en la misma dirección en cada componente de los vectores $X = (X_1, \dots, X_n)$ y $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$, respectivamente, y si la dependencia es permitida sólo entre componentes semejantes, entonces

$$\min_{F \in \mathbb{F}_{2n}} \text{var}\{L_1(X) - L_2(Y)\} = \text{var}\{L_1(F_1^{-1}(U)) - L_2(F_2^{-1}(U))\}. \quad (2,6)$$

es logrado como la solución de (ecuación 2.5) cuando $U_1 = U_2 = U$. En otras palabras, el vector de CRN, U , es nuevamente óptimo. Si L_1 y L_2 son monótonas en direcciones opuestas, entonces $U_2 = \mathbf{1} - U_1$ (el vector de ARVs) es óptimo, donde $\mathbf{1}$ es un vector de unos.

2.5. ProModel

ProModel es un paquete de simulación orientado a manufactura y es comercializado por PROMODEL Corporation. Las construcciones básicas de modelado para este paquete son:

Locaciones Las locaciones representan lugares fijos en el sistema. Las entidades son ruteadas a estas locaciones para procesamiento, almacenamiento, cualquier actividad o toma de decisiones.

Entidades Cualquier cosa que el sistema *procesa* es llamada entidad. Usadas para representar piezas, productos, gente o información.

Llegadas Cada vez que una nueva entidad es introducida en el sistema, se le conoce como llegada. Por lo tanto, son usadas para especificar como entran las piezas al sistema.

Procesamiento Éste describe las operaciones que toman lugar en una locación, como la cantidad de tiempo que una entidad gasta en un lugar, los recursos que se necesitan para realizar el proceso y cualquier otra cosa que ocurra en la locación, usado además para definir la ruta de las piezas a través del sistema.

Recursos Son usados para modelar recursos estáticos o dinámicos, tales como trabajadores.

Un modelo es construido usando gráficas (para especificar las rutas de las piezas), llenando campos y programando. ProModel incluye un modelo de costo que permite asignar costos a locaciones, recursos y entidades. Tiene 100 tipos diferentes de números aleatorios disponibles. Además, el usuario tiene acceso a quince distribuciones de probabilidad teórica y distribuciones de probabilidad empíricas.

2.6. Paquetes para el análisis de datos

Existen algunos paquetes computacionales que son útiles para el tratamiento y análisis estadístico de los datos que han sido recopilados del sistema real y que serán usados para realizar el modelo de simulación, a continuación se presentan tres tipos de paquetes (BestFit, SPSS y JMP) que fueron usados para este caso de estudio.

2.6.1. BestFit

BestFit permite ajustar distribuciones de probabilidad para los datos. El ajuste es hecho cuando se tiene un conjunto de datos recolectados que se desean describir usando una función de distribución teórica. BestFit ofrece muchas características para calcular los mejores ajustes y analizar los resultados.

1. Veintiocho funciones de distribución disponibles.
2. Selección de parámetros usando estimados de probabilidad máximos.
3. Entrada de datos de hasta 100 000 puntos o pares.
4. Completar reportes estadísticos, incluyendo bondad de ajuste, valores críticos y valores objetivo.

2.6.2. SPSS

El SPSS (Statistical Product and Service Solutions) es una potente herramienta de tratamiento de datos y análisis estadístico. Al igual que el resto de aplicaciones que utilizan como soporte el sistema operativo Windows, el SPSS funciona mediante menús desplegables y cuadros de diálogo que permiten hacer la mayor parte del trabajo utilizando el puntero del ratón. Al iniciar una sesión con el SPSS aparece una ventana de aspecto similar al de una hoja de cálculo, que es llamada editor de datos y es la ventana principal de este paquete estadístico. Existen ocho tipos de ventanas SPSS, de las cuales, dos son las más importantes: editor de datos y visor de resultados. La primera, contiene el archivo de datos sobre el que se basa la mayor parte de las acciones que es posible llevar a cabo con dicho paquete; la segunda, recoge toda la información (estadísticos, tablas, gráficos, etc.) que el SPSS genera como consecuencia de las acciones que lleva a cabo. El resto de las ventanas son las siguientes: borrador del visor de resultados, editor de sintaxis, editor de procesos, variables del archivo de datos, variables seleccionadas, botones comunes, botones específicos.

2.6.3. JMP

JMP es un programa estadístico que da una interface gráfica extraordinaria para exhibir y analizar datos. JMP es para gráficas estadísticas interactivas e incluye los siguientes elementos:

1. Una hoja de cálculo para ver, editar, introducir y manipular datos.
2. Un amplio rango de métodos estadísticos y gráficos para el análisis de datos.
3. Un diseño extenso de módulos de experimentos.
4. Opciones para seleccionar y exhibir subconjuntos de datos.
5. Herramientas de manejo de datos para clasificar y combinar tablas.
6. Una calculadora para cada columna de tabla para calcular valores.
7. Facilidad para agrupar datos y calcular resúmenes estadísticos.

8. Dibujos y gráficas especiales, capacidad de comunicación para técnicas de mejoramiento de calidad.
9. Herramientas para mover resultados de análisis entre sus aplicaciones.

En JMP los estadísticos son organizados dentro de áreas lógicas con gráficas y tablas apropiadas. Ayuda a encontrar patrones en los datos y ajustar modelos.

2.7. Análisis del capítulo

En este capítulo, se presentan cada uno de los pasos y la secuencia de los mismos en el estudio de un modelo de simulación. Un estudio de simulación es un proceso secuencial, una vez que se procede con el estudio, puede ser necesario regresar a un paso previo.

El primer paso consiste en formular el problema y el plan de estudio, el problema de interés es declarado por el director del proyecto, donde también se deben especificar los objetivos del proyecto de simulación, y deben ser comunicados a todos los integrantes del proyecto. El siguiente paso consiste en recoger datos y definir un modelo, es importante que la información recopilada sea de personas expertas en el tema. Una vez conocida la información de layout del sistema y los procedimientos de operación, se deben especificar los parámetros del modelo y las distribuciones de probabilidad de los datos de entrada; existen algunos programas que facilitan la determinación de estas distribuciones, por ejemplo, BestFit. Posteriormente, es necesario realizar una revisión estructurada del modelo conceptual para saber si es válido; si lo es, se prosigue a contruir un programa de computadora y verificarlo. Para realizarlo se puede usar un programa de simulación (por ejemplo, Arena, Promodel, etc.).

Después de verificar el programa de computadora, el siguiente paso consiste en realizar corridas piloto con el propósito de validar el modelo programado, lo cual consiste en verificar que el modelo de simulación conceptual sea una representación exacta del sistema bajo estudio. Para esto se necesita obtener datos reales y compararlos con los resultados de la simulación. Una vez validado el modelo, con ayuda de diseño de experimentos se planean las corridas de producción. Es importante determinar si la simulación es terminal o no terminal; si es no terminal, es necesario especificar la longitud de corrida, la longitud del estado trascendente y el número de corridas de simulación independientes usando números aleatorios.

El siguiente paso se refiere al análisis de los datos de salida donde es indispensable usar técnicas estadísticas apropiadas para el análisis de dichos datos, por ejemplo técnicas de reducción de varianza, las cuales consisten en utilizar información conocida acerca del modelo para obtener estimadores más exactos de su desempeño. y por último es necesario documentar, presentar y usar los resultados.

Capítulo 3

APLICACIÓN DE DOE Y SUPERFICIES DE RESPUESTA

3.1. Introducción

Este capítulo se divide en tres partes; en la primera se hace una aplicación del diseño de experimentos a los datos reales que fueron obtenidos directamente de la planta empacadora de leche. En la segunda parte, se hace uso de un modelo de simulación para llevar a cabo la experimentación, en lugar de realizar los experimentos de forma real en la planta, puesto que, la experimentación en el sistema de producción real de la planta representa grandes costos para dicha empresa; además un modelo de simulación que represente el funcionamiento del sistema real resulta muy útil para este propósito, (Law and Kelton, 2000 [2]) y se pueden obtener grandes beneficios a bajo costo. La tercera parte de este capítulo la integra el análisis de la superficie de respuesta, con el objetivo de conocer el punto donde la saturación del almacén de producto terminado UP se hace mínima. Las variables que se pueden manipular en el modelo de simulación para el análisis de la saturación del almacén son: MB (montacargas B) y MC1 (montacargas C1).

La experimentación en simulación es un proceso que puede llegar a ser muy costoso y consumir grandes cantidades de recursos, tanto en tiempo como en talento de los especialistas necesarios para llevar a cabo el análisis de los resultados. Por lo anterior, es muy importante afinar mucho en la especificación de los procedimientos

experimentales durante la fase de diseño del proyecto. Existen algunos paquetes estadísticos comerciales que disponen de utilidades para generar algunos de los diseños de uso más general, por ejemplo SAS y SPSS.

3.2. CASO DE ESTUDIO

Una empresa empaedora de leche ha observado que existe lentitud de las operaciones en su zona de embarque del área de productos UP, esto es, existen retrasos importantes en la carga de transportes (de casa y foráneos) así como dilación en el flujo del proceso de producto terminado en el área mencionada. Para la distribución del producto, la empresa divide sus transportes en: vehículos propios, vehículos rentados y vehículos externos. Asimismo, la distribución del producto se clasifica de acuerdo a los destinos en: depósitos metropolitanos, depósitos foráneos y clientes externos o distribuidores. La carga del producto se realiza en los andenes destinados para tal efecto y se dividen en:

1. Andenes para carga de productos UP en transportes de casa tipo jaula
2. Andenes para carga de productos UP en transportes foráneos tipo caja
3. Andenes para carga de productos UP en transportes tipo caja
4. Andenes para carga de productos derivados en transportes de casa tipo caja

En este caso, el análisis de la operación en la zona de carga es un aspecto clave para desarrollar un proceso de mejoramiento con sólidas y rigurosas bases, es por ello que este proyecto se enfoca en el análisis y simulación de las operaciones que se realizan en esta área. Por otro lado, la compañía también está interesada en mejorar el funcionamiento del almacén principal de productos UP, que en la actualidad tiene problemas de saturación de capacidad. El modelo de simulación fue desarrollado por (Pérez-Lechuga y Medina-Marín, [25]), que será retomado para el presente trabajo.

3.2.1. Modelo de simulación

El objetivo general del modelo de simulación es modelar la operación del área de embarque, así como el área de almacenes de producto terminado de la empresa a fin de reproducir su dinámica por medio de la simulación, y con ello diseñar estrategias óptimas de administración del trabajo tendientes a maximizar el flujo de operaciones, minimizar tiempos de embarque y de inventario de producto terminado.

- Identificación del área de trabajo y del sistema a modelar. El área de interés es la zona de almacenes de producto terminado y área de maniobras de transporte para operaciones de embarque.
- Las características y división de áreas de estudio (subsistemas) del proyecto son:
 1. Tipo de proceso de producción: Mixto (continuo hacia discreto)
 2. Área de modelación (sistema): Zona de embarque
 3. Subsistemas considerados: Ocho zonas geográficas delimitadas por las operaciones del proceso:
 - Zona 1** Almacén de productos derivados zona de bandas transportadoras
 - Zona 2** Almacén de productos UP y almacén temporal con dos líneas de espera
 - Zona 3** Almacén de producto terminado
 - Zona 4** Almacén de productos derivados
 - Zona 5** Andenes de carga (1 al 7) para transportes foráneos de productos UP
 - Zona 6** Andenes de carga (8 al 15) para transportes de casa y foráneos de productos derivados y estacionamiento de espera
 - Zona 7** Patio de maniobras y área de conteo de productos
 - Zona 8** Patio de maniobras y área de pesado (báscula)

Con la información obtenida, clasificada, procesada y validada en planta los encargados del proyecto mencionados anteriormente construyeron el correspondiente modelo de simulación usando el programa PROMODEL.

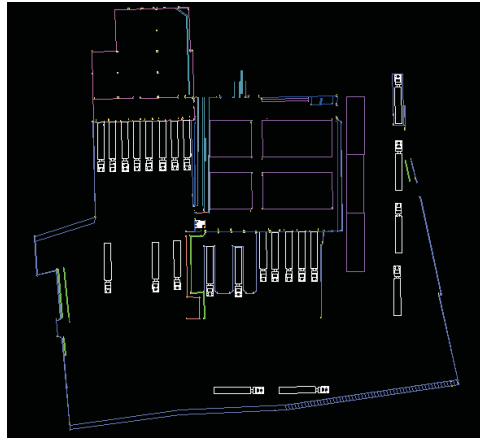


Figura 3.1: Plano de la planta empackadora de leche

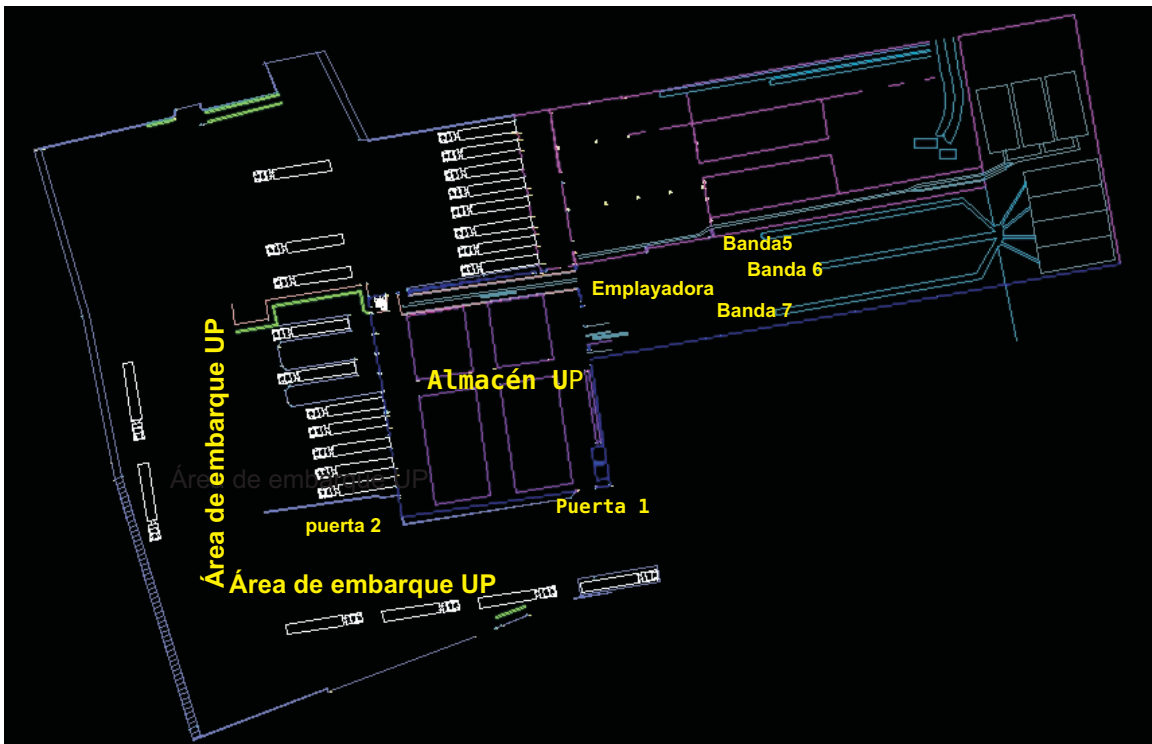


Figura 3.2: Flujo de proceso

3.3. Análisis de datos recopilados del sistema real

Es importante que antes de desarrollar experimentos con el modelo de simulación se lleven a cabo algunos con el sistema real, lo cual permitirá conocer si existe relación entre ambos resultados.

3.3.1. Estudio del tiempo de recorrido de los montacargas desde el almacén hasta la zona de embarque

Se está interesado en conocer qué efecto tienen el tipo de turno y las puertas sobre el tiempo que se tarda un montacargas en llevar producto desde el almacén principal de productos UP hasta la zona de embarque en vuelta redonda. Para responder a esta pregunta, se hace uso de un diseño factorial 2^2 (diseño factorial de dos factores, donde cada factor cuenta con dos niveles). Los dos factores son: A , que representa el tipo de puerta (con dos niveles, 1: puerta 1 (-), 2: puerta 2 (+)) y B , que indica el tipo de turno (nivel 1: turno matutino (-), nivel 2: turno nocturno (+)).

Modelo estadístico lineal

El modelo estadístico lineal que da origen al diseño factorial 2^2 es el que se presenta a continuación:

Sea y_{ijk} la respuesta observada cuando el factor A se encuentra en el i -ésimo nivel ($i = 1, 2, \dots, n$). El orden en el cual se toman las abn observaciones es aleatorio, de modo que éste es un diseño completamente aleatorizado.

Las observaciones pueden describirse mediante el modelo estadístico lineal

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + e_{ijk} \begin{cases} i = 1, 2, \dots, a \\ j = 1, 2, \dots, b \\ k = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (3,1)$$

en donde μ es el efecto medio general, τ_i es el efecto del i -ésimo nivel del factor renglón A , β_j , es el efecto del j -ésimo nivel del factor columna B , $(\tau\beta)_{ij}$ es el efecto

de la interacción entre τ_i y β_j , y e_{ijk} es el componente del error aleatorio. Inicialmente se supone que ambos factores son fijos y que los factores de tratamiento se definen como desviaciones de la media general, por lo tanto $\sum_{i=1}^a \tau_i = 0$ y $\sum_{j=1}^b \beta_j = 0$. Se supone que los efectos de interacción son fijos y que se definen de manera que $\sum_{i=1}^a (\tau\beta)_{ij} = 0$. Hay un total de abn observaciones debido a que se realizan n réplicas.

