Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
Escuela Superior de Tizayuca

Ingeniería en Tecnologías de Automatización

Teoría de Conjuntos

Dr. Farid García Lamont

Enero-Junio de 2012

Tema: Teoría de Conjuntos

Abstract

These slides introduce the definition of set, subset and their notation. These slides also introduce the basic set operations.

Keywords: Venn's diagrams, set operations, subsets.

Contenido

- Definiciones
- Subconjuntos
- Diagramas de Venn
- Operaciones de conjuntos
- Conjunto potencia
- Referencias

Escuela Superior de Tizayuca

Definición de conjunto

- Un **conjunto** es una colección de objetos.
- Para denotar el contenido de un conjunto, este anota dentro de las llaves $\{\ldots\}$.
- Por ejemplo: La colección de los objetos a, b y c se denota como $\{a, b, c\}$.

Elementos de conjuntos

- A los objetos de un conjunto también se les da el nombre de **elementos**.
- Normalmente a los conjuntos se les asignan nombres.
- $S = \{a, b, c\}$ significa que S es el nombre de la colección de objetos a, b y c.

Elementos de conjuntos

- El símbolo ∈ significa *"esta en*'' o *"es elemento de*''.

- Mientras que ∉ significa lo contrario.

Por ejemplo:

- $a \in S$ se lee como "a es un elemento de S".
- $d \notin S$ se lee como "d no es un elemento de S"

Conjuntos y sus elementos

- Los conjuntos tienen solamente elementos distintos.
  - Por ejemplo: $\{a, a, b, c\}$ es una representación redundante del conjunto $\{a, b, c\}$.
- Los elementos de los conjuntos no tienen un orden definido o establecido.
  - Por ejemplo: $\{a, b, c\}$ y $\{b, a, c\}$ representan la misma colección de elementos.

Notación

- Un conjunto se puede denotar enlistando sus elementos.

- Comúnmente se denotan en función de una propiedad que tengan en común los elementos.

- Sea $S = \{2,4,6,8,10\}$ se puede escribir como:

$$S = \{x|x \text{ es un entero positivo no mayor a } 10\}$$

Ejemplos

- Pueden existir conjuntos que son elementos de algún otro conjunto. Por ejemplo:

- $\{\{a, b, c\}, d\}$ contiene 2 elementos:
  - $\{a, b, c\}$ y d

- $\{\{a, b\}, \{e, f\}, a, f\}$ contiene 4 elementos:
  - $\{a, b\}$, $\{e, f\}$, a y f

Ejemplos

- El conjunto de números naturales:

$$\mathbb{N} = \{1,2,\ldots\}$$

- El conjunto de números enteros:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$$

- El conjunto de números racionales:

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q}\middle| p,q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\right\};\ \frac{1}{2},\frac{8}{7},-1 \in \mathbb{Q}$$

Ejemplos

- Conjunto de números irracionales:

$$\mathbb{I} = \{e, \pi, \sqrt{2}, \dots\}$$

- Conjunto de números reales:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

- Conjunto de números complejos:

$$\mathbb{C} = \{a + bi | a, b \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}\}$$

Conjunto vacío

- $S = \{a, \{a\}, \{\{a\}\}\}$ contiene 3 elementos:
  - a, $\{a\}$ y $\{\{a\}\}$.

- De esta manera:
  - $a \in S$, $\{a\} \in S$ y $\{\{a\}\} \in S$

- El **conjunto vacío** es el conjunto que **no contiene elementos**. Este se denota como:
  - $\emptyset = \{\quad\}$.

Ejemplos

- De esta forma el conjunto $\{\{\ \ \}\} = \{\emptyset\}$.
  - Esto es, el conjunto que tiene un elemento que es el conjunto vacío.

- El conjunto $\left\{\{\ \ \},\{\{\ \ \}\}\right\} = \{\emptyset,\{\emptyset\}\}$ tiene dos elementos:
  - El conjunto vacío y un conjunto que contiene el conjunto vacío.

Subconjuntos

- Un conjunto P es un subconjunto de Q si cada elemento de P es también un elemento de Q.

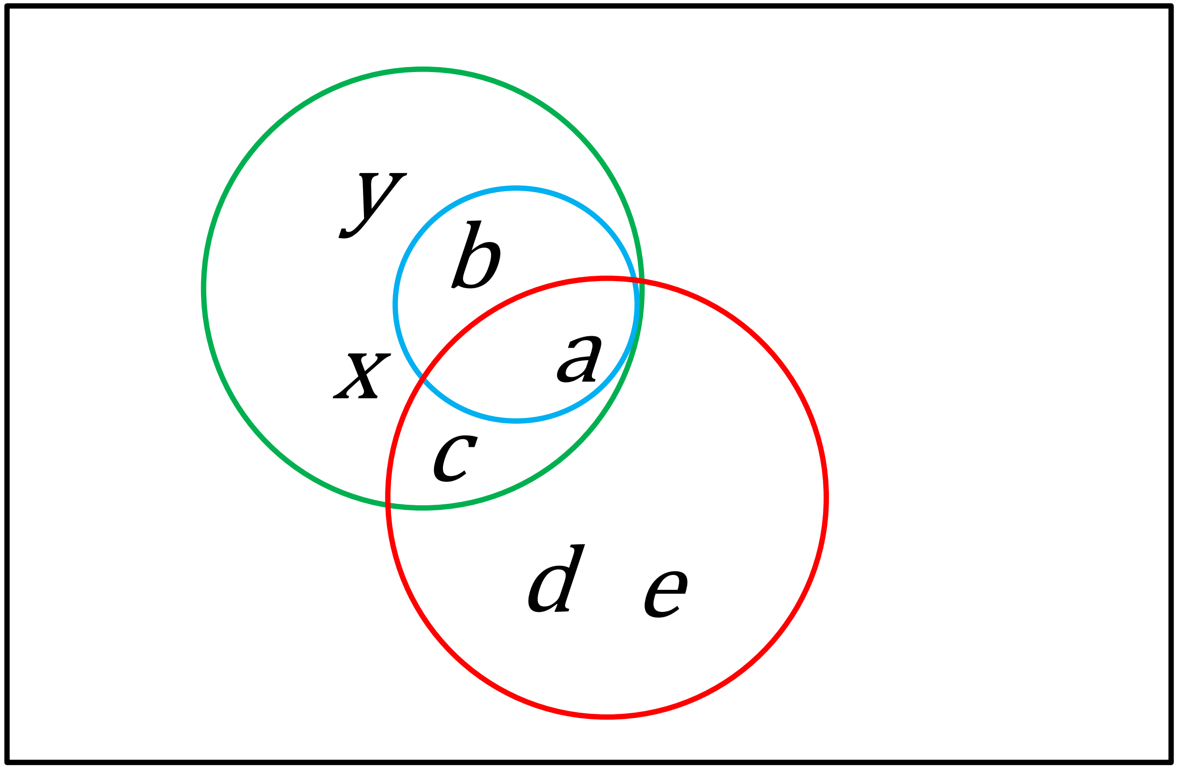
- El símbolo $\subset$ significa ″subconjunto de’’. Mientras que $\not\subset$ significa lo contrario.
  - $P \subset Q$ se lee como ″P es un subconjunto de Q’’.
  - $P \not\subset Q$ se lee como ″P es no es subconjunto de Q’’.

Diagramas de Venn

- Mostrar gráficamente la agrupación de los elementos en conjuntos.
- Los conjuntos se muestran como círculos u óvalos.
- El universo de conjuntos y elementos se representa como un rectángulo.