Para el caso de estudio en particular, el modelo lineal generado a partir de la ecuación 3.1 es el siguiente

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + e_{ijk} \begin{cases} i = 2 \\ j = 2 \\ k = 5 \end{cases} \quad (3,2)$$

en donde μ es el efecto medio general, τ_i es el efecto del i -ésimo nivel del factor A (tipo de puerta), β_j es el efecto de j -ésimo nivel del factor B (tipo de turno), $(\tau\beta)_{ij}$ es el efecto de la interacción entre τ_i y β_j , y e_{ijk} es el componente del error aleatorio.

Los **supuestos** son:

Para este diseño se supone que tanto el factor A como el factor B son fijos. En otras palabras, que se ha elegido específicamente los a niveles del factor A y los b niveles del factor B usados en este diseño. En consecuencia, las inferencias hechas con base en el análisis de varianza pueden aplicarse sólo a los niveles específicos de A y B que se probaron.

Inicialmente se supone que ambos factores son fijos y que los efectos de tratamiento se definen como desviaciones de la media general, por lo tanto $\sum_{i=1}^a \tau_i = 0$ y $\sum_{j=1}^b \beta_j = 0$.

Se supone que los efectos de interacción son fijos y que se definen de manera que $\sum_{i=1}^a (\tau\beta)_{ij} = 0$. Hay un total de abn observaciones porque se realizan n réplicas.

Hipótesis:

En un diseño factorial de dos factores, tanto los factores de renglón (factor A) como de columna (factor B) tienen la misma importancia. Específicamente el interés consiste en probar hipótesis acerca de la igualdad de los efectos de tratamiento de renglón, es decir,

Tabla 3.1: Diseño factorial 2^2 para el tiempo de recorrido de los montacargas

Combinación de tratamientos	Réplica 1	Réplica 2	Réplica 3	Réplica 4	Réplica 5
A baja, B baja (- -)	2.558906	2.673846	2.127010	2.544348	2.257025
A alta, B baja (+ -)	2.399202	2.519077	3.083570	2.536721	2.850143
A baja, B alta (- +)	4.548741	4.488329	3.737115	4.351403	4.199093
A alta, B alta (+ +)	7.456012	4.361885	5.254273	4.864717	4.626431

$$H_0 : \tau_1 = \tau_2 = 0$$

$$H_1 : \text{al menos una } \tau_i \neq 0$$

y de la igualdad de los efectos de tratamiento de columna

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = 0$$

$$H_1 : \text{al menos una } \beta_j \neq 0$$

También es interesante determinar si los tratamientos de renglón y columna interactúan. Por lo cual, resulta conveniente probar

$$H_0 : (\tau\beta)_{ij} = 0 \text{ para toda } i, j$$

$$H_1 : \text{al menos una } (\tau\beta)_{ij} \neq 0$$

A continuación se presenta el diseño experimental para el análisis del tiempo de recorrido de los montacargas de los turnos matutino y nocturno, así como de las puertas uno y dos en el traslado de productos UP desde el almacén principal hasta la zona de embarque.

$$R^2 = 0,843$$

Los resultados del análisis de varianza (ANOVA) para el diseño factorial 2^2 se encuentran en la *tabla 3.2*, el análisis de varianza se realizó haciendo uso del paquete estadístico SPSS.

Para cada uno de los turnos se evalúan las puertas uno y dos, además se tomaron cinco muestras para cada una de dichas puertas; con una confianza del 99%, se

Tabla 3.2: ANOVA para el tiempo de recorrido de los montacargas

Fuente de variación	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Cuadrado medio	F	Significación
Puerta	2.091	1	2.091	4.575	0.054
Turno	24.950	1	24.950	54.593	0.000
Puerta * Turno	0.804	1	0.804	1.760	0.209
Error	5.484	12	0.457		
Total	304.622	20			
Total corregido	34.966	19			

puede observar en la *tabla 3.2* que el efecto del factor puerta no es significativo y de igual manera la interacción puerta-turno, por lo tanto se aceptan las hipótesis: $H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_a = 0$ y $H_0 : (\tau\beta)_{ij} = 0$ para toda i, j , sin embargo el efecto del factor turno es muy significativo y se rechaza $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_b = 0$.

Los resultados obtenidos muestran que efectivamente existe una diferencia significativa del tiempo de recorrido de los montacargas entre los turnos matutino y nocturno, con un nivel de probabilidad de 99.99%. Lo cual significa que el tiempo de recorrido es mayor en el turno nocturno, esto es debido a que generalmente el ritmo de trabajo humano es más bajo en el turno nocturno.

3.3.2. Análisis del sistema de montacargas y los turnos vespertino y nocturno

Se llevó a cabo otro diseño de experimentos para conocer si existen diferencias entre el sistema de montacargas y los turnos vespertino y nocturno para el tiempo en que tardan los montacargas en llevar producto UP desde la empleadora hasta el almacén principal en ida y vuelta. Para este análisis se hizo uso de un diseño factorial de dos factores A (el factor A es el tipo de turno, el cual cuenta con dos niveles: vespertino y nocturno) y B (el factor B es el sistema de montacargas y este cuenta con cinco niveles: montacargas 1, montacargas 2, ..., montacargas 5). Los datos de

las muestras se encuentran en la *tabla 3.3*.

1. **Modelo lineal** para el análisis del sistema de montacargas y los turnos vespertino y nocturno.

Para el caso de estudio en particular, el modelo lineal generado a partir de la *ecuación 3.1* es el siguiente

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + e_{ijk} \begin{cases} i = 2 \\ j = 5 \\ k = 5 \end{cases} \quad (3,3)$$

en donde μ es el efecto medio general, τ_i es el efecto del i -ésimo nivel del factor A (tipo de turno), β_j es el efecto de j -ésimo nivel del factor B (sistema de montacargas), $(\tau\beta)_{ij}$ es el efecto de la interacción entre τ_i y β_j , y e_{ijk} es el componente del error aleatorio.

2. **Supuestos** para el diseño factorial 2×5 .

De la misma forma que en el análisis anterior, se supone que tanto el factor A como el factor B son fijos. En otras palabras, que se ha elegido específicamente los a niveles del factor A y los b niveles del factor B usados en este diseño. En consecuencia, las inferencias hechas con base en el análisis de varianza pueden aplicarse sólo a los niveles específicos de A y B que se probaron.

Se supone que ambos factores son fijos y que los efectos de tratamiento se definen como desviaciones de la media general, por lo tanto $\sum_{i=1}^a \tau_i = 0$ y $\sum_{j=1}^b \beta_j = 0$.

También se supone que los efectos de interacción son fijos y que se definen de manera que $\sum_{i=1}^a (\tau\beta)_{ij} = 0$. Hay un total de abn observaciones porque se realizan n réplicas.

3. Las **Hipótesis** para este modelo son:

En un diseño factorial de dos factores, tanto los factores de renglón (factor A) como de columna (factor B) tienen la misma importancia. Específicamente el interés consiste en probar hipótesis acerca de la igualdad de los efectos de tratamiento de renglón, es decir,

$$H_0 : \tau_1 = \tau_2 = 0$$

$$H_1 : \text{al menos una } \tau_i \neq 0$$

y de la igualdad de los efectos de tratamiento de columna

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = 0$$

$$H_1 : \text{al menos una } \beta_j \neq 0$$

También es interesante determinar si los tratamientos de renglón y columna interaccionan. Por lo cual, resulta conveniente probar

$$H_0 : (\tau\beta)_{ij} = 0 \text{ para toda } i, j$$

$$H_1 : \text{al menos una } (\tau\beta)_{ij} \neq 0$$

4. **Tabla de diseño** para el análisis del tiempo en que tardan los montacargas en llevar producto UP desde la empleadora hasta el almacén principal en ida y vuelta, tomando en cuenta los turnos vespertino y nocturno. La respuesta que se analiza es el tiempo en ida y vuelta de los montacargas.

En la *tabla 3.4* se resume el ANOVA para el diseño factorial 2×5

Significativo al 5% de probabilidad según F de Fisher, NS quiere decir, No significativo.

Con una confianza del 95%, se rechaza $H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_a = 0$ y se concluye que el efecto del factor *turno* es significativo. Por otro lado, el efecto del factor *montacargas* no es significativo, por lo que se acepta $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_b = 0$, así como tampoco es significativo el efecto de interacción con una confianza del 95%. Se concluye que, en el turno vespertino el tiempo en que tardan los montacargas en ida y vuelta desde la empleadora hasta el almacén principal es mejor respecto al turno nocturno.

Tabla 3.3: Diseño factorial 2×5

Turno	Montacargas	R1	R2	R3	R4	R5
Vespertino	1	1.303025	1.162176	1.611539	1.336102	1.135798
	2	1.239282	1.359835	1.243981	1.320457	1.550365
	3	1.001241	1.126058	1.035056	1.078176	1.259726
	4	1.108276	1.070796	1.115434	1.176044	1.091307
	5	0.940081	1.088422	1.036711	1.504634	1.004171
Nocturno	1	1.283159	1.228336	1.084607	1.083092	1.584000
	2	1.194501	1.585485	1.273251	1.313923	1.064697
	3	1.352078	1.455575	1.251445	1.210836	1.383910
	4	1.384239	1.306181	1.322873	1.130942	1.085040
	5	1.315951	1.572178	1.339597	1.271667	1.271358

Tabla 3.4: ANOVA para el diseño factorial 2×5

Fuente de variación	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Cuadrado medio	F	Significación
Turno	0.120	1	0.120	5.000	
Montacargas	0.115	4	0.029	1.208	NS
Interacción	0.217	4	0.054	2.250	NS
Error	0.943	40	0.024		
Total	1.395	49			

3.4. Diseño de experimentos aplicados al modelo de simulación

3.4.1. Justificación del uso de diseño de experimentos en un modelo de simulación

La parte principal de un proyecto de simulación es correr el modelo e interpretar los resultados. Para hacerlo de forma efectiva, es necesario desarrollar un plan antes de realizar las corridas, puesto que si sólo se prueban diferentes cuestiones para ver lo que sucede, puede ser una forma muy ineficiente de intentar entender el comportamiento del modelo. Una planeación cuidadosa de cómo llevar a cabo la experimentación con el modelo devolverá grandes beneficios en términos de cómo entender de forma efectiva el sistema.

Algunas cuestiones de planeación de simulaciones en un contexto general es considerar qué cambios especiales y oportunidades se tienen cuando se conduce un experimento de simulación basado en una computadora con respecto de un experimento físico (llevado a cabo en la vida real). Algunas de las preguntas principales que se deben realizar son:

1. Qué configuraciones del modelo deben ser corridas?
2. De qué longitud debe ser la corrida?
3. Cuántas corridas de simulación deben ser realizadas?
4. Cómo deben ser analizados e interpretados los datos de salida?
- 5.Cuál es la forma más eficiente de realizar las corridas

Estas preguntas entre otras pueden ser resueltas con diseños de experimentos de simulación, (Law and Kelton, 2000 [2]).

En función de los objetivos que persigan el analista o el usuario de un simulador deberán seguirse cierto número de pasos que relacionan las fases de un proceso de planeación y diseño experimental, las cuales constituyen, por sí mismas, un proceso

iterativo en el que la información o las conclusiones obtenidas en una de las fases puede implicar reconsiderar las obtenidas en algunas de las anteriores.

1. Elección del enfoque para el análisis y el diseño del proceso
2. Identificación y elección de las variables de respuesta
3. Selección de los objetivos del diseño experimental
4. Información sobre restricciones temporales del proyecto
5. Información sobre el número de factores
6. Clasificación de los factores
7. Definición de los niveles de los factores
8. Selección de las opciones de estimación de interacciones
9. Determinación de métricas para la evaluación
10. Selección de un diseño experimental

3.4.2. Planeación del diseño de experimentos para el modelo de simulación

Elección del enfoque para el análisis y el diseño del proceso

El enfoque para el análisis del modelo de simulación es *modelar la operación del área de embarque, así como el área de almacenes de producto terminado de la empresa a fin de reproducir su dinámica por medio de la simulación, y con ello diseñar estrategias óptimas de administración del trabajo que maximicen el flujo de operaciones, minimicen tiempos de embarque y de inventario de producto terminado.*

Identificación y elección de las variables de respuesta

Las variables de respuesta que se van a estudiar son:

1. Saturación del almacén
2. Utilización de los andenes

Selección de los objetivos del diseño experimental

Los objetivos del diseño experimental son los siguientes:

1. Desarrollar un diseño de experimentos para conocer los factores que tienen mayor importancia en el análisis de la capacidad del almacén principal de productos UP, con el fin de evitar la saturación del mismo.
2. Desarrollar un diseño de experimentos que permita encontrar los factores que tienen mayor impacto en la utilización de los andenes, para agilizar el tiempo de carga de los camiones y evitar una conglomeración en dicha área.

Clasificación de los factores y definición de los niveles de los mismos

La *tabla 3.5* muestra los factores (variables independientes), la variable de respuesta (variable dependiente) y los niveles (nivel 1 = cantidad actual, nivel 2 = aumento de la cantidad actual) de cada factor para el análisis de la saturación del almacén principal de productos UP.

En la *tabla 3.6* se muestran las variables dependientes e independientes, así como sus niveles para conocer que factores son los más importantes en la saturación de los andenes de carga de productos UP.

Determinar el tipo de simulación para realizar experimentos en el modelo de simulación

Para los dos diseños de experimentos se utiliza simulación sin terminación y se utilizan las siguientes condiciones:

Tabla 3.5: Factores y variable de respuesta para el estudio de la saturación del almacén

Factores	Nivel 1	Nivel 2	Respuesta
Cantidad de montacargas “B”	3	5	Saturación del almacén
Cantidad de montacargas “C1”	3	5	Saturación del almacén
Cantidad de montacargas “C2”	3	5	Saturación del almacén
Capacidad de la emplayadora	30	60	Saturación del almacén

Tabla 3.6: Factores y variable de respuesta para el estudio de la saturación de los andenes

Factores	Nivel 1	Nivel 2	Respuesta
Cantidad de montacargas “B”	3	4	Porcentaje de utilización
Cantidad de montacargas “C1”	3	4	Porcentaje de utilización
Cantidad de montacargas “C2”	3	4	Porcentaje de utilización
Política de carga	Oldest	Random	Porcentaje de utilización

1. Estado trascendente (warm-up) = 50 horas
2. Longitud de corrida = 100 horas
3. Número de réplicas, para el primer diseño se realizan cinco réplicas y para el segundo tres réplicas.

3.4.3. Estudio de la saturación del almacén de productos UP

El modelo estadístico es el siguiente:

$$y_{ijklm} = \mu_{ijkl} + e_{ijklm} \quad (3,4)$$

donde μ_{ijkl} representa los efectos de las causas asignables y e_{ijkl} representa los efectos aleatorios del error. Para este caso de estudio, y es la respuesta esperada, es decir la cantidad total promedio de tarimas en el almacén en cada una de las corridas del modelo de simulación. $ijkl$ representan los niveles de cada uno de los cuatro factores que son analizados (cantidad de montacargas B , cantidad de montacargas C_1 , cantidad de montacargas C_2 y capacidad de la empleadora), m corresponde al número de réplicas o corridas del modelo.

Las porciones de las causas asignables del modelo pueden ser descompuestas en términos representando los efectos principales y las interacciones entre los factores del modelo.

El modelo completo de regresión para un diseño factorial de cuatro factores a dos niveles cada uno (2^4), está dado por

$$\begin{aligned} \eta = & \beta_0 + \beta_1x_1 + \beta_2x_2 + \beta_3x_3 + \beta_4x_4 + \beta_5x_1x_2 + \beta_6x_1x_3 + \beta_7x_1x_4 \\ & + \beta_8x_2x_3 + \beta_9x_2x_4 + \beta_{10}x_3x_4 + \beta_{11}x_1x_2x_3 + \beta_{12}x_1x_2x_4 \\ & + \beta_{13}x_1x_3x_4 + \beta_{14}x_2x_3x_4 + \beta_{15}x_1x_2x_3x_4 + e_{ij} \end{aligned} \quad (3,5)$$

$$i = 1 \dots, 4 \quad j = 1 \dots, 5$$

donde i representa la cantidad de factores y j el número de réplicas.