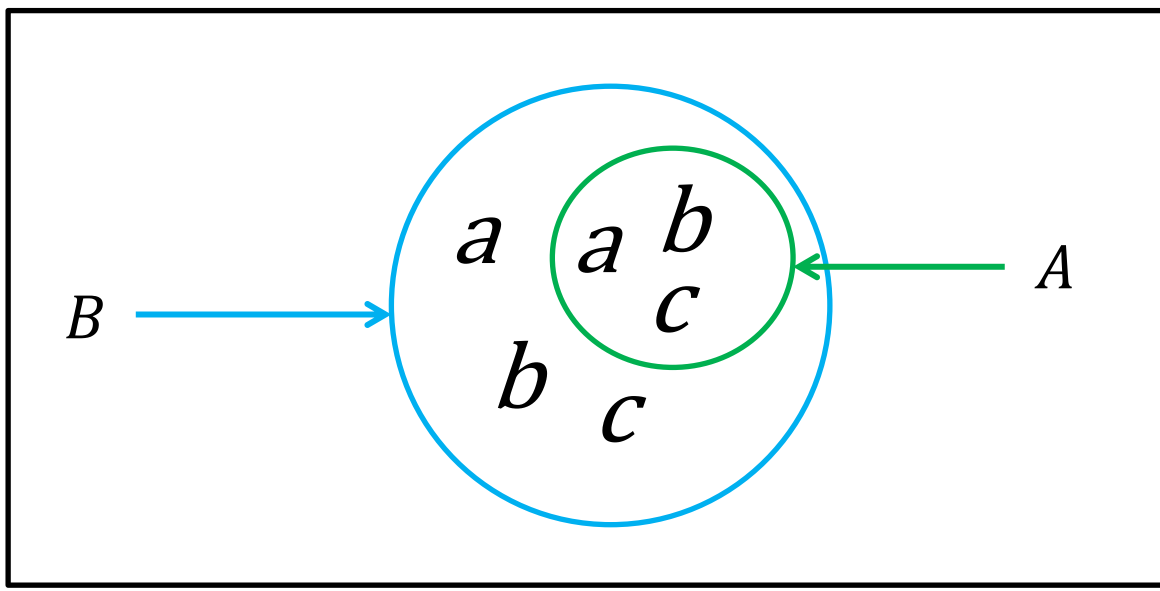
Ejemplos

- $\{a, b\} \subset \{y, x, b, c, a\}$ pero $\{a, b\} \not\subset \{a, c, d, e\}$



Ejemplos

- Sea $A=\{a,b,c\}$ y $B=\{\underbrace{a,b,c},\underbrace{\{a,b,c\}}\}$, se puede ver que se cumple que:
  - $A\in B$
  - $A\subset B$



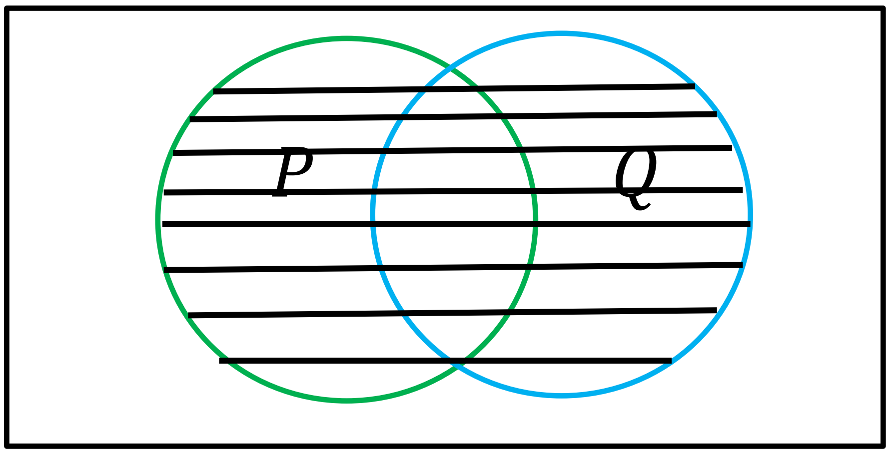
Definiciones

- Para todo conjunto A, el conjunto vacío es subconjunto de A:
  - $\emptyset \subset A$.

- Pero no siempre el conjunto vacío es un elementos de cualquier conjunto, es decir:
  - No siempre se cumple que $\emptyset \in A$.

Unión de conjuntos

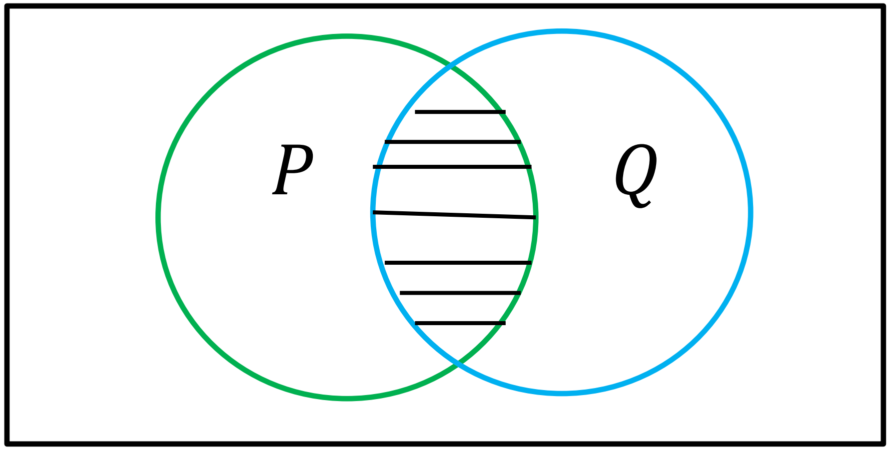
- La unión de dos conjuntos, denotado como $P \cup Q$, da un conjunto cuyos elementos están en P o Q, o en ambos.



$P \cup Q$

Intersección de conjuntos

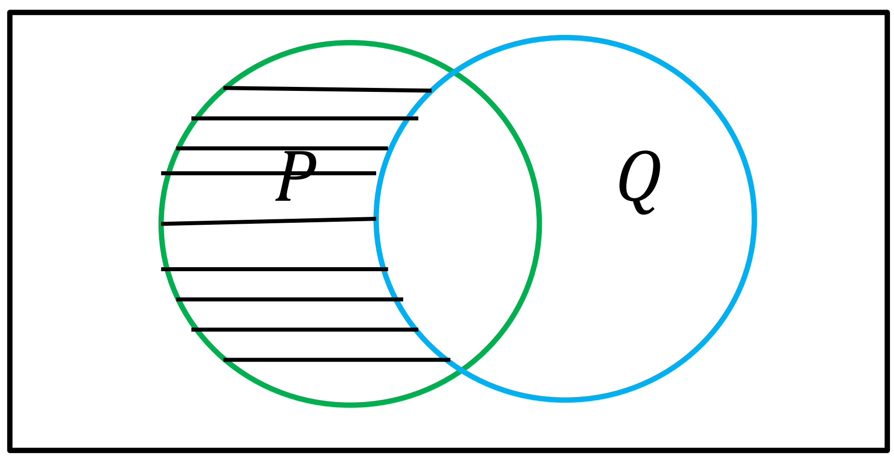
- La intersección de dos conjuntos, denotado como $P \cap Q$, da un conjunto cuyos elementos están en P y Q.



$P \cap Q$

Diferencia de conjuntos

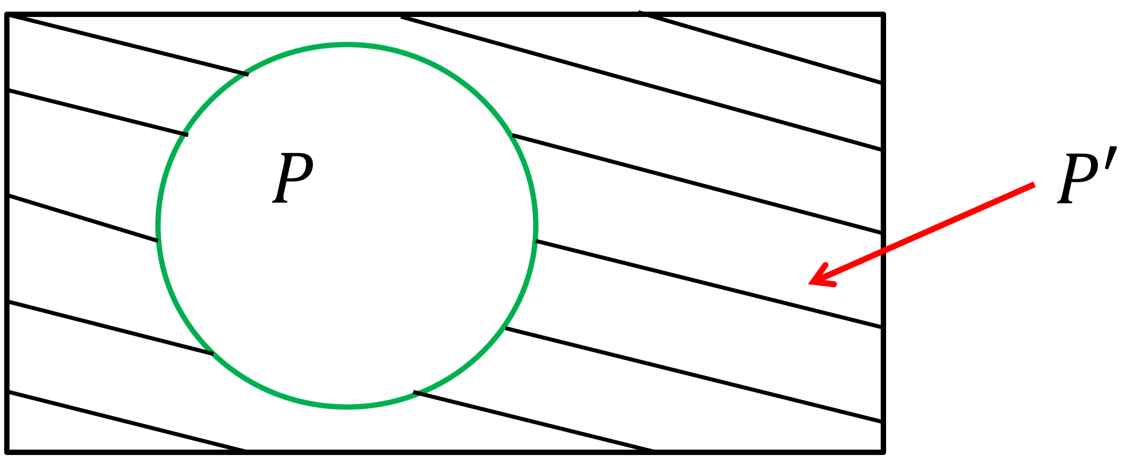
- La diferencia de dos conjuntos, denotado como $P - Q$, da un conjunto cuyos elementos están en P y que no están en Q.