En el diseño factorial de cuatro factores se supone que las $a \times b \times c \times d$ combinaciones de tratamientos corresponden a muestras aleatorias de tamaños n extraídas de $a \times b \times c \times d$ poblaciones, donde cada población tiene distribución normal, con media μ_{ijkl} y varianza σ^2 . El modelo del diseño factorial de cuatro factores es:

$$\begin{aligned}
 y_{ijklm} &= \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \delta_l + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\gamma)_{ik} + (\alpha\delta)_{il} \\
 &+ (\beta\gamma)_{jk} + (\beta\delta)_{jl} + (\gamma\delta)_{kl} + (\alpha\beta\gamma)_{ijk} + (\alpha\beta\delta)_{ijl} + (\alpha\gamma\delta)_{ikl} \\
 &+ (\beta\gamma\delta)_{jkl} + (\alpha\beta\gamma\delta)_{ijkl} + e_{ijklm} \\
 i &= 2 \\
 j &= 2 \\
 k &= 2 \\
 l &= 2 \\
 m &= 5
 \end{aligned}$$

(3,6)

Las Hipótesis para este modelo son:

Las Hipótesis para los efectos principales son:

$$\begin{aligned}
 H_0 &: \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \\
 H_1 &: \text{al menos una } \alpha_i \neq 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_0 &: \beta_1 = \beta_2 = 0 \\
 H_1 &: \text{al menos una } \beta_j \neq 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_0 &: \gamma_1 = \gamma_2 = 0 \\
 H_1 &: \text{al menos una } \gamma_k \neq 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_0 &: \delta_1 = \delta_2 = 0 \\
 H_1 &: \text{al menos una } \delta_l \neq 0
 \end{aligned}$$

Las Hipótesis para las interacciones de primer orden son:

$$H_0 : (\alpha\beta)_{ij} = 0 \text{ para toda } i, j$$

H_1 : al menos una $(\alpha\beta)_{ij} \neq 0$

H_0 : $(\alpha\gamma)_{ik} = 0$ para toda i, k

H_1 : al menos una $(\alpha\gamma)_{ik} \neq 0$

H_0 : $(\alpha\delta)_{il} = 0$ para toda i, l

H_1 : al menos una $(\alpha\delta)_{il} \neq 0$

H_0 : $(\beta\gamma)_{jk} = 0$ para toda j, k

H_1 : al menos una $(\beta\gamma)_{jk} \neq 0$

H_0 : $(\beta\delta)_{jl} = 0$ para toda j, l

H_1 : al menos una $(\beta\delta)_{jl} \neq 0$

Las Hipótesis para las interacciones de segundo orden son:

H_0 : $(\alpha\beta\gamma)_{ijk} = 0$ para toda i, j, k

H_1 : al menos una $(\alpha\beta\gamma)_{ijk} \neq 0$

H_0 : $(\alpha\beta\delta)_{ijl} = 0$ para toda i, j, l

H_1 : al menos una $(\alpha\beta\delta)_{ijl} \neq 0$

H_0 : $(\alpha\gamma\delta)_{ikl} = 0$ para toda i, k, l

H_1 : al menos una $(\alpha\gamma\delta)_{ikl} \neq 0$

H_0 : $(\beta\gamma\delta)_{jkl} = 0$ para toda j, k, l

H_1 : al menos una $(\beta\gamma\delta)_{jkl} \neq 0$

La Hipótesis para la interacción de tercer orden es:

H_0 : $(\alpha\beta\gamma\delta)_{ijkl} = 0$ para toda i, j, k, l

H_1 : al menos una $(\alpha\beta\gamma\delta)_{ijkl} \neq 0$

Tabla de diseño para este caso de estudio.

La *tabla 3.7* muestra las respuestas de las cinco réplicas de cada combinación del diseño 2^4 . Las respuestas son la cantidad de productos UP contenidos en el almacén.

Tabla 3.7: Diseño 2^4 para el estudio de la saturación del almacén

Exp. elem.	MB	MC1	MC2	EMP	REP_1	REP_2	REP_3	REP_4	REP_5
1	-	-	-	-	1555	1644	1475	1537	1479
2	+	-	-	-	1568	1580	1618	1657	1626
3	-	+	-	-	990	662	2196	2076	640
4	+	+	-	-	817	458	985	693	557
5	-	-	+	-	1399	1564	1402	1443	1571
6	+	-	+	-	1425	1566	1604	1294	1436
7	-	+	+	-	613	620	458	2108	1235
8	+	+	+	-	352	1996	1985	322	1357
9	-	-	-	+	1555	1479	1621	1602	1343
10	+	-	-	+	1568	1616	1575	1564	1472
11	-	+	-	+	990	729	598	567	2108
12	+	+	-	+	817	1825	1542	939	598
13	-	-	+	+	1399	1619	1581	1448	1431
14	+	-	+	+	1425	1603	1510	1580	1594
15	-	+	+	+	613	447	2172	1153	1033
16	+	+	+	+	352	1996	510	267	2196

Tabla 3.8: Signos para calcular efectos principales e interacciones del diseño 2^4

Exp. elem.	I	1	2	3	4	12	13	14	23	24	34	123	124	134	234	1234
1	+	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-	+
2	+	+	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	-	-
3	+	-	+	-	-	-	+	+	-	-	+	+	+	-	+	-
4	+	+	+	-	-	+	-	-	-	-	+	-	-	+	+	+
5	+	-	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	+	-
6	+	+	-	+	-	-	+	-	-	+	-	-	+	-	+	+
7	+	-	+	+	-	-	-	+	+	-	-	-	+	+	-	+
8	+	+	+	+	-	+	+	-	+	-	-	+	-	-	-	-
9	+	-	-	-	+	+	+	-	+	-	-	-	+	+	+	-
10	+	+	-	-	+	-	-	+	+	-	-	+	-	-	+	+
11	+	-	+	-	+	-	+	-	-	+	-	+	-	+	-	+
12	+	+	+	-	+	+	-	+	-	+	-	-	+	-	-	-
13	+	-	-	+	+	+	-	-	-	-	+	+	+	-	-	+
14	+	+	-	+	+	-	+	+	-	-	+	-	-	+	-	-
15	+	-	+	+	+	-	-	-	+	+	+	-	-	-	+	-
16	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
Divisor	16	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8

Análisis de varianza.

La *tabla 3.8* muestra los signos para calcular los efectos principales y las interacciones del diseño factorial 2^4 . En el ámbito de diseños 2^k se denomina efecto de una variable (o de una interacción) a la diferencia entre la respuesta que se obtiene en el nivel alto de la variable y la respuesta esperada que se obtiene en el nivel bajo de la misma.

Para realizar los cálculos correspondientes al análisis de varianza se obtuvieron los totales de las cinco réplicas para cada punto experimental, estos se muestran en la *Tabla 3.6*, donde también aparecen los resultados de los efectos de cada factor e interacciones calculados a partir de los totales y haciendo uso de la tabla de signos,

Tabla 3.9: Cantidades totales de las cinco réplicas y efectos

Exp. elem.	MB	MC1	MC2	EMP	Totales	Variable	Efecto
1	-	-	-	-	7690	Media	6475
2	+	-	-	-	8049	MB	-17.75
3	-	+	-	-	6564	MC1	-461.4
4	+	+	-	-	3510	MC2	-6.05
5	-	-	+	-	7379	EMPL	11.85
6	+	-	+	-	7325	12	-54.45
7	-	+	+	-	5034	13	70.8
8	+	+	+	-	6012	14	70.8
9	-	-	-	+	7600	23	55.95
10	+	-	-	+	7795	24	4.75
11	-	+	-	+	4992	34	-2.9
12	+	+	-	+	5721	123	89.5
13	-	-	+	+	7478	124	64.6
14	+	-	+	+	7712	134	-110.15
15	-	+	+	+	5418	234	-44.4
16	+	+	+	+	5321	1234	-132.75

tabla 3.8 sumando o restando las cantidades correspondientes.

La suma de cuadrados de cada variable tiene un grado de libertad y puede obtenerse a partir del efecto mediante la siguiente fórmula:

$$SS = R2^{k-2}(\text{efecto})^2 \quad (3,7)$$

La suma de cuadrados totales y los grados de libertad se calculan con las siguientes fórmulas:

$$SST = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^5 y_{ijk}^2 - \frac{y_{...}^2}{2} \quad (3,8)$$

Grados de libertad

$$SST = 2^k n - 1 \quad (3,9)$$

La suma de cuadrados del error y sus grados de libertad se obtienen a partir de la *ecuación 3.10* y *ecuación 3.11* respectivamente

$$SSE = SST - SS_{\text{Modelo}} \quad (3,10)$$

$$SSE = 2^k(n - 1) \quad (3,11)$$

El resumen del ANOVA se muestra en la *tabla 3.10* que fue obtenido a partir de las *ecuaciones 3.7 - 3.11*

Por cuestiones de espacio en la *tabla 3.10* las interacciones son representadas con combinaciones de números que van de 1 a 4, donde el número uno indica el factor uno o factor montacargas B, y así sucesivamente hasta el factor cuatro. Así mismo, las interacciones son expresadas como 12 en lugar de 1×2 .

Con una confianza de 95% se puede observar que sólo es significativo el efecto principal MC1 (montacargas C1). Por lo tanto, el factor 2 (cantidad de montacargas C1) es el único factor que tiene impacto en la saturación del almacén. Esto es razonable puesto que, los montacargas C1 son los que se encargan de trasladar el producto UP desde el almacén principal hasta la zona de embarque por la puerta principal (puerta 1). Por lo que es necesario incrementar la cantidad de éstos como una medida preventiva para evitar la saturación del mismo.

3.4.4. Estudio de la utilización de los andenes de productos UP

El modelo estadístico se genera a partir de la *ecuación 3.12*

En el diseño factorial de cuatro factores se supone que las $a \times b \times c \times d$ combinaciones de tratamientos corresponden a muestras aleatorias de tamaños n extraídas de $a \times b \times c \times d$ poblaciones, donde cada población tiene distribución normal, con media μ_{ijkl} y varianza σ^2 . El modelo del diseño factorial de cuatro factores para el estudio de la utilización de los andenes de productos UP es:

Tabla 3.10: ANOVA para el diseño factorial 2^4

Fuente de variación	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Cuadrado medio	F
MB (1)	6301.25	1	6301.25	0.026
MC1(2)	4257799.2	1	4257799.2	17.550
MC2(3)	732.05	1	732.05	0.003
EMP(4)	2808.45	1	2808.45	0.012
12	59296.05	1	59296.05	0.244
13	100252.8	1	100252.8	0.413
14	100252.8	1	100252.8	0.413
23	62608.05	1	62608.05	0.258
24	451.25	1	451.25	0.002
34	168.2	1	168.2	0.001
123	160205	1	160205	0.660
124	83463.2	1	83463.2	0.344
134	242660.45	1	242660.45	1.000
234	39427.2	1	39427.2	0.163
1234	352451.25	1	352451.25	1.453
Error	15527112.8	64	242611.14	
Total	20995990	79		

$$\begin{aligned}
y_{ijklm} &= \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \delta_l + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\gamma)_{ik} + (\alpha\delta)_{il} \\
&+ (\beta\gamma)_{jk} + (\beta\delta)_{jl} + (\gamma\delta)_{kl} + (\alpha\beta\gamma)_{ijk} + (\alpha\beta\delta)_{ijl} + (\alpha\gamma\delta)_{ikl} \\
&+ (\beta\gamma\delta)_{jkl} + (\alpha\beta\gamma\delta)_{ijkl} + e_{ijklm} \\
i &= 2 \\
j &= 2 \\
k &= 2 \\
l &= 2 \\
m &= 3
\end{aligned}$$

(3,12)

Las Hipótesis para este modelo son:

Hipótesis para efectos principales:

$$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

$$H_1 : \text{al menos una } \alpha_i \neq 0$$

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = 0$$

$$H_1 : \text{al menos una } \beta_j \neq 0$$

$$H_0 : \gamma_1 = \gamma_2 = 0$$

$$H_1 : \text{al menos una } \gamma_k \neq 0$$

$$H_0 : \delta_1 = \delta_2 = 0$$

$$H_1 : \text{al menos una } \delta_l \neq 0$$

Las Hipótesis para las interacciones de 1^o, 2^o y 3^{er} orden son:

$$H_0 : (\alpha\beta)_{ij} = 0 \text{ para toda } i, j$$

$$H_1 : \text{al menos una } (\alpha\beta)_{ij} \neq 0$$

$$H_0 : (\alpha\gamma)_{ik} = 0 \text{ para toda } i, k$$

$$H_1 : \text{al menos una } (\alpha\gamma)_{ik} \neq 0$$

$$H_0 : (\alpha\delta)_{il} = 0 \text{ para toda } i, l$$

$$H_1 : \text{al menos una } (\alpha\delta)_{il} \neq 0$$

$$H_0 : (\beta\gamma)_{jk} = 0 \text{ para toda } j, k$$

$$H_1 : \text{al menos una } (\beta\gamma)_{jk} \neq 0$$

$$H_0 : (\beta\delta)_{jl} = 0 \text{ para toda } j, l$$

$$H_1 : \text{al menos una } (\beta\delta)_{jl} \neq 0$$

$$H_0 : (\alpha\beta\gamma)_{ijk} = 0 \text{ para toda } i, j, k$$

$$H_1 : \text{al menos una } (\alpha\beta\gamma)_{ijk} \neq 0$$

$$H_0 : (\alpha\beta\delta)_{ijl} = 0 \text{ para toda } i, j, l$$

$$H_1 : \text{al menos una } (\alpha\beta\delta)_{ijl} \neq 0$$

$$H_0 : (\alpha\gamma\delta)_{ikl} = 0 \text{ para toda } i, k, l$$

$$H_1 : \text{al menos una } (\alpha\gamma\delta)_{ikl} \neq 0$$

$$H_0 : (\beta\gamma\delta)_{jkl} = 0 \text{ para toda } j, k, l$$

$$H_1 : \text{al menos una } (\beta\gamma\delta)_{jkl} \neq 0$$

$$H_0 : (\alpha\beta\gamma\delta)_{ijkl} = 0 \text{ para toda } i, j, k, l$$

$$H_1 : \text{al menos una } (\alpha\beta\gamma\delta)_{ijkl} \neq 0$$

Tabla de diseño para este caso de estudio.

En la *tabla 3.11* se muestran las respuestas resultantes al correr el modelo de simulación de acuerdo a las combinaciones del diseño factorial 2^4 con tres réplicas. Donde cada respuesta indica el porcentaje de bloqueo de los andenes de productos UP.

Análisis de varianza.

Para realizar el análisis de varianza, de la misma forma que en el estudio anterior se hace uso de la *tabla 3.8* para calcular los efectos principales y las interacciones del diseño factorial 2^4 . En la *tabla 3.12* se muestran los totales de las tres réplicas, así como los efectos de los factores e interacciones.

Tabla 3.11: Diseño 2^4 para la saturación de los andenes de productos UP

Exp. elem.	MB	MC1	MC2	EMP	REP_1	REP_2	REP_3
1	-	-	-	-	22.63	24.51	19.77
2	+	-	-	-	19.37	22.34	26.4
3	-	+	-	-	12.36	15.48	10.2
4	+	+	-	-	9.89	13.39	9.26
5	-	-	+	-	26.07	28.37	21.1
6	+	-	+	-	22.33	23.69	28.19
7	-	+	+	-	12.10	15.65	8.52
8	+	+	+	-	12.99	11.11	14.49
9	-	-	-	+	17.27	23.22	27.34
10	+	-	-	+	24.80	23.42	28.9
11	-	+	-	+	13.12	13.52	6.48
12	+	+	-	+	1.35	1.24	10.03
13	-	-	+	+	26	25.78	22.54
14	+	-	+	+	30.21	23.76	17.4
15	-	+	+	+	6.66	19.08	13.83
16	+	+	+	+	11.64	13.87	10.54

Tabla 3.12: Cantidades totales de las tres réplicas y efectos de las variables

Exp. elem.	MB	MC1	MC2	EMP	Totales	Variable	Efecto
1	-	-	-	-	66.91	Media	52.638
2	+	-	-	-	68.11	MB	-0.875
3	-	+	-	-	38.04	MC1	-12.859
4	+	+	-	-	32.54	MC2	2.068
5	-	-	+	-	75.54	P.C	-0.759
6	+	-	+	-	74.21	12	-1.392
7	-	+	+	-	36.27	13	0.418
8	+	+	+	-	38.59	14	-0.599
9	-	-	-	+	67.83	23	0.779
10	+	-	-	+	77.12	24	-1.248
11	-	+	-	+	33.12	34	0.484
12	+	+	-	+	12.62	123	1.649
13	-	-	+	+	74.32	124	-1.138
14	+	-	+	+	71.37	134	-0.023
15	-	+	+	+	39.57	234	1.650
16	+	+	+	+	36.05	1234	0.786

Tabla 3.13: ANOVA para el diseño 2^4 del estudio de los andenes

Fuente de variación	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Cuadrado medio	F
MB (1)	9.179	1	9.179	0.638
MC1(2)	1984.169	1	1984.169	137.854
MC2(3)	51.315	1	51.315	3.565
P.C.(4)	6.908	1	6.908	0.480
12	23.255	1	23.255	1.616
13	2.096	1	2.096	0.146
14	4.302	1	4.302	0.299
23	7.277	1	7.277	0.506
24	18.688	1	18.688	1.298
34	2.808	1	2.808	0.195
123	32.621	1	32.621	2.266
124	15.538	1	15.538	1.080
134	0.006	1	0.006	0.000
234	32.654	1	32.654	2.269
1234	7.418	1	7.418	0.515
Error	460.586	32	14.393	
Total	2658.821	47		

El ANOVA se realiza con las *ecuaciones 3.7 - 3.11* y los resultados se presentan en la *tabla 3.13*.

El valor de R^2 se calcula a partir de la siguiente ecuación

$$R^2 = \frac{SS_{Modelo}}{SS_{Total}} \quad (3,13)$$

$$R^2 = \frac{2198,235}{2658,821} = 0,8267705$$

Con una confianza del 95% se puede observar que sólo es significativo el efecto principal MC1 (montacargas C1). Por lo que se rechaza la Hipótesis nula $H_0 : \beta_1 =$

$\beta_2 = 0$ y se acepta la Hipótesis H_1 : al menos una $\beta_j \neq 0$. Igual que en el análisis anterior la saturación de los andenes es provocado por el factor montacargas C1. Por lo que, puede concluirse que aumentando la cantidad de montacargas C1 ayuda a disminuir la saturación del almacén, así como disminuir el congestionamiento de los andenes.

3.5. Modelos de superficies de respuesta

3.5.1. Desarrollo de un modelo de superficie de respuesta

Puesto que la saturación del almacén se origina a partir de las cantidades de producto terminado UP que entran al almacén y de las que salen, entonces la saturación está en función de las entradas y las salidas. Además los montacargas B son los que están relacionados con las entradas y los montacargas C1 y C2 se relacionan con las salidas, de acuerdo al estudio realizado en la (*sección 3.4*) se sabe que los montacargas C2 no tienen impacto en la saturación del almacén, por lo tanto éstos no se toman en cuenta para el siguiente estudio.

Objetivo de la superficie de respuesta

Se desea determinar el punto donde la saturación del almacén de producto terminados UP se hace mínima. Las variables que se pueden manipular en el modelo de simulación para el análisis de la saturación del almacén son: MB (montacargas B) y MC1 (montacargas C1).

Planteamiento

En la fase inicial del estudio de una superficie de respuesta se trata de identificar la región de respuesta óptima y para ello se utilizan experimentos factoriales completos 2^k o fraccionarios 2^{k-p} , con el fin de estimar las respuestas medias para un modelo lineal o de primer orden, como el de la *ecuación 3.19*.

Para este estudio, se toma como punto de partida los valores actuales con los que trabaja el sistema, es decir $MB = 3$ y $MC1 = 3$ y se varía el número de montacargas B entre 2 y 4, de la misma forma para MC1.

El diseño que se emplea para realizar el análisis es un factorial 2^2 con tres puntos centrales. Este diseño se le llama de primer orden porque permite ajustar y comprobar eficientemente el modelo polinómico de primer grado

$$y = \beta_0 + \beta_1x_1 + \beta_2x_2 + e \quad (3,14)$$

Este modelo permite representar la superficie por un modelo plano con pendiente β_1 en la dirección de x_1 y β_2 en la dirección de x_2 . Si esta idea fuese correcta, sería posible una vez estimado β_1 y β_2 , seguir la dirección de disminución de saturación del almacén.

Con el fin de estimar las respuestas medias para un modelo lineal, es recomendable agregar dos o más observaciones en el nivel medio de cada uno de los factores para estimar el error experimental y tener un mecanismo de evaluación para saber si el modelo lineal es apropiado. En este caso, se utilizaron las condiciones de operación actuales del sistema como punto central. Por lo tanto, como punto central se toma: $MB = 3$ y montacargas $C2 = 3$.

El diseño escogido tiene las siguientes características:

- Permite ajustar eficientemente el modelo plano
- Permite comprobar si el modelo plano es adecuado
- Proporciona una estimación

Hipótesis para el *modelo 3.14*

Las Hipótesis para este modelo son:

Para los efectos principales:

$$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

$$H_1 : \text{al menos una } \alpha_i \neq 0$$

Tabla 3.14: Diseño factorial 2^2 con tres puntos centrales

Exp. Elem.	var. natural MB	var. natural MC1	var. codif. x_1	var. codif. x_2	Resp. y
1	2	2	-1	-1	2131
2	4	2	+1	-1	2159
3	2	4	-1	+1	1847
4	4	4	+1	+1	516
5	3	3	0	0	1557
6	3	3	0	0	1523
7	3	3	0	0	1588

Hipótesis para las interacciones:

$$H_0 : (\alpha\beta)_{ij} = 0$$

$$H_1 : \text{al menos una } (\alpha\beta)_{ij} \neq 0$$

Tabla de diseño

A continuación, se presenta la tabla de diseño del factorial 2^2 con tres puntos centrales para el estudio de la saturación del almacén de productos UP, los valores de la respuesta y son los obtenidos al correr la simulación con cada combinación del experimento elemental.

Estimación por mínimos cuadrados de β_1 y β_2

$$b_1 = \frac{1}{4}(-2131 + 2159 - 1847 + 516) = -325,75$$

El coeficiente B_1 es el cambio que ocurre en la respuesta cuando se modifica x_1 una unidad. El efecto principal lineal en un diseño factorial es el cambio en la respuesta cuando x_1 pasa de -1 a $+1$, es decir cambia dos unidades. Así b_1 es la mitad del efecto

principal obtenido como la diferencia de las medias en la cantidad de montacargas B, alto y bajo.

Para b_2 se obtiene

$$b_2 = \frac{1}{4}(-2131 - 2159 + 1847 + 516) = -481,75$$

El estimador mínimo cuadrático de B_0 es la media de las siete observaciones

$$\beta_0 = \frac{1}{7}(2131 + 2159 + 1847 + 516 + 1557 + 1523 + 1588) = 1617,28$$

La ecuación ajustada resultante es

$$\hat{y} = 1617,28 - 325,75x_1 - 481,75x_2$$

Comprobación de existencia de interacción

El modelo lineal supone que los efectos de las variables son aditivos. La interacción entre las variables se mide por el coeficiente β_{12} de un término x_1x_2 añadido al modelo (el coeficiente b_{12} es la mitad de la interacción calculada habitualmente en los diseños factoriales). Este coeficiente se estima a través de

$$b_{12} = 14(2131 - 2159 - 1847 + 516) = -339,73$$

Comprobación de existencia de curvatura

Otra comprobación de linealidad local la proporciona la comparación de \bar{y}_f , la media de los cuatro puntos del diseño factorial 2^2 , con \bar{y}_c , la media en el centro del diseño. Se puede demostrar que si β_{11} y β_{12} son los coeficientes de x_1^2 y x_2^2 , esta medida de curvatura es una estimación de $\beta_{11} + \beta_{12}$.

La medida de “curvatura total” es

$$\beta_{11} + \beta_{12} = \frac{1}{4}(2131 + 2159 + 1847 + 516) - \frac{1}{3}(1557 + 1523 + 1588)$$

$$\beta_{11} + \beta_{12} = 107,13$$

Análisis de varianza

Para el análisis de varianza la suma de cuadrados totales se calcula con la siguiente fórmula

$$SST = \sum (y_i - \bar{y})^2 = \sum (y_i - \hat{\beta}_0)^2 \quad (3,15)$$

Grados de libertad para SST

$$gl = n - 1$$

Para los efectos lineales $\beta_i (i = 1, \dots, k)$ se tiene

$$SS(\beta_i) = 2^k \hat{\beta}_i^2$$

Grados de libertad para los efectos lineales

$$gl = 1$$

Suma de cuadrados del error

$$SSE = SST - \sum_{i=1}^k SS(\beta_i)$$

Grados de libertad

$$gl = n - k - 1$$

La diferencia fundamental es que la suma de cuadrados del error se divide en tres:

1. Suma de cuadrados de la interacción

$$SSIn = 2^k \sum_{i=1}^k \sum_{j=i+1}^k \beta_{ij}^2$$

Grados de libertad

$$gl = \binom{k}{2}$$

2. Suma de cuadrados de los términos cuadráticos puros

$$SSCp = \frac{nc \times nf \times (\bar{y}_f - \bar{y}_c)^2}{nc + nf}$$

Grados de libertad

$$gl = 1$$

3. El “error puro” que se usa para la prueba

$$SSEp = SSE - SSIn - SSCp$$

Grados de libertad

$$gl = n - k - \binom{k}{2}$$

El análisis de varianza se resume en la *tabla 3.15*

Con un valor de $\alpha = 0,05$ se obtiene de tablas $F_{0,05,1,2} = 18,51$, con lo cual se puede observar que los efectos lineales y la interacción son significativos. Además también se puede ver que el efecto cuadrático es poco significativo, esto quiere decir que existe poca evidencia de curvatura. Existe baja certeza de estar en un mínimo local, entonces el siguiente paso es cambiar la región de operación que permita acercarse más al mínimo local.

Tabla 3.15: ANOVA para el diseño factorial 2^2 con tres puntos centrales

Fuente de variación	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Cuadrado medio	F
MB	424452.25	1	424452.25	401.56
MC1	928332.25	1	928332.25	878.27
Residuos (SSE)	483552.94	4		
(Interacción)	461720.25	1	461720.25	436.82
(Cuadráticos puros)	19718.68	1	19718.68	18.65
(Error puro)	2114.01	2	1057	
Total	1836337.44	6		

Dirección de máxima pendiente

Si ningún término de segundo orden es significativo entonces se está lejos de un mínimo local de la función y se debe cambiar la región de operación. En cambio, si algún término de segundo orden es significativo entonces se debe extender el diseño.

Si nos encontramos lejos del óptimo nos interesa cambiar nuestra región de operación en la forma más eficiente posible.

La dirección de máximo crecimiento de una función viene dada por su gradiente, mientras que la de máximo decrecimiento es la dirección opuesta al gradiente.

Se puede aproximar el gradiente de la función en el punto de operación (centro del diseño) por:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_k} \right) \cong (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)$$

La expresión anterior es válida tanto para el modelo de primer orden como para el de segundo orden.

Para decrementar la respuesta lo más rápido posible se debe modificar el punto de operación de tal manera que, por cada cambio en β_1 unidades (codificadas) en la

variable x_1 se debe cambiar la variable x_2 en β_2 unidades (codificadas), la variable x_3 en β_3 unidades (codificadas), y así sucesivamente.

Una vez encontrado el gradiente se realizan experimentos sobre esta dirección hasta que la misma deje de ser óptima, obteniéndose así un nuevo punto de operación a investigar.

En nuestro estudio, de acuerdo a los resultados de la regresión se tiene:

$$\nabla f \cong (-325,75, -481,75)$$

Para decrementar la respuesta se debe tomar la dirección contraria al gradiente, por lo tanto,

$$\nabla f \cong (325,75, 481,75)$$

Ecuaciones de codificación

$$x_1 = \frac{\xi - 3}{1} \Rightarrow \xi = 3 + x_1$$

$$x_1 = \frac{\xi - 3}{1} \Rightarrow \xi = 3 + x_1$$

De lo cual, se tiene que una unidad codificada de montacargas B representa 1 montacargas y lo mismo para los montacargas C1.

Así pues, por cada montacargas B que se aumente, se debe aumentar los montacargas C1 en

$$\nabla M = \frac{481,75}{325,75} = 1,47 \cong 1$$

Ahora se desea variar los montacargas en dos unidades entre experimentos, donde la respuesta y es la cantidad promedio de tarimas en el almacén

Por resultados de experimentos anteriores se conoce que el punto donde la cantidad de montacargas para ambos factores (MB y MC1) es de 5, minimiza la cantidad

Tabla 3.16: Variación de los montacargas en dos unidades

Var. natural MB	Var. natural MC1	Respuesta y
5	5	817
7	7	551
9	9	2124
11	11	566
13	13	2059

de contenido en almacén, partiendo de esto se desarrollaron otros experimentos variando los montacargas en dos unidades, los resultados se presentan en la *tabla 3.16*. Estos resultados sugieren utilizar siete montacargas MB y siete montacargas MC1.

Utilizando como centro el óptimo (7, 7) se utilizó un nuevo diseño 2^2 con cinco puntos centrales; los cinco puntos centrales de este diseño se integraron con el fin de estimar el error experimental y permitir una prueba de adecuación del modelo de primer orden.

El ANOVA para este diseño se presenta en la *tabla 3.18*

Para un valor de $F_{0,05,1,4} = 7,71$, se concluye que existen términos de segundo orden significativos.

Diseño compuesto central

Una vez identificada la región de respuesta óptima en la primera fase de este modelo, los diseños factoriales completos o fraccionarios a dos niveles no son suficientes, puesto que se requieren al menos tres niveles para cada factor y el diseño debe tener $1 + 2k + k(k - 1)/2$ puntos distintos para estimar los parámetros de un modelo de regresión cuadrática. Sin embargo, utilizar factoriales 3^k requiere de un número de combinaciones poco práctico, ya que si se tienen $k = 2$ factores se necesitarían nueve

Tabla 3.17: Diseño 2^2 con cinco puntos centrales

Exp. elem.	Var. natural MB	Var. natural MC1	Var. codif. MB	Var. codif. MC1	Respuesta y
1	6	6	-	-	1077
2	8	6	+	-	1080
3	6	8	-	+	2163
4	8	8	+	+	2164
5	7	7	0	0	1100
6	7	7	0	0	1077
7	7	7	0	0	1063
8	7	7	0	0	1114
9	7	7	0	0	1136

Tabla 3.18: ANOVA para el diseño 2^2 con cinco puntos centrales

Fuente de variación	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Cuadrado medio	F
MB	4	1	4	0.005
MC1	1177225	1	1177225	1397.304
Residuos (SSE)	611213.22	6		
(Interacción)	1	1	1	0.001
(Cuadráticos puros)	607842.22	1	607842.22	721.477
(Error puro)	3369.99	4	842.4975	
Total	1788442.2	8		

combinaciones de tratamientos y si se agrega un factor más se tendrían 27 combinaciones de tratamiento. Existen algunas clases de diseños desarrollados para la aproximación a una superficie de segundo orden, que no requieren tantas combinaciones de tratamientos como los diseños 3^k , algunos de estos son los diseños compuestos centrales propuestos por Box y Wilson(1951) y los diseños Box-Behnken.

En este caso de estudio se hará uso de un diseño compuesto central para poder estimar todos los coeficientes $\beta_{i,j}$ y de esta forma poder apreciar la geometría del espacio en detalle.

Para desarrollar un diseño compuesto central sólo se necesita agregar cuatro puntos axiales al diseño 2^2 con cinco puntos centrales, puesto que el ANOVA de este diseño indica que existen términos de segundo orden significativos.

Utilizando como centro óptimo (7, 7), es decir $MB = 7$ y $MC1 = 7$ se utilizó un diseño compuesto central (2^2 con cinco puntos centrales y cuatro puntos axiales). Los resultados se encuentran en la *tabla 3.19*

Modelo

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1x_1 + \hat{\beta}_2x_2 + \hat{\beta}_{11}x_1^2 + \hat{\beta}_{22}x_2^2 + \hat{\beta}_{12}x_1x_2 \quad (3,16)$$

Hipótesis

$$H_0 : \alpha_i = \beta_j = (\alpha\alpha)_{ii} = (\beta\beta)_{jj} = (\alpha\beta)_{ij} = 0$$

$$H_1 : \text{al menos una } \alpha_i, \beta_j, (\alpha\alpha)_{ii}, (\beta\beta)_{jj}, (\alpha\beta)_{ij} \neq 0$$

Los experimentos del 1 al 4 corresponden a los puntos del diseño 2^2 , los experimentos del 5 a 8 corresponden a los puntos axiales, y por último los que corresponden a los puntos centrales con del 9 al 13.

Para el análisis de los datos del diseño compuesto central se hizo uso del programa JMP IN, cuyos resultados se muestran en las siguientes tablas.

Tabla 3.19: Diseño compuesto central

Exp. elem.	Var. natural MB	Var. natural MC1	Var. codif. MB	Var. codif. MC1	Respuesta y
1	6	6	-	-	1077
2	8	6	+	-	1080
3	6	8	-	+	2163
4	8	8	+	+	2164
5	6	7	-1.41	0	1100
6	8	7	+1.41	0	1100
7	7	6	0	-1.41	1077
8	7	8	0	+1.41	2163
9	7	7	0	0	1100
10	7	7	0	0	1077
11	7	7	0	0	1063
12	7	7	0	0	1114
13	7	7	0	0	1136

Tabla 3.20: Resumen de ajuste

R^2	0.928371
R^2 ajustada	0.877208

Tabla 3.21: ANOVA para el diseño compuesto central

Fuente de variación	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Cuadrado medio	F	Probabilidad 0.0007
Modelo	2461074.7	5	492215	18.145	
Error	189884.5	7	27126		
Total	2650959.2	12			

Resumen de ajuste

De acuerdo a la *Tabla 3.20* se puede ver que hay buen ajuste puesto que el valor del coeficiente de determinación múltiple es de $R^2 = 0,928$, se acerca a 1 y esto permite asegurar que se ha logrado un modelo adecuado para esta función. La tabla de análisis de varianza muestra que el efecto de los dos factores tiene una probabilidad de significación observada de 0.0007 que es significativa comparada con 0.05. El valor de R^2 significa que la variación en la respuesta se explica muy bien con el modelo ajustado.

De la *tabla 3.21* se puede observar que el modelo completo de segundo orden es significativo, esto quiere decir que se rechaza la hipótesis: $H_0 : \alpha_i = \beta_j = (\alpha\alpha)_{ii} = (\beta\beta)_{jj} = (\alpha\beta)_{ij} = 0$, puesto que $F_0 = 18,145 > F_{0,01,5,7}$. Es decir se rechaza H_0 con una confianza del 99 %.

t*: Prueba t-Student.

De la *tabla 3.22* se obtiene la ecuación de la superficie de respuesta de segundo orden, estimada para los datos de contenido promedio en almacén. El modelo ajustado a

Tabla 3.22: Estimación de parámetros

Término	Estimación	Error	t*	<i>Prob</i> > t
Media	1098	73.66	14.91	
MB& RS	0.5	58.23	0.01	0.993
MC1& RS	463.23	58.23	7.96	0.001
MB*MC1	-0.5	82.35	-0.01	0.945
MB*MB	66.25	62.44	1.06	0.3239
MC1*MC1	326.25	62.44	5.22	0.001
Total				

Tabla 3.23: Prueba de efectos

Fuente	Suma de cuadrados	Grados de libertad	F	<i>Prob</i> > F
MB& RS	2.0	1	0.000	0.993
MC1& RS	1716652.5	1	63.284	< 0,0001
MB*MC1	1.0	1	0.000	0.995
MB*MB	30532.6	1	1.126	0.324
MC1*MC1	740445.7	1	27.296	0.001
Total				

los datos es:

$$\hat{y} = 1098 + 0,5x_1 + 463,23x_2 + 66,25x_1^2 + 326,25x_2^2 - 0,5x_1x_2$$

La *tabla 3.23* muestra que sólo el factor montacargas C1 es significativo, puesto que, tiene una probabilidad de significación observada de 0.0001 que es muy significativa comparada con 0.05.