$P - Q$

Conjunto complemento

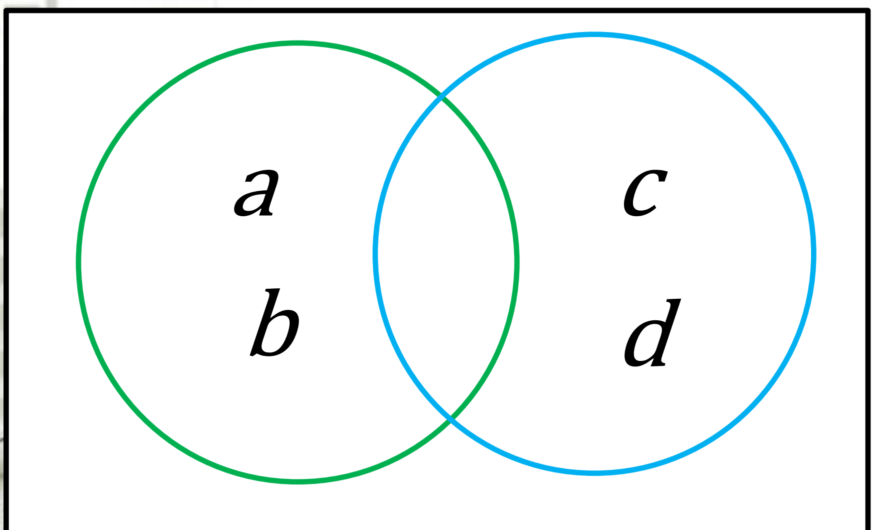
- Es un conjunto que no contiene todos los elementos que no están en el conjunto original.

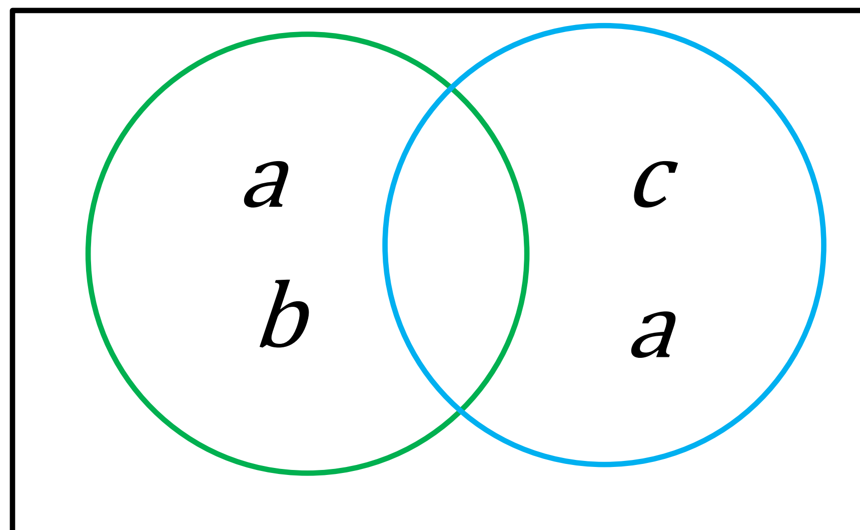


$$P' = S - P$$

Ejemplos de operación de conjuntos

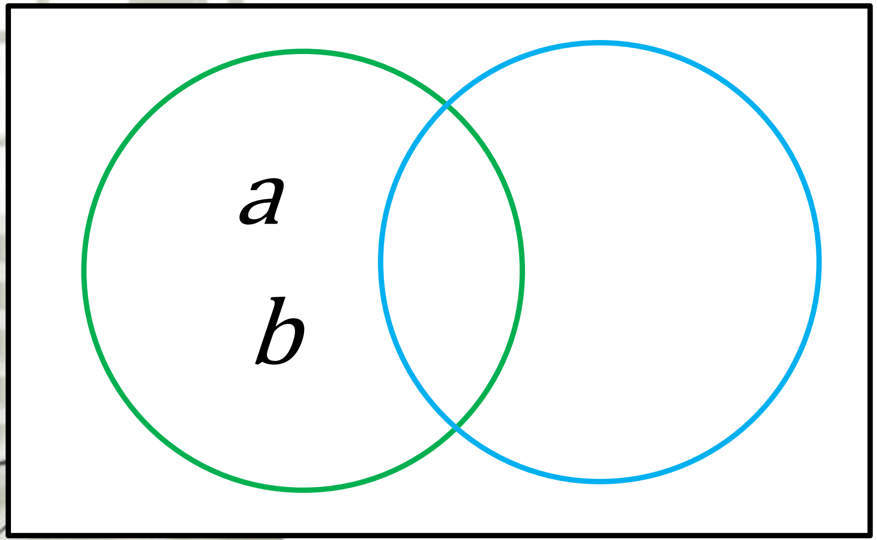
- $\{a, b\} \cup \{c, d\} = \{a, b, c, d\}$
- $\{a, b\} \cup \{a, c\} = \{a, b, c\}$