Tabla 3.24: Coeficiente

		MB	MC1	Y
MB	66.25	-0.5	0.5	
MC1		326.25	463.23	

Tabla 3.25: Solución de la superficie de respuesta

Factor	Valor crítico
MB	-0.006453
MC1	-0.709935

Superficie de respuesta

Solución de la superficie de respuesta

La solución es un mínimo = 933.56693.

El resultado anterior muestra que se encontró un mínimo en la superficie de respuesta y los valores codificados de Montacargas B y Montacargas C1 donde se alcanza el mínimo son -0.006453 y -0.709935, respectivamente.

Observando los valores originales de MB y MC1 que corresponden a los valores codificados -1, 0, 1 aparecen en la *figura 3.1*.

Utilizando la *ecuación (3.29)*, dejando A_i como incógnita, entonces se tiene que el valor codificado -0.006453 corresponde a un valor de MB de $6,9935 \cong 7$. De igual

-1	0	1
6	7	8

Figura 3.3: Valores originales para Montacargas B (MB) y Montacargas C1 (MB)

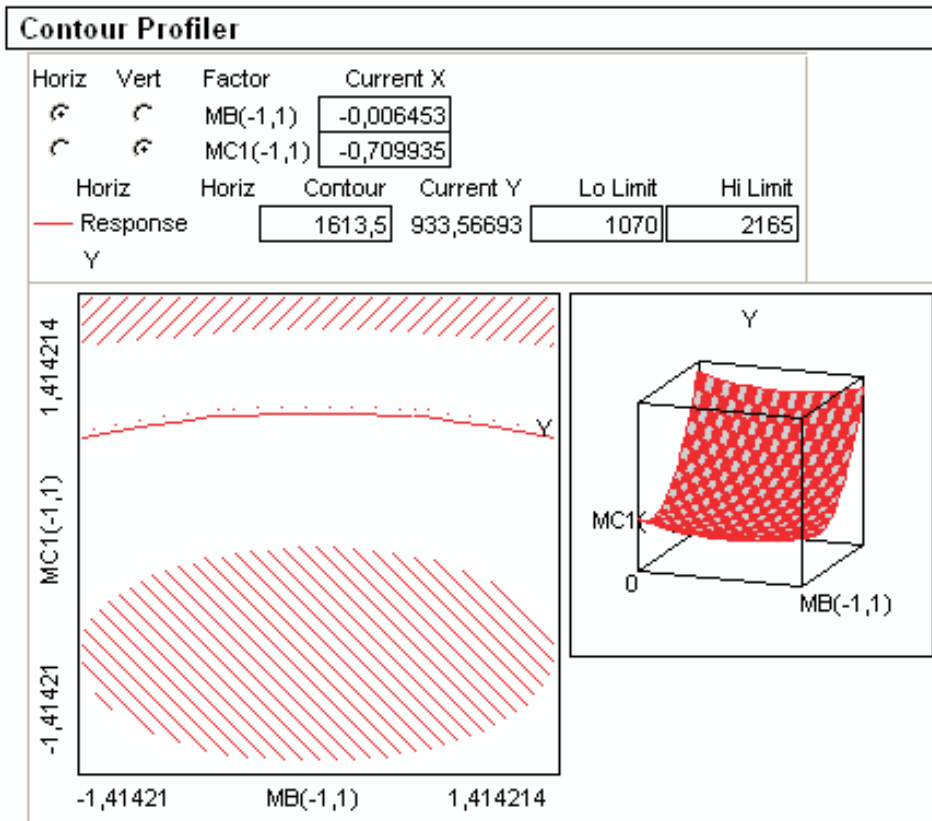


Figura 3.4: Gráfica de contornos y superficie de respuesta

manera se obtiene para el valor -0.709935 de MC1 un valor de $6,29 \cong 6$. La respuesta en decremento de saturación del almacén UP que se predice para estos valores es 933 tarimas.

$$x_i = \frac{(A_i - \bar{A})}{D} \tag{3,17}$$

donde A_i es el i -ésimo nivel del factor A, \bar{A} es el nivel promedio del factor A y $D = \frac{1}{2}(A_2 - A_1)$

Explorando la gráfica de contornos con los valores obtenidos en la solución se puede observar que los valores de la respuesta van decremantando conforme los círculos se van cerrando, lo que indica que la solución es un mínimo, en las figuras 3.2 y 3.3 se

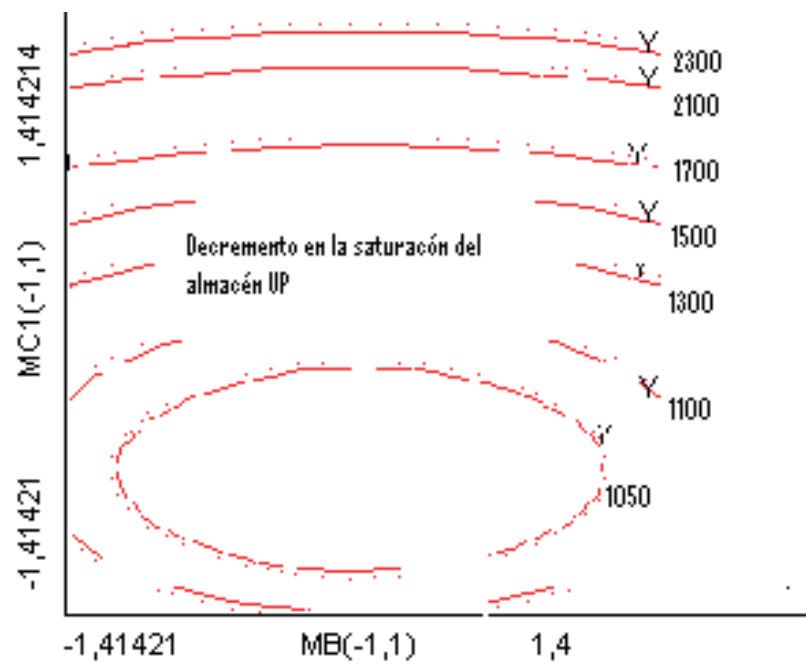


Figura 3.5: Figura de contornos con decrementos

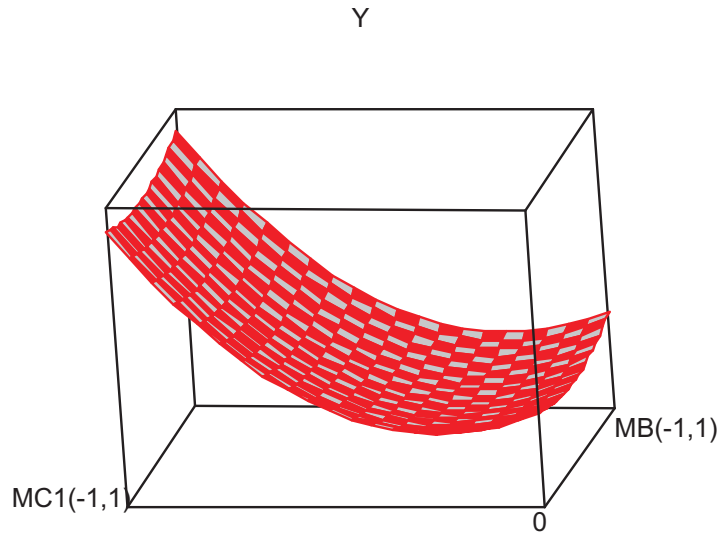


Figura 3.6: Superficie de respuesta

encuentran estos efectos. La *figura 3.4* muestra la forma de la superficie de respuesta, donde el punto mínimo de saturación del almacén corresponde a la cantidad de MB = 7 y MC1 = 6. La respuesta en decremento de saturación del almacén UP que se predice para estos valores es 933 tarimas.

3.6. Análisis del capítulo

En el capítulo III, se utilizan técnicas estadísticas para la solución del caso de estudio. Se divide en tres partes:

En la primera parte se desarrollan diseños de experimentos con datos obtenidos del sistema real, se desarrolla un diseño de experimentos con el objetivo de conocer el efecto que tienen el tipo de turno y las puertas, sobre el tiempo que se tarda un montacargas en llevar productos desde el almacén principal de UP hasta la zona de embarque en vuelta redonda, los resultados obtenidos fueron: con una confianza del 99%, se observó que el efecto del factor puerta no es significativo y de igual manera la interacción puerta-turno, sin embargo el efecto del factor turno es muy significativo

y se rechaza $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_b = 0$. Lo cual significa que el tiempo de recorrido es mayor en el turno nocturno, esto es debido a que generalmente el ritmo de trabajo humano es más bajo en el turno nocturno. Por otro lado, se realizó otro análisis para conocer si existen diferencias entre el sistema de montacargas y los turnos vespertino y nocturno para el tiempo en que tardan los montacargas en llevar producto UP desde la empleadora hasta el almacén principal en ida y vuelta. Los resultados obtenidos muestran que con una confianza del 95 % el efecto del factor *turno* es significativo. El efecto del factor *montacargas* no es significativo, así como tampoco es significativo el efecto de interacción.

Para la segunda parte de este capítulo, se utilizan diseños de experimentos desarrollados con el modelo de simulación. Se usa un diseño de experimentos para conocer los factores que tienen mayor importancia en el análisis de la capacidad del almacén principal de productos UP, con el fin de evitar la saturación del mismo. Los resultados obtenidos muestran que con una confianza de 95 % resultó significativo el efecto principal MC1 (montacargas C1). Por lo tanto, el factor 2 (cantidad de montacargas C1) es el único factor que tiene impacto en la saturación del almacén; por lo que es necesario incrementar la cantidad de éstos como una medida preventiva para evitar la saturación del mismo. Además, también se utilizó otro diseño de experimentos para encontrar los factores que tienen mayor impacto en la utilización de los andenes, con el fin agilizar el tiempo de carga de los camiones y evitar una conglomeración en dicha área. Los resultados obtenidos fueron: con una confianza del 95 % se puede observar que sólo es significativo el efecto principal MC1 (montacargas C1). De la misma manera que, en el análisis anterior la saturación de los andenes es provocada por el factor montacargas C1. Por lo que, puede concluirse que aumentando la cantidad de montacargas C1 ayuda a disminuir la saturación del almacén, así como disminuir el congestionamiento de los andenes.

En la última parte, se utilizan modelos de superficie de respuesta para encontrar el punto donde la saturación del almacén de producto terminados UP se hace mínima. Las variables que se manipularon para este análisis son: MB (montacargas B) y MC1 (montacargas C1). De acuerdo, a los resultados obtenidos en la gráfica de contornos se observó que los valores de la respuesta van disminuyendo conforme los círculos se van cerrando, lo que indica que la solución es un mínimo. El resultado dio como solución la cantidad de MB = 7 y MC1 = 6. Esto también puede observarse en la forma de la superficie de respuesta, donde se muestra el punto mínimo. La respuesta en decremento de saturación del almacén UP que se predice para estos valores es 933 tarimas.

Capítulo 4

APLICACIÓN DE TÉCNICAS DE REDUCCIÓN DE VARIANZA

4.1. Introducción

La aplicación de técnicas estadísticas apropiadas a los datos de salida de simulación es imprescindible si los resultados deben ser correctamente analizados e interpretados. Puesto que las simulaciones a gran escala pueden requerir grandes cantidades de tiempo de computadora y de almacenaje, análisis estadísticos apropiados (por ejemplo, requerir múltiples réplicas del modelo) pueden llegar a ser bastante costosos. Algunas veces el costo de un análisis estadístico sencillo puede resultar muy alto comparado con la precisión de los resultados, medidos por el ancho de los intervalos de confianza. El analista debe investigar la manera de incrementar la eficiencia de la simulación.

La eficiencia de la simulación requiere una programación cuidadosa y minimizar los requerimientos de almacenaje. Un enfoque puede ser la eficiencia estadística medida por *varianzas* de las variables aleatorias de salida de una simulación, (Rubinstein and Melamed, 1998 [28]). Si de alguna manera se puede reducir la varianza de una variable aleatoria de salida de interés sin dañar su expectativa puede obtenerse una gran precisión, por ejemplo reducir los intervalos de confianza con la misma

cantidad de simulaciones, o por otro lado, lograr una precisión deseada con menos simulaciones.

El método de aplicación de técnicas de reducción de varianza normalmente depende en particular del modelo (o modelos) de interés. Por lo tanto, se requiere un entendimiento minucioso del funcionamiento del modelo para usar las VRTs de forma apropiada. Además, generalmente es imposible conocer con anticipación que tanto una varianza puede ser reducida o si la varianza será reducida del todo en comparación con una simulación sencilla.

4.2. CASO DE ESTUDIO

En el presente capítulo se hace referencia nuevamente al problema de saturación del almacén de producto terminado UP, estudiado en el capítulo anterior. De acuerdo, a los resultados obtenidos después de desarrollar el método de diseño de experimentos se pudo conocer que los factores que más impactan en dicha saturación son la *cantidad de montacargas B* y la *cantidad de montacargas C1*. Una vez conocida esta información, se desarrolló el método de superficie de respuesta con el objetivo de determinar el punto donde la saturación del almacén de producto terminado UP se hace mínima. Las variables que se manipularon en el modelo de simulación para este análisis fueron: MB (montacargas B) y MC1 (montacargas C1).

En la solución de la superficie de respuesta, se pudo observar que el punto donde se hace mínima la saturación de almacén corresponde a las cantidades de montacargas siguientes: MB = 7, MB = 6. En el presente estudio, se analizarán dos configuraciones, la primera corresponde a las cantidades de montacargas que se usan en la actualidad en la planta, la segunda hace referencia a las cantidades encontradas en el método de superficie de respuesta. El objetivo es conocer si efectivamente, MB = 7, MB = 6 es mejor que MB = 3, MB = 3.

4.3. Números aleatorios comunes

La técnica CRN difiere de las otras, puesto que ésta es aplicada cuando se están comparando dos o más configuraciones alternativas de un sistema, en lugar de investigar una sólo configuración. Ésta técnica es probablemente la más útil y popular, (Law and Kelton, 2000 [2]).

La idea básica de CRN es que *se debería hacer la comparación de las configuraciones alternativas “bajo condiciones experimentales similares”*; para que de esta forma, se pueda tener mayor seguridad, *que cualquier diferencia observada en el desempeño es debida a la diferencia en las configuraciones del sistema y no a fluctuaciones de las “condiciones experimentales”¹*.

Para ver la justificación de CRN más formal, permítase considerar un caso de dos configuraciones alternativas, donde X_{1j} y X_{2j} son las observaciones de la primera y segunda configuración en la j -ésima réplica independiente, y se desea estimar $\zeta = \mu_1 - \mu_2 = E(X_{1j}) - E(X_{2j})$. Si se hacen n réplicas de cada uno de los sistemas y permíse $Z_j = X_{1j} - X_{2j}$ para $j = 1, 2, \dots, n$, entonces $E(Z_j) = \zeta$, de este modo,

$$\bar{Z} = \frac{\sum_{j=1}^n Z_j}{n}$$

es un estimador insesgado de ζ . Puesto que las Z_j son variables aleatorias IID ²,

$$Var[\bar{Z}(n)] = \frac{Var(Z_j)}{n} = \frac{Var(X_{1j}) + Var(X_{2j}) - 2Cov(X_{1j}, X_{2j})}{n}; \quad (4,1)$$

si las simulaciones de las dos configuraciones diferentes son realizadas de forma independiente ³, X_{1j} y X_{2j} serán independientes, así que, $Cov(X_{1j}, X_{2j}) = 0$. Por otro lado, si se pudiera de alguna manera hacer que las simulaciones de las configuracio-

¹Las **condiciones experimentales** son las variables aleatorias generadas que son usadas para manejar los modelos a través del tiempo simulado, en simulaciones de filas, por ejemplo, estas variables pueden ser tiempos de interarribo y requerimiento de servicio de clientes.

²Lo cual, quiere decir que las variables aleatorias son distribuidas de forma idéntica e independiente, este punto tiene importante relevancia, por lo que será discutido en la *sección 4.6*

³Significa que son realizadas con números aleatorios diferentes

nes 1 y 2 sean *correlacionadas de forma positiva*⁴, entonces $Cov(X_{1j}, X_{2j}) > 0$, de esta forma la varianza del estimador $\bar{Z}(n)$ es reducida.

De este modo, cuando $\bar{Z}(n)$ es observada en un experimento de simulación particular su valor debería ser cerrado a ζ . ***CRN es una técnica que intenta inducir una correlación positiva usando los mismos números aleatorios para simular todas las configuraciones.***

Desafortunadamente no hay forma de saber si CRN trabajará de forma correcta, es decir si efectivamente reducirá la varianza o si lo hace que tanto puede reducirla. La eficacia de CRN depende completamente de los modelos en particular que están siendo comparados.

En general, CRN no es implementado de forma apropiada si sólo se reciclan los mismos números aleatorios, sin poner atención de cómo son usados. La dificultad de mantener una sincronización de forma apropiada, en general, depende de la estructura y los parámetros del modelo, y de los métodos usados para generar las variables aleatorias necesitadas en las simulaciones.

Una forma que podría ser considerada para mantener la sincronización en una simulación, es la siguiente. Si hay múltiples streams⁵ disponibles de números aleatorios operando de forma simultánea, se puede dedicar un stream para producir los números aleatorios para cada tipo particular de variables aleatorias de entrada [2]. En una simulación de fila, por ejemplo, un stream podría ser dedicado para generar los tiempos de interarribo y otro stream diferente podría ser dedicado para los tiempos de servicio. La dedicación de streams un es una buena idea, puesto que, la mayoría de los paquetes de simulación cuentan con la facilidad para separar streams de números aleatorios.

⁴Para obtener una **correlación positiva** se debe sincronizar los números aleatorios a través del sistema en una réplica particular; es decir un número aleatorio específico usado para un propósito específico en una configuración es usado para exactamente el mismo propósito en todas las otras configuraciones, (Rubinstein and Melamed, 1998 [28]). Por ejemplo, si un U_k es usado en la primera de dos configuraciones de fila para generar un tiempo de servicio específico, entonces también debería ser usado en la segunda configuración para generar el mismo tiempo de servicio; de otra forma, el beneficio de CRN puede ser bajo.

⁵Un **stream** es una secuencia cíclica de números aleatorios de forma independiente. Los streams generan números aleatorios entre 0 y 1 que son usados para muestreo de distribuciones seleccionadas.

4.4. Streams

Una de las características más valiosas de la simulación es la habilidad para replicar y aislar funciones probabilísticas y actividades dentro de un sistema, para un estudio específico. En el mundo real, los eventos tienden a ocurrir de forma aleatoria, de acuerdo a un cierto patrón de distribución o estadístico. Para dar aleatoriedad al modelo, ProModel usa distribuciones de probabilidad y éstas en conjunción con streams regresan valores aleatorios de acuerdo a una distribución estadística específica.

Los streams generan números aleatorios entre 0 y 1. Estos números aleatorios son usados para generar números aleatorios adicionales de otras distribuciones de probabilidad, tales como, (Normal, Beta, Gamma, etc.). Después de una secuencia cíclica a través de todos los números aleatorios en el ciclo, el ciclo empieza otra vez con la misma secuencia. La longitud del ciclo antes de repetirse es llamada periodo de ciclo y normalmente es muy largo. Un stream aleatorio es generado usando una ecuación o generador de números aleatorios. Este generador empieza con un valor de semilla inicial después que, cada valor sucesivo usa el valor previo como entrada para el generador. Cada stream usado en una simulación tiene su semilla independiente propia y sigue la pista de sus valores propios para entrada subsecuente para el generador. Donde la secuencia que empieza en el ciclo depende del valor de semilla inicial usado por el generador.

Debido a que la misma semilla produce la misma secuencia de valores cada vez que es usada, las funciones completamente independientes dentro de un modelo deben tener sus streams propios de inicio. Por ejemplo, las distribuciones de arriba deberían tener un stream de números aleatorios que no sea usado en ninguna otra parte del modelo entero.

Los stream son usados en conjunción con distribuciones. Pueden ser utilizados hasta 100 streams en un modelo. Un stream genera números aleatorios que se usan para muestreo de distribuciones seleccionadas. Por default todos los stream usan valor de semilla número 1 y no son recetados entre réplicas si se realizan réplicas múltiples.

Cuando se incluye una distribución (por ejemplo, Normal, Beta y Gamma) en el modelo, ProModel usa un generador de números aleatorias para producir un conjunto de secuencia o stream de números aleatorios entre 0 y 1 ($0 \leq x < 1$) que son usados

en la distribución. Antes de poder seleccionar cualquier número aleatorio ProModel requiere un valor de semilla inicial para identificar el punto de inicio del stream. Una vez que se haya especificado un valor de semilla, ProModel cambia la selección de números aleatorios (en incrementos de 100, 000 números) por aquellos números de posiciones y empieza los valores de muestra. Puesto que sólo hay un stream de números aleatorios, ésto asegura que los valores seleccionados no sobrepasen. ProModel incluye cien valores de semilla y cada semilla produce un conjunto único de números aleatorios. Si no se especifica un valor de semilla inicial, automáticamente se usará el número de stream como el valor de semilla (lo que quiere decir, stream 3 usa semilla 3).

Cuando se usa un valor de semilla específico (por ejemplo, 17), ProModel produce una secuencia única de números aleatorios que es usada cada vez que se aplica ese valor de semilla. Esto permite mantener la consistencia de algunos elementos del modelo y permite que otros elementos varíen. Para realizar lo anterior, se debe especificar un stream de números aleatorios para el conjunto de actividades que se desean mantener constantes, y otros streams de números aleatorios para todos los otros conjuntos de actividades.

El siguiente ejemplo muestra una razón por la cual son útiles streams múltiples. Dos máquinas, M1 y M2, fallan cada cuatro horas en su servicio. Para este modelo, la frecuencia o tiempo entre fallas es definido por una distribución normal con una media de 240 minutos y una desviación estándar de 15 minutos, $N(240, 15)$. Las máquinas permanecerán descompuestas en un tiempo de 10 minutos. Debido a que el stream no está especificado en la distribución normal, ProModel usa un número de stream para generar valores de muestra para ambas máquinas. Así que, si los siguientes dos números en un número stream resultan en valores de muestra de 218.37 y 264.69, la M1 recibirá 218.37 y la M2 recibirá 264.69. Además, las dos máquinas fallarán en tiempos diferentes, la máquina 1 después de casi cuatro horas y la máquina 2 después de más de cuatro horas. Suponer, sin embargo, que las políticas de reparación indican que estas máquinas deben ser reparadas al mismo tiempo. Las máquinas deberían fallar al mismo tiempo. Un sólo número stream no las conducirá a la falla al mismo tiempo, puesto que este envía a las distribuciones de máquina dos números diferentes. Por otro lado, usando dos streams (10 y 11, respectivamente) con la misma semilla inicial asegura que las máquinas recibirán el mismo número aleatorio cada vez. Los dos streams tienen el mismo valor de semilla inicial, así que ellos producirán exactamente la misma secuencia de números aleatorios. El primer número de stream 10 será exactamente el mismo que el primer

número de stream 11, los segundos números serán los mismos, en realidad, cada número será el mismo. Asignando el stream 10 a la máquina 1 y el 11 a la máquina 2, ambas máquinas fallarán exactamente al mismo tiempo.

Si no es especificado un número de stream en una distribución, el stream tomará el valor de uno, y no es reseteado de forma automática después de cada réplica. El parámetro stream es siempre el último parámetro especificado en una distribución. Estas funciones de distribución son funciones incorporadas que en conjunto con streams regresan valores aleatorios de acuerdo a una distribución estadística. En la *Tabla 4.1* se indican algunas distribuciones y cómo deben ser especificadas en ProModel.

Tabla 4.1 Algunas distribuciones disponibles en ProModel y su sintaxis

Tipo de distribución	Sintaxis	Componentes individuales
Beta	$B(a, b, c, d \{, < s > \})$	a = valor de forma 1, b = valor de forma 2 c = cota inferior, d = cota superior
Binomial	$BI(a, b \{, < s > \})$	a = tamaño de lote, b = probabilidad de éxito
Erlang	$ER(a, b \{, < s > \})$	a = valor medio, b = parámetro
Exponencial	$E(a \{, < s > \})$	a = media
Lognormal	$L(a, b \{, < s > \})$	a = media, b = desviación estándar
Normal	$N(a, b \{, < s > \})$	a = media, b = desviación estándar

Para asignar un valor de semilla inicial diferente a un stream y para indicar que el valor de semilla debe ser reseteado al valor de semilla inicial entre réplicas, se usa el editor stream que se encuentra en el menú “Build” de ProModel. La tabla del editor stream contiene tres campos, los cuales se indican en la *Tabla 4.2*.

Tabla 4.2 Tabla del editor stream

Número de stream	Número de semilla	Reset
------------------	-------------------	-------

En el campo “número de stream” (que va de 1 al 100), se indica el número, el cual identifica cada stream. En “número de semilla” (1 a 100), se indica el valor

de semilla de inicio. Los streams que tienen el mismo valor de semilla generan la misma secuencia de números aleatorios. En el campo “reset”, se debe poner “yes” si se desea que el stream sea reseteado al valor de semilla inicial en cada réplica del modelo de simulación.

4.5. Especificación de streams para el caso de estudio

Para este caso de estudio, se usaron nueve streams que corresponden a los campos de aleatoriedad del modelo, específicamente en los arribos de las bandas 1,2, . . . , 4; a los arribos en la empleadora, al almacén temporal y a las bandas 5, 6 y 7 en las cuales arriban las tarimas de productos UP. Los números de streams y de semilla se especificaron como se muestra en la *Tabla 4.3*

Tabla 4.3 Números de streams y de semilla inicial para el caso de estudio

Número de stream	Número de semilla	Reset
1	11	Yes
2	11	Yes
3	11	Yes
4	11	Yes
5	25	Yes
6	25	Yes
7	15	Yes
8	15	Yes
9	15	Yes

Las distribuciones de arribos fueron especificadas como se presenta en la *Tabla 4.4*

Tabla 4.4 Especificación de las distribuciones de los arribos en el modelo de simulación

Location	Tipo de distribución	Sintaxis
Banda 1	Lognormal	$L(.79321, .4582, 1)$
Banda 2	Pearson5	$P5(25.2891, 24.874, 2)$
Banda 3	Gamma	$G(1.8695, .7255, 3) \div G(3.8695, .7255, 3)$
Banda 4	Pearson5	$P5(3.713, 1.495, 4)$
Emplayadora	Lognormal	$L(2.0275, .6199, 5)$
Almacén temp.	Lognormal	$L(2.0275, .6199, 6)$
Banda 5	Lognormal	$L(4.6, .6199, 7) \div 3$
Banda 6	Lognormal	$L(4.6, .6199, 8) \div 3$
Banda 7	Lognormal	$L(4.6, .6199, 9) \div 3$

La especificación de los números de streams y de semilla inicial como fue especificado en las *Tablas 4.3 y 4.4* se hace con el objetivo de minimizar las fluctuaciones de las condiciones experimentales de las variables de arriba y de esta forma, poder realizar la comparación de dos escenarios del modelo de simulación, como se indicó en el planteamiento del problema.

4.5.1. Especificación de los parámetros para correr el modelo

El modelo de simulación que es usado para este caso de estudio, es de tipo “simulación sin terminación”, lo cual significa, que no hay un evento natural E para especificar la longitud de una corrida, y se está interesado en el comportamiento del sistema en una corrida larga, cuando está operando “normalmente”. Desafortunadamente, “en una corrida larga” no se traslada a un evento de terminación E de forma natural. Una medida de desempeño para tal simulación, es un parámetro de estado estable. Para este tipo de simulación se debe especificar un estado trascendente (warmup period) que determine las condiciones apropiadas para estabilizar el sistema; además también debe especificarse la longitud de corrida, la cual debe ser mucho mayor que la longitud del estado trascendente, puesto que el muestreo será realizado sólo con las observaciones obtenidas después del estado trascendente.

Para correr el modelo se determinó un estado trascendente de 50 horas y una longitud

de corrida de 200 horas.

Debido a que, el objetivo es comparar dos configuraciones del sistema (*configuración 1* (MB = 3, MC1 = 3); *configuración 2* (MB = 7, MC1 = 6)) para conocer si efectivamente existe una diferencia significativa en la reducción de la saturación del almacén de productos UP usando la solución obtenida a partir del método de superficie de respuesta en el capítulo 3. Además con el uso de CRN se desea analizar los datos de salida de la simulación de las dos configuraciones mencionadas anteriormente para conocer si existe una diferencia en los resultados con el uso de esta técnica de reducción de varianza.

En las *Tablas 4.5 a 4.8* se encuentran los datos de salida obtenidos al correr la simulación con los dos escenarios, realizando diez réplicas de cada uno. Las *Tablas 4.5 y 4.6* muestran los valores de las respuestas de salida promedio que se obtuvieron al correr el sistema haciendo uso de CRN. En *Tablas 4.7 y 4.8* se encuentran los datos obtenidos corriendo el sistema de forma normal (sin usar CRN). La medida de desempeño que se está analizando es la cantidad promedio mantenida en el almacén a lo largo de las 200 horas que es corrido el modelo después del estado trascendente en cada réplica. Cabe mencionar que la cantidad promedio total se obtiene al sumar la cantidad de cada una de las cuatro secciones en que está dividido el almacén de productos UP.

Tabla 4.5 Configuración 1, usando CRN

Número de réplica	Alm. UP 1	Alm. UP 2	Alm. UP 3	Alm. UP 4	Total X_{1j}
Réplica 1	458	460	455	458	1831
Réplica 2	464	466	465	462	1857
Réplica 3	449	452	447	450	1798
Réplica 4	461	463	459	462	1845
Réplica 5	447	450	445	448	1790
Réplica 6	470	472	468	470	1880
Réplica 7	445	447	442	445	1779
Réplica 8	468	470	466	469	1873
Réplica 9	438	441	435	439	1753
Réplica 10	472	474	470	473	1889

Tabla 4.6 Configuración 2, usando CRN

Número de réplica	Alm. UP 1	Alm. UP 2	Alm. UP 3	Alm. UP 4	Total X_{2j}
Réplica 1	336	339	331	337	1343
Réplica 2	351	354	346	352	1403
Réplica 3	329	331	323	330	1313
Réplica 4	345	347	340	345	1377
Réplica 5	313	316	307	314	1250
Réplica 6	364	366	360	365	1455
Réplica 7	306	309	300	307	1222
Réplica 8	360	362	355	361	1438
Réplica 9	291	294	285	292	1162
Réplica 10	370	373	366	371	1180

Tabla 4.7 Configuración 1, sin usar CRN

Número de réplica	Alm. UP 1	Alm. UP 2	Alm. UP 3	Alm. UP 4	Total X_{1j}
Réplica 1	462	464	459	462	1847
Réplica 2	468	470	465	468	1871
Réplica 3	459	461	456	459	1835
Réplica 4	465	467	463	466	1861
Réplica 5	476	477	473	476	1902
Réplica 6	479	481	477	480	1917
Réplica 7	443	446	440	444	1773
Réplica 8	433	435	429	433	1730
Réplica 9	436	439	433	437	1745
Réplica 10	478	479	476	478	1911

Tabla 4.8 Configuración 2, sin usar CRN

Número de réplica	Alm. UP 1	Alm. UP 2	Alm. UP 3	Alm. UP 4	Total X_{2j}
Réplica 1	362	364	361	363	1450
Réplica 2	348	350	347	349	1394
Réplica 3	341	343	340	342	1366
Réplica 4	356	358	355	357	1426
Réplica 5	380	382	380	381	1523
Réplica 6	389	390	388	389	1556
Réplica 7	306	308	305	306	1225
Réplica 8	281	284	280	282	1127
Réplica 9	290	293	289	291	1163
Réplica 10	385	387	384	386	1542

4.6. Fundamentos estadísticos para el análisis de los resultados de la simulación

La terminación de un estudio de simulación exitoso involucra mucho más que construir un organigrama del sistema bajo estudio, traducir el organigrama a un “programa” de computadora y después realizar una o pocas corridas de cada configuración del sistema propuesto. El uso de la probabilidad y la estadística es una parte integrante de un estudio de simulación, puesto que éstas se necesitan para entender cómo modelar un sistema probabilístico, validar el modelo de simulación, seleccionar las distribuciones de probabilidad de entrada, generar muestras aleatorias de estas distribuciones, desarrollar análisis estadísticos de los datos de salida y diseño de experimentos de simulación.

En muchos estudios de simulación se gasta una gran cantidad de tiempo y dinero en el desarrollo y “programación”, pero se realiza poco esfuerzo para analizar los datos de salida de la simulación de forma apropiada. Una forma muy común de operación, es hacer una sólo corrida de simulación de longitud arbitraria y entonces tratar las estimaciones resultantes como “verdaderas” características del modelo. Puesto que, las muestras aleatorias de las distribuciones de probabilidad son normalmente usadas para manejar un modelo de simulación a través del tiempo, estas estimaciones son sólo realizaciones particulares de las variables aleatorias que pueden tener grandes

varianzas. Como un resultado, estas estimaciones podrían, en una corrida particular de simulación diferir enormemente de las características verdaderas del modelo. Por lo cual, podría haber una probabilidad importante de hacer inferencias erróneas acerca del sistema bajo estudio.

Históricamente, hay varias razones, por las que el análisis de datos de salida no ha sido conducido de forma apropiada. La primera, es que los usuarios frecuentemente tienen la impresión desafortunada de que la simulación es sólo un ejercicio de programación en computadora. Consecuentemente, muchos estudios de simulación empiezan con la construcción de un modelo conceptual y la programación subsiguiente, y al final con una sólo corrida del programa para producir “las respuestas”. En realidad, *una simulación es un experimento de muestreo estadístico realizado en computadora*. Por lo tanto, se deben aplicar técnicas estadísticas apropiadas para diseñar y analizar los experimentos de simulación. Una segunda razón para el análisis estadístico inadecuado es que los procesos de salida de todas las simulaciones virtuales son no estacionarias y auto-correlacionadas. De este modo, las técnicas estadísticas basadas en observaciones IID no son directamente aplicables.

Ahora se describirá de forma más precisa la naturaleza de las salidas de simulación. Se considera Y_1, Y_2, \dots un proceso estocástico ⁶ de salida de una sola corrida de simulación. Por ejemplo, Y_i puede ser el rendimiento (producción) en la i -ésima hora para un sistema de manufactura. Las Y_i son variables aleatorias que, en general no

⁶Un **proceso estocástico** es una colección de variables aleatorias “similares” ordenadas en el tiempo, las cuales son todas definidas en un espacio muestral común. El conjunto de todos los valores posibles que estas variables aleatorias pueden tomar es llamado el *espacio de estado* si la colección es X_1, X_2, \dots , entonces se tiene un proceso estocástico de tiempo discreto. Si la colección es $\{X(t), t \geq 0\}$, entonces se tiene un proceso estocástico de tiempo continuo. De forma más específica, considérese un sistema de fila con un sólo servidor, por ejemplo, la fila M/M/1, con tiempos de interarribo IID A_1, A_2, \dots , tiempos de servicio IID S_1, S_2, \dots , y los clientes son servidos de una forma FIFO (los primeros que entran, son los primeros que salen). Relativo al experimento de generar las variables aleatorias A_1, A_2, \dots , y S_1, S_2, \dots , se puede definir el proceso estocástico de tiempo discreto de demoras en la fila D_1, D_2, \dots , como sigue:

$$D_1 = 0$$

$$D_{i+1} = \max\{D_i + S_i - A_{i+1}, 0\} \text{ para } i = 1, 2, \dots$$

De este modo, la simulación mapea las variables aleatorias de entrada (esto es, las A_i y las S_i) en los procesos estocásticos de salida D_1, D_2, \dots , de interés. Aquí, el espacio de estado es el conjunto de números reales positivos.

serán independientes y tampoco distribuidas de forma idéntica. Por lo tanto, las fórmulas que suponen independencia no pueden ser aplicables directamente.