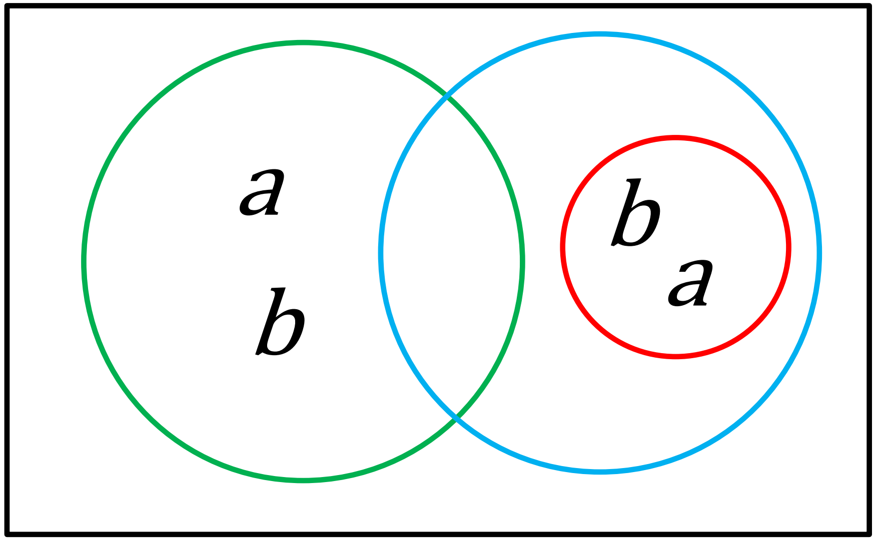




Ejemplos de operación de conjuntos

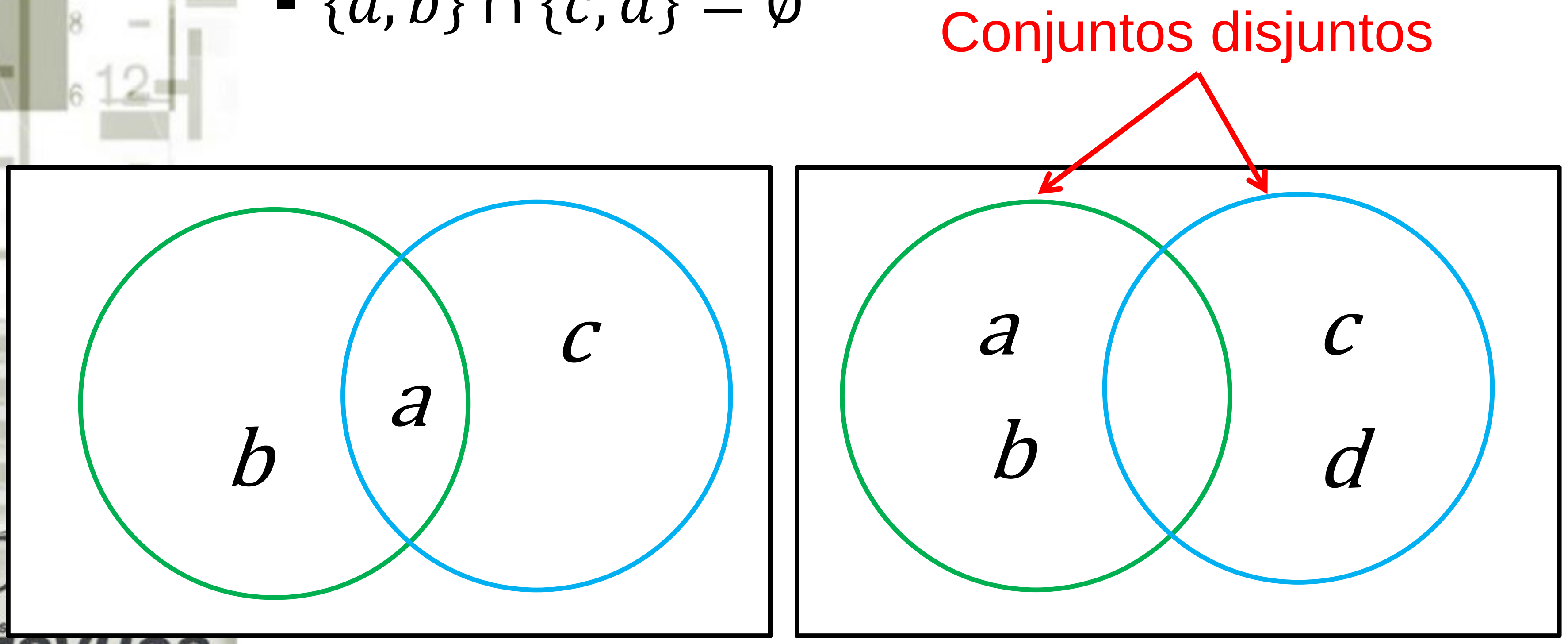
- $\{a,b\} \cup \emptyset = \{a,b\}$
- $\{a,b\} \cup \{\{a,b\}\} = \{a,b,\{a,b\}\}$