Se supone $y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1m}$ como una realización de las variables aleatorias Y_1, Y_2, \dots, Y_m que resultan de hacer una corrida de simulación de longitud m observaciones usando los números aleatorios u_{11}, u_{12}, \dots . (El i -ésimo número aleatorio usado en la j -ésima corrida es denotado por u_{ji} .) Si se corre la simulación con un conjunto diferente de números aleatorios u_{21}, u_{22}, \dots , entonces se obtendrá una realización diferente $y_{21}, y_{22}, \dots, y_{2m}$ de las variables aleatorias Y_1, Y_2, \dots, Y_m . (Las dos realizaciones no son las mismas, puesto que los números aleatorios diferentes usados en las dos corridas producen muestras diferentes de las distribuciones de probabilidad de entrada.) En general, suponga que se hacen n réplicas (corridas) independientes de la simulación (esto es, son usados números aleatorios diferentes para cada réplica, los contadores estadísticos son reseteados al empezar cada una de las réplicas, y cada réplica usa las mismas condiciones iniciales ⁷) de longitud m , resultando las siguientes observaciones:

$$\begin{array}{ccccccc} y_{11} & \cdots & y_{1i} & \cdots & y_{1m} & & \\ y_{21} & \cdots & y_{2i} & \cdots & y_{2m} & & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ y_{n1} & \cdots & y_{ni} & \cdots & y_{nm} & & \end{array}$$

Las observaciones de una réplica particular (fila) no son IID. Sin embargo, note que $y_{1i}, y_{2i}, \dots, y_{ni}$ (de la i -ésima columna) son observaciones IID de la variable aleatoria Y_i , para $i = 1, 2, \dots, m$. Esta **independencia a través de corridas** es la clave para los métodos de análisis de datos de salida donde se requiere que las observaciones sean IID (además, también permite hacer uso de las fórmulas de la *sección 4.6.1*). Estrictamente hablando, el objetivo del análisis de datos de salida es usar las observaciones y_{ji} ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$) para sacar deducciones acerca de las variables aleatorias Y_1, Y_2, \dots, Y_m . Por ejemplo, $\bar{y}_i(n) = \sum_{j=1}^n y_{ji}/n$ es un estimador insesgado de $E(Y_i)$.

⁷ *condiciones iniciales iguales* existen dos enfoques que pueden ser aplicados para este punto, el primero es elegir un **estado trascendente**, que permita determinar las condiciones iniciales apropiadas para la simulación antes de iniciar el muestreo, una desventaja de este enfoque es que el tiempo simulado que forma parte del estado trascendente no es usado directamente en la estimación; el segundo enfoque es recoger datos del sistema real de varios días diferentes, de tal forma que se puedan reunir las condiciones iniciales del modelo de simulación lo más parecido al sistema real.

4.6.1. Fórmulas para la estimación de medias y varianzas

Suponga que X_1, X_2, \dots, X_n son variables aleatorias IID (observaciones) con media poblacional finita μ y varianza poblacional finita σ^2 . Suponga además, que se desea estimar μ . Entonces la **media de la muestra**, (Banks, 1998 [27])

$$\bar{X}(n) = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \quad (4,2)$$

es un estimador (puntual) insesgado de μ , que es, $E[\bar{X}(n)] = \mu$. Lo que significa que si $\bar{X}(n)$ es un estimador de μ , al desarrollar un gran número de experimentos independientes, resultando de cada uno una $\bar{X}(n)$, el promedio de las $\bar{X}(n)$ será μ .

De forma similar, la **varianza de la muestra**

$$S^2(n) = \frac{\sum_{i=1}^n [X_i - \bar{X}(n)]^2}{n - 1} \quad (4,3)$$

es un estimador de σ^2 , puesto que $E[S^2(n)] = \sigma^2$. (La desviación estándar de una variable aleatoria X_i es definida como $\sigma_i = \sqrt{\sigma_i^2}$)

La dificultad de usar $\bar{X}(n)$ como un estimador de μ sin información adicional es que no se tiene una forma de calcular que tan cercano es $\bar{X}(n)$ a μ . Debido a que $\bar{X}(n)$ es una variable aleatoria con varianza $Var[\bar{X}(n)]$; en un experimento $\bar{X}(n)$ puede ser cercano a μ , mientras que en otro puede diferir de μ en una gran cantidad. La forma usual para calcular la precisión de $\bar{X}(n)$ como un estimador de μ es construir un intervalo de confianza para μ . El primer paso en la construcción de un intervalo de confianza es estimar $Var[\bar{X}(n)]$. Puesto que

$$\begin{aligned}
\text{Var}[\bar{X}(n)] &= \text{Var}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) \\
&= \frac{1}{n^2} \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \\
&= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) \\
&= \frac{1}{n^2} n\sigma^2 \\
&= \frac{\sigma^2}{n}
\end{aligned}
\tag{4,4}$$

en la ecuación 4.4 se asume que las X_i son independientes. Es claro que, en cuanto más grande es el tamaño de la muestra, debería ser más cercano $\bar{X}(n)$ a μ . Además, un estimador insesgado de $\text{Var}[\bar{X}(n)]$ es obtenido reemplazando σ^2 en la ecuación 4.4 por $S^2(n)$, resultando

$$\hat{\text{Var}}[\bar{X}(n)] = \frac{S^2(n)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n [X_i - \bar{X}(n)]^2}{n(n-1)}$$

puede observarse que, la expresión para $\hat{\text{Var}}[\bar{X}(n)]$ tiene una n y una $n-1$ en el denominador cuando es escrita en términos de las X_i y $\bar{X}(n)$.

La medida de dependencia entre dos variables aleatorias, puede ser calculada por medio de la *covarianza*. La covarianza entre dos variables aleatorias X_i y X_j (donde $i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, n$), que es una medida de su dependencia (lineal), es denotada por C_{ij} o $\text{Cov}(X_i, X_j)$ y es definida por

$$C_{ij} = E[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)] = E(X_i X_j) - \mu_i \mu_j$$

Note que las covarianzas son simétricas, esto es, $C_{ij} = C_{ji}$, y que si $i = j$, entonces $C_{ij} = C_{ii} = \sigma_i^2$

Suponga que X y Y son variables aleatorias con covarianza desconocida $Cov(X, Y)$. Si los pares X_i, Y_i (para $i = 1, 2, \dots, n$) son observaciones independientes de X, Y , entonces

$$\hat{Cov}(X, Y) = \frac{\sum_{i=1}^n [X_i - \bar{X}(n)][Y_i - \bar{Y}(n)]}{n - 1} \quad (4,5)$$

es un estimador insesgado de $Cov(X, Y)$.

Una de las formas más efectivas para poder verificar si CRN trabajó correctamente, es decir, si está induciendo una correlación positiva, es calcular la correlación, haciendo uso de las ecuaciones 4.6 y 4.7

La correlación entre X y Y como una medida de dependencia (lineal) principal es dada por

$$Cor(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} \quad (4,6)$$

Por otro lado, la correlación estimada de dos variables X_{1j} y X_{2j} , se obtiene a partir de la siguiente ecuación

$$\hat{Cor}(X_{1j}, X_{2j}) = \frac{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n [X_{1j} - \bar{X}_1(n)][X_{2j} - \bar{X}_2(n)]}{S_1(n)S_2(n)} \quad (4,7)$$

4.7. Intervalos de confianza para la diferencia entre respuestas esperadas de dos sistemas

Se supone X_{ij} ($i = 1, 2$, donde i representa los dos tipos de configuraciones definidas en la sección 4.5.1; $j = 1, 2, \dots, n$, donde j representa las $n = 10$ réplicas independientes realizadas con el modelo de simulación) sea una variable aleatoria que represente la cantidad promedio total ⁸ de tarimas en el almacén de productos UP

⁸ *Cantidad promedio total* se refiere a la suma de las cantidades de tarimas de las cuatro subdivisiones del almacén UP.

mantenida durante las 250 horas que fue simulado el sistema, sin tomar en cuenta las 50 horas de calentamiento, en la j -ésima réplica. Las n réplicas fueron realizadas de forma independiente, con números aleatorios diferentes, por lo tanto, X_{ij} es una variable aleatoria IID.

Los intervalos de confianza para la diferencia entre respuestas esperadas de dos sistemas, se determinan mediante una comparación formando un intervalo de confianza para la diferencia entre las dos esperanzas. En lugar de hacer una prueba de hipótesis para ver si la diferencia observada es diferente de cero de forma significativa. Mientras que, una prueba de hipótesis da como resultado una conclusión de “aceptación” o “rechazo”, un intervalo de confianza, además de esta información también cuantifica en cuanto difieren las esperanzas. (En muchos casos, las dos esperanzas serán diferentes. De este modo, la hipótesis nula de igualdad de medias es falsa.)

Para $i = 1, 2$, se supone que $X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in_i}$ es una muestra de n_i observaciones IID del sistema i , y $\mu_i = E(X_{ij})$ es la respuesta esperada de interés; por lo que estamos interesados en construir un intervalo de confianza para $\zeta = \mu_1 - \mu_2$.

4.7.1. Un intervalo de confianza pareado t

Si $n_1 = n_2$, entonces se pueden hacer pares X_{1j} con X_{2j} para definir $Z_j = X_{1j} - X_{2j}$, para $j = 1, 2, \dots, n$. Entonces, las Z_j son variables aleatorias IID y $E(Z_j) = \zeta$, la cantidad para la cual se desea construir un intervalo de confianza. De este modo,

$$\bar{Z}(n) = \frac{\sum_{j=1}^n Z_j}{n}$$

y

$$\hat{V}ar[\bar{Z}(n)] = \frac{\sum_{j=1}^n [Z_j - \bar{Z}(n)]^2}{n(n-1)}$$

forma el intervalo de confianza de $100(1 - \alpha)$ por ciento (aproximado)

$$\bar{Z}(n) \pm t_{n-1, 1-\alpha/2} \sqrt{\hat{V}ar[\bar{Z}(n)]} \quad (4,8)$$

Si las Z_j son normalmente distribuidas, este intervalo de confianza es exacto, esto es, cubre ζ con probabilidad $1 - \alpha$. De otra manera, se cuenta con el teorema del límite central, que dice que esta probabilidad de cobertura estará cerca de $1 - \alpha$ para n grande. Un punto importante aquí, es que no se tiene que asumir que X_{1j} y X_{2j} son independientes; tampoco se tiene que suponer que $Var(X_{1j}) = Var(X_{2j})$. Permitir una correlación positiva entre X_{1j} y X_{2j} puede ser de gran importancia, puesto que esto conduce a una reducción en $Var(Z_j)$ y de este modo, a un intervalo de confianza más pequeño. En la *sección 4.3* se presenta el método de *números aleatorios comunes*, el cual puede producir esta correlación positiva entre las observaciones en los diferentes sistemas. El intervalo de confianza de la *ecuación 4.8* es llamado *intervalo de confianza pareado t* , y en su derivación, esencialmente se reduce el problema de dos sistemas a uno que involucre una sólo muestra, normalmente las Z_j .

Haciendo uso del intervalo de confianza pareado t , se desea comparar los dos sistemas X_{ij} , donde X_{1j} corresponde a la configuración 1 y X_{2j} a la configuración 2 como se describe al inicio de esta sección, con el fin de conocer si existe una diferencia significativa entre μ_1 y μ_2 . Para la primera configuración MB = 3, MC1 = 3; el la segunda MB = 7, MC1 = 6, las corridas para cada una de las configuraciones se realizan de forma independiente y se hacen $n = n_1 = n_2 = 10$ réplicas independientes del modelo bajo ambas configuraciones; además se realizan dos comparaciones, la primera se refiere a los datos que se obtienen usando CRN (*Tablas 4.5 y 4.6*) y la segunda comparación sin usar CRN (*Tablas 4.7 y 4.8*). En las *Tablas 4.9 y 4.10* se encuentran los valores de Z_j para ambos sistemas; haciendo uso de estos datos se obtiene $\bar{Z}(10) = 515,2$ y $\hat{Var}[\bar{Z}(10)] = 753,99$, para calcular un intervalo de confianza (aproximado ⁹) de 90% se hace uso de la *ecuación 4.8*, obteniendo lo siguiente

$$515,2 \pm t_{9,1-0,10/2} \sqrt{753,99}$$

$$515,2 \pm (1,833)(27,46)$$

obteniendo un intervalo de confianza de [465, 566] para $\zeta = \mu_1 - \mu_2$. De este modo, con una confianza del 90% aproximadamente, se puede decir que μ_1 difiere de μ_2 , además aparece que la *configuración 2* es mejor, puesto que conduce a una cantidad

⁹Se usa la palabra “aproximado” para describir el nivel de confianza, puesto que $n_1 = n_2 = 10$ puede o no ser bastante “grande” para este modelo, de acuerdo al teorema de límite central para tener el efecto tomado.

promedio de tarimas más bajo (entre 464.88 y 565.53, lo cual no habría sido conocido con una prueba de hipótesis). Este intervalo de confianza se obtuvo de los datos que se encuentran en la *Tabla 4.9* donde las corridas se llevan a cabo usando CRN. El intervalo de confianza que se obtiene con los datos donde no se usa CRN, se presenta a continuación

$$462 \pm t_{9,1-0,10/2} \sqrt{807,16}$$

$$462 \pm (1,833)(28,41)$$

Resultando el intervalo $[410, 514]$, con una confianza del 90 % aproximado, se puede decir que existe diferencia entre μ_1 y μ_2 , además también se observa que ambos intervalos ($[465, 566]$, $[410, 514]$) son pequeños, lo que significa que $Var(Z_j)$ es también pequeña para los dos casos.

4.7.2. Un intervalo de confianza de dos muestras t modificado

El intervalo de confianza entre dos muestras (t modificado) es un segundo enfoque para formar un intervalo de confianza para ζ cuando no se puede hacer pares de las observaciones de los dos sistemas, pero requiere que las X_{1j} sean independientes de las X_{2j} . Sin embargo, n_1 y n_2 pueden ser diferentes.

Para aplicar el enfoque de dos muestras (t clásico), se debe tener $Var(X_{1j}) = Var(X_{2j})$; si estas varianzas no son iguales, el intervalo de confianza de dos muestras t puede presentar serios problemas de degradación de cobertura (sin embargo, si $n_1 = n_2$, el enfoque de dos muestras t es bastante seguro, incluso si las varianzas difieren). Puesto que, la igualdad de varianzas no es probablemente una suposición segura al simular sistemas reales, por lo que en general, no es recomendable este enfoque de dos muestras t .

En lugar de lo anterior, se dará una solución aproximada pero segura, debida a Welch (1938), para este problema de comparar dos sistemas con varianzas desconocidas, cuando las X_{ij} son normalmente distribuidas. Como es normal, se supone

$$\bar{X}_i(n_i) = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}}{n_i}$$

y

$$S_i^2(n_i) = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} [X_{ij} - \bar{X}_i(n_i)]^2}{n_i - 1}$$

para $i = 1, 2$. Entonces se calculan los grados de libertad estimados

$$\hat{f} = \frac{[S_1^2(n_1)/n_1 + S_2^2(n_2)/n_2]^2}{[S_1^2(n_1)/n_1]^2/(n_1 - 1) + [S_2^2(n_2)/n_2]^2/(n_2 - 1)}$$

y usar

$$\bar{X}_1(n_1) - \bar{X}_2(n_2) \pm t_{\hat{f}, 1-\alpha/2} \sqrt{\frac{S_1^2(n_1)}{n_1} + \frac{S_2^2(n_2)}{n_2}} \quad (4,9)$$

como un intervalo de confianza aproximado de $100(1 - \alpha)$ por ciento para ζ . Puesto que, \hat{f} en general no será entero, la interpolación en las tablas de t impresas será necesaria. El intervalo de confianza dado por la *ecuación 4.9*, que es llamado *intervalo de confianza Welch*, puede también ser usado para validar un modelo de simulación de un sistema existente.

Puesto que, las corridas de simulación para el nivel de saturación del almacén de productos UP se realizaron de forma independiente, también se puede aplicar el enfoque *Welch* para formar un intervalo de confianza aproximado del 90% por ciento para ζ ; para lo cual; se hace uso de los mismos datos de las *Tablas 4.9 y 4.10* con los cuales se calculó el enfoque de *intervalo de confianza de dos muestras t modificado*. Los resultados para el enfoque *Welch* se presentan a continuación

Para los datos de la *Tabla 4.9*, donde las Z_j resultan al realizar las corridas de simulación usando CRN.

$$\bar{X}_1(10) = 1829,5$$

$$\bar{X}_2(10) = 1314,3$$

$$S_1^2(10) = 2215,17$$

$$S_2^2(10) = 11289,79$$

$$\hat{f} = \frac{[2215,17(10)/10 + 11289,79(10)/10]^2}{[2215,17(10)/10]^2/(9) + [11289,79(10)/10]^2/(9)}$$

$$\hat{f} = 12,4$$

Haciendo uso de la *ecuación 4.9*, se obtiene

$$1829,5 - 1314,3 \pm t_{12,4,0,95} \sqrt{\frac{2215,17}{10} + \frac{11289,79}{10}}$$

$$515,2 \pm 1,782(36,75)$$

El intervalo resulta [450, 581]

Para los datos de la *Tabla 4.10*, las Z_j se obtienen al realizar las corridas de simulación sin usar CRN.

$$\bar{X}_1(10) = 1839,2$$

$$\bar{X}_2(10) = 1377,2$$

$$S_1^2(10) = 4655,29$$

$$S_2^2(10) = 24457,96$$

$$\hat{f} = 12,31$$

Haciendo uso de la *ecuación 4.9*, se obtiene

$$1839,2 - 1377,2 \pm t_{12,31,0,95} \sqrt{\frac{4655,29}{10} + \frac{24457,96}{10}}$$

$$462 \pm 1,782(53,96)$$

El intervalo resulta $[366, 558]$, como puede observarse para este caso donde no se usa CRN el intervalo es más grande, lo que indica que existe mayor variabilidad.

4.8. Estimación de varianzas

Puesto que, se desea comparar dos alternativas, se supone $Z_j = X_{1j} - X_{2j}$ (donde X_{ij} es una variable aleatoria definida en la *sección 4.7*) como la diferencia entre X_{1j} y X_{2j} . Las *Tabla 4.9* y *Tabla 4.10* muestran los valores de Z_j .

Tabla 4.9 Diferencia entre X_{1j} y X_{2j} de los datos de las tablas 4.5 y 4.6

Número de réplica	X_{1j}	X_{2j}	Z_j
1	1831	1343	488
2	1857	1403	454
3	1798	1313	485
4	1845	1377	468
5	1790	1250	540
6	1880	1455	425
7	1779	1222	557
8	1873	1438	435
9	1753	1162	591
10	1889	1180	709

De los diez pares de simulaciones para el caso de la configuración 1, se estimó la $Var(Z_j)$ haciendo uso del estimador de varianza insesgado $S^2(n)$, de la *ecuación 4.3*, por lo tanto,

$$Var(Z_j) = \frac{\sum_{j=1}^n [Z_j - \bar{Z}(n)]^2}{n - 1} = 7539,96$$

Haciendo uso del estimador insesgado de $Cov(X_{1j}, X_{2j})$, de la ecuación 4.5, se tiene

$$\hat{Cov}(X_{1j}, X_{2j}) = \frac{\sum_{j=1}^n [X_{1j} - \bar{X}_1(n)][X_{2j} - \bar{X}_2(n)]}{n-1}$$

$$\hat{Cov}(X_{1j}, X_{2j}) = 2982,5$$

Para calcular la varianza de las X_{1j} y X_{2j} , se hace uso de la ecuación 4.3, esto debido a que $S^2(n)$ es un estimador insesgado de $Var(X_{i,j})$ y se obtiene

$$S_1^2(10) = \frac{\sum_{j=1}^{10} [X_1 - \bar{X}_1(n)]^2}{n-1} = 2215,17$$

$$S_2^2(10) = \frac{\sum_{j=1}^{10} [X_2 - \bar{X}_2(n)]^2}{n-1} = 11289,79$$

La varianza de $Var[\bar{Z}(n)]$ es obtenida a partir de la ecuación ecuación 4.1, como se muestra a continuación

$$Var[\bar{Z}(n)] = \frac{Var(X_{1j}) + Var(X_{2j}) - 2Cov(X_{1j}, X_{2j})}{n}$$

$$Var[\bar{Z}(n)] = \frac{(2215,17 + 11289,79) - 2(2982,5)}{10}$$

$$Var[\bar{Z}(n)] = 753,99$$

El resultado anterior puede comprobarse al calcular nuevamente $Var[\bar{Z}(n)]$ a partir, de la siguiente expresión, que de igual manera es tomada de la ecuación 4.1

$$Var[\bar{Z}(n)] = \frac{Var(Z_j)}{n} = \frac{7539,96}{10} = 753,99$$

Como puede observarse, el resultado es el mismo que el anterior. Además, otra forma de calcular $Var[\bar{Z}(n)]$ es haciendo uso del estimador $\hat{Var}[\bar{X}(n)]$, donde en este caso, $\bar{X}(n)$ es sustituido por $\bar{Z}(n)$ que es la diferencia de X_{1j} y X_{2j} que se muestra en la Tabla 4.9, como se observa a continuación

$$\hat{Var}[\bar{X}(n)] = \frac{S^2(n)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n [X_i - \bar{X}(n)]^2}{n(n-1)}$$

reemplazando $\bar{X}(n)$ por $\bar{Z}(n)$, se tiene

$$\hat{Var}[\bar{Z}(n)] = \frac{\sum_{j=1}^n [Z_j - \bar{Z}(n)]^2}{n(n-1)}$$

$$\hat{Var}[\bar{Z}(n)] = \frac{67859,6}{90} = 753,99$$

Haciendo uso de la *ecuación 4.7*, se obtiene la correlación de los datos de la *Tabla 4.9* que pertenecen a la comparación de las configuraciones 1 y 2, sin hacer uso de CRN.

$$\hat{Cor}(X_{1j}, X_{2j}) = \frac{\frac{1}{9}(26842,5)}{(47,07)(106,25)} = 0,5963$$

Otra forma de llegar a este resultado es a partir de la *ecuación 4.6*

$$Cor(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = \frac{2982,5}{\sqrt{(2215,17)(11289,79)}} = 0,5963$$

Como puede observarse en el resultado anterior la correlación es baja.

A continuación, se presentan los resultados obtenidos de las configuraciones 1 y 2, pero haciendo uso de CRN. La *Tabla 4.10* muestra la diferencia entre X_{1j} y X_{2j} de los datos de las tablas 4.7 y 4.8. Después se realizan los cálculos, como los desarrollados anteriormente.

Tabla 4.10 Diferencia entre X_{1j} y X_{2j} de los datos de las tablas 4.7 y 4.8

Número de réplica	X_{1j}	X_{2j}	Z_j
1	1847	1450	397
2	1871	1394	477
3	1835	1366	469
4	1861	1426	435
5	1902	1523	379
6	1917	1556	361
7	1773	1225	548
8	1730	1127	603
9	1745	1163	582
10	1911	1542	369

La varianza de (Z_j) , se obtiene a partir de la ecuación 4.3

$$Var(Z_j) = \frac{\sum_{i=1}^n [Z_j - \bar{Z}(n)]^2}{n-1} = 8071,16$$

Haciendo uso de la ecuación 4.5, se calcula la covarianza estimada

$$\hat{Cov}(X_{1j}, X_{2j}) = 10521$$

$$S_1^2(10) = \frac{\sum_{j=1}^{10} [X_1 - \bar{X}_1(n)]^2}{n-1} = 4655,29$$

$$S_2^2(10) = \frac{\sum_{j=1}^{10} [X_2 - \bar{X}_2(n)]^2}{n-1} = 24457,96$$

$$Var[\bar{Z}(n)] = 807,16$$

Para este caso de estudio de acuerdo a los datos obtenidos la reducción de varianza lograda aplicando CRN es baja, puesto que $Var[\bar{Z}(n)] = 753,99$ en comparación con la lograda corriendo el modelo de forma normal que es de $Var[\bar{Z}(n)] = 807,16$. Lo anterior puede ser debido a que el uso de streams sólo pudo realizarse a las entidades de arriba al sistema, puesto que son las que generan aleatoriedad, los tiempos de servicio para dichas entidades no generan una distribución de probabilidad puesto que los tiempos son constantes.

4.9. Análisis del capítulo

En el presente capítulo se utilizó una técnica de reducción de varianza (Números aleatorios comunes), esta técnica fue elegida de acuerdo a la naturaleza del modelo de simulación estudiado, puesto que, el éxito de las VRTs depende del tipo (las variables aleatorias que pueden ser manipuladas) de modelo y del conocimiento que se tenga del mismo y además es imposible conocer con anticipación si efectivamente podrá reducirse la varianza, y tampoco se conoce que tanto puede ser reducida en comparación con una simulación normal. Para el desarrollo de esta técnica nuevamente se toma de referencia el problema de saturación del almacén de productos UP, y se toman en cuenta los resultados obtenidos en el capítulo III, el objetivo de estudio es conocer si efectivamente las cantidades de $MB = 7$ y $MC1 = 6$ son mejores para evitar la saturación del almacén, respecto a la cantidad actual de montacargas ($MB = 3$ y $MC1 = 3$).

En primer lugar, se utilizaron intervalos de confianza para conocer la diferencia entre respuestas esperadas de dos sistemas. Se desarrolla un intervalo de confianza pareado t para compararlos (sistema 1: $MB = 3$ y $MC1 = 3$; sistema 2: $MB = 7$ y $MC1 = 6$), con el objetivo de conocer si existe una diferencia significativa entre las medias de estos dos sistemas. Los resultados obtenidos mostraron que, con una confianza del 90% aproximado se puede decir que existe diferencia entre las dos medias, además se sabe que la configuración 2 es mejor, puesto que conduce a una cantidad promedio de tarimas más bajo en el almacén.

En segundo lugar, se realiza la estimación de varianzas. Debido a que el éxito de las técnicas de reducción de varianza depende principalmente de la naturaleza del modelo de simulación con el que se esté trabajando, la aplicación de CRN no garantiza que efectivamente se reduzca la varianza, y tampoco que produzca una correlación positiva. Los resultados obtenidos en la reducción de varianza, muestran que fue pequeña, $Var[\bar{Z}(n)] = 753,99$ esto es debido a que el uso de streams sólo pudo realizarse a las entidades de arriba al sistema, ya que son las que generan aleatoriedad. Los tiempos de servicio para dichas entidades no generan una distribución de probabilidad, debido a que son constantes y por lo tanto no se pudo usar streams para estos tiempos.

CONCLUSIONES GENERALES

En el presente trabajo se obtuvieron las siguientes conclusiones: para conocer los factores que inciden en la saturación del almacén principal de productos Up de una planta empacadora de leche:

1. Se usó un diseño de experimentos 2^4 , desarrollado mediante el modelo de simulación, y se encontró que el único factor que tiene impacto en la saturación del almacén es MC1 (montacargas C1). De lo cual, se recomienda aumentar el número de montacargas C1 como medida preventiva para evitar la saturación de dicha área.
2. Se utilizaron modelos de superficie de respuesta para encontrar el punto donde la saturación del almacén de producto terminados UP se hace mínima. El resultado dió como solución la cantidad de MB = 7 y MC1 = 6. La respuesta en decremento de saturación del almacén UP que se predice para estos valores es 933 tarimas. Con estos modelos de superficie de respuesta se logró conocer a qué cantidad debería incrementarse los MC1 para minimizar la saturación del almacén, por lo que, se recomienda incrementar los montacargas C1 a 6 y los montacargas B a 7.

En el estudio de los factores que inciden en el congestionamiento de los andenes se utilizó un diseño de experimentos 2^4 , concluyendo que el factor que tiene mayor importancia en la utilización de los andenes es MC1. Con lo anterior, puede verse que al incrementar los MC1 también se reduce el congestionamiento de los andenes.

Por otro lado, al aplicar técnicas de reducción de varianza e intervalos de confianza, se obtuvo lo siguiente:

1. Se utilizaron intervalos de confianza para conocer la diferencia entre respuestas esperadas de dos sistemas, (sistema 1, se refiere al número de montacargas con el que actualmente trabaja la planta empacadora de leche; sistema 2, es el número de montacargas óptimo encontrado con los modelos de superficie de respuesta.) se concluye que efectivamente existe diferencia entre las medias de

estos dos sistemas, además el sistema 2 es mejor, puesto que conduce a una cantidad promedio de tarimas más bajo en el almacén. Con estos resultados puede confirmarse que la solución encontrada con los modelos de superficie de respuesta es mejor.

2. Los resultados obtenidos en la reducción de varianza, dieron a conocer que ésta fue pequeña. Lo anterior es debido a la naturaleza del modelo, los tiempos de servicio para dichas entidades no generan una distribución de probabilidad, por lo tanto sólo se usaron streams para las entidades de arribo al sistema que son las que generan aleatoriedad.

El presente trabajo, “TÉCNICAS ESTADÍSTICAS (DOE, RSM Y VRT) PARA EL ANÁLISIS DE UN MODELO DE SIMULACIÓN” permitió comprobar que efectivamente el diseño de experimentos y los modelos de superficies de respuesta son herramientas esenciales en el estudio de un modelo de simulación, puesto que permiten planear un conjunto de corridas del modelo para obtener conocimiento del comportamiento del sistema modelado. Además, una de las ventajas de los modelos de diseño de experimentos es que pueden ser aplicados a todos los modelos de simulación, es decir, modelos determinísticos o estocásticos, modelos de eventos discretos o continuos.

Además, es imprescindible la aplicación de técnicas estadísticas apropiadas a los datos de entrada y de salida de simulación para que éstos puedan ser analizados e interpretados correctamente; en este contexto, las técnicas de reducción de varianza son de gran importancia, puesto que son métodos que explotan la capacidad de control de los generadores de números aleatorios que conducen una simulación.

Bibliografía

- [1] Montgomery, D. C. (1991): *Diseño y análisis de experimentos*. Iberoamericana, México.
- [2] Law, A. M. - Kelton, W. D. (2000): *Simulation modeling and analysis*. Third edition, McGraw-Hill, Singapore.
- [3] Box, G. E. P. - Hunter, W. G. - Hunter, J. S. (1999): *Estadística para investigadores*. Reverté, México.
- [4] Kleijnen, J. P. C. (1999): "Validation of models: statistical techniques and data availability" *Proceedings of the 1999 winter simulation conference*, eds. Farrington P. A. - Nembhard, H. B. - Sturrock, D. T. - Evans G. W.
- [5] Kleijnen, J. P. C. (1998): "Experimental design for sensitivity analysis, optimization, and validation of simulation models", *Handbook of simulation*, ed. Banks, J., Wiley, New York.
- [6] Barton, R.R. (2001): "Designing simulation experiments", *Proceedings of the 2001 winter simulation conference*, eds. Peters, B. A - Smith, J. S. - Medeiros, D. J. and Rohrer, M.W.
- [7] Kleijnen, J. P. C. - Sargent, R. G. (1999): "A Methodology for fitting and validation metamodels in simulation". *European journal of operational research*, vol. 120, pp.14-29.
- [8] Sepúlveda, J. A. - Baesler, F. F. - Araya, E. - Ramis, F.J. (2004): "The use of simulation and desing of experiments for productivity improvement in the sawmill industry", *Proceedings of the 2004 winter simulation conference*, eds. Ingalls, R. G. - Rossetti, M. D. - Smith, J.S. - Peters, B.A.

- [9] Box, G. E. P. and Wilson K. B. (1951): "On the experimental attainment of optimum conditions", *Journal of the Royal statistical society*, Ser. B, vol. 13, pp.1-45.
- [10] Hammersley, J. M. - Handscomb, D. C. (1964): *Monte Carlo Methods*. Methuen, London.
- [11] Bratley, P. - Fox, B. L. - Schrage, L. E. (1987): *A guide to simulation*. Second edition, Springer-Verlag, New York.
- [12] Morgan, B. J. T. (1984): *Elements of simulation*. Chapman & Hall, Springer-Verlag, New York.
- [13] Wilson, J. R. (1984): "Variance reduction techniques for digital simulation". *Am. J. Math. Management Sci*, vol. 4.
- [14] Mason, R. L. - Gunst, R. F. - Hess, J. L. (2003): *Statistical design and analysis of experiments*. Second edition, John Wiley and Sons, New Jersey.
- [15] Fisher, R. A. (1925): *Statistical methods for research workers*. First edition, Oliver & Boyd, Edinburgh.
- [16] Scheffé, H. (1957): *The analysis of variance*. John Wiley and Sons, New York.
- [17] Radhakrishna, R. (1965): *Linear statistical inference and its applications*. Second edition, John Wiley and Sons, New York.
- [18] Kuehl, R. O. (2001): *Diseño de experimentos*. Segunda edición, Thomson, México.
- [19] Cochran, W. G. - Cox, G. M. (1950): *Experimental designs*. John Wiley and Sons, New York.
- [20] Guasch, A. - Piera, M. A. - Casanovas, J. - Figueras, J. (2002): *modelado y simulación*. UPC, Barcelona.
- [21] Kleijnen, J. P. C. (1995): "Theory and methodology verification and validation of simulation models", *European Journal of Operational Research*, vol. 82, pp.145-162.
- [22] Pardo, M. A. - Ruiz, D. M. (2002): *SPSS 11 Guía para el análisis de datos*. Mc Graw Hill, México.

- [23] Sall, J. - Lehman, A. - Creighton, L. (2001): *A guide to statistics and data analysis using JMP and JMP IN software*. Thomson, Canada.
- [24] Voelkl, E. K. - Gerber, B. S. (1999): *Using SPSS for Windows*. Springer-Verlang, New York.
- [25] Pérez, L. G. - Medina M. J. “Modelo de simulación para una planta empaedora de leche”. Artículo por publicar.
- [26] Pérez Lechuga, G. - García González, P. (2006): “Análisis de la operación de embarque de una planta empaedora de leche”, *II Encuentro de la Comunidad Sistémica Mexicana*, Pachuca Hgo., 25-27 Septiembre.
- [27] Banks, J. (1998): *Handbook of simulation*. John Wiley and Sons, New York.
- [28] Rubinstein, R. Y. - Melamed, B. (1998): *Modern simulation and modeling*. John Wiley and Sons, New York.
- [29] Winer, B. J., (1962): *Statistical principles in experimental design*. Mc Graw-Hill, USA.