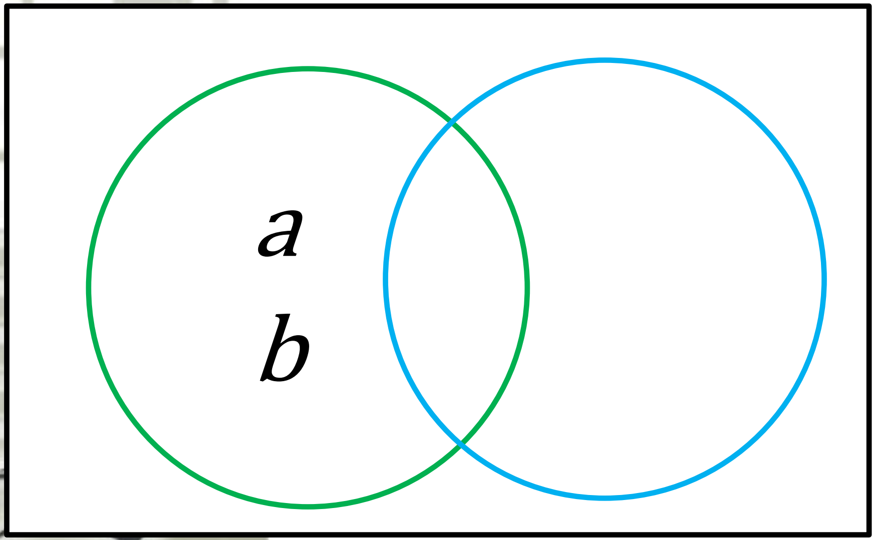
Ejemplos de operación de conjuntos

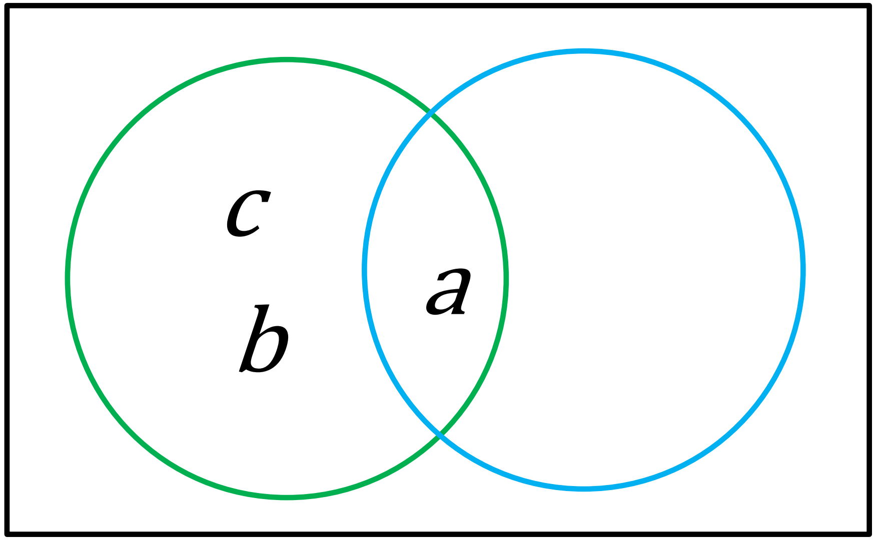
- $\{a, b\} \cap \{a, c\} = \{a\}$
- $\{a, b\} \cap \{c, d\} = \emptyset$



Ejemplos de operación de conjuntos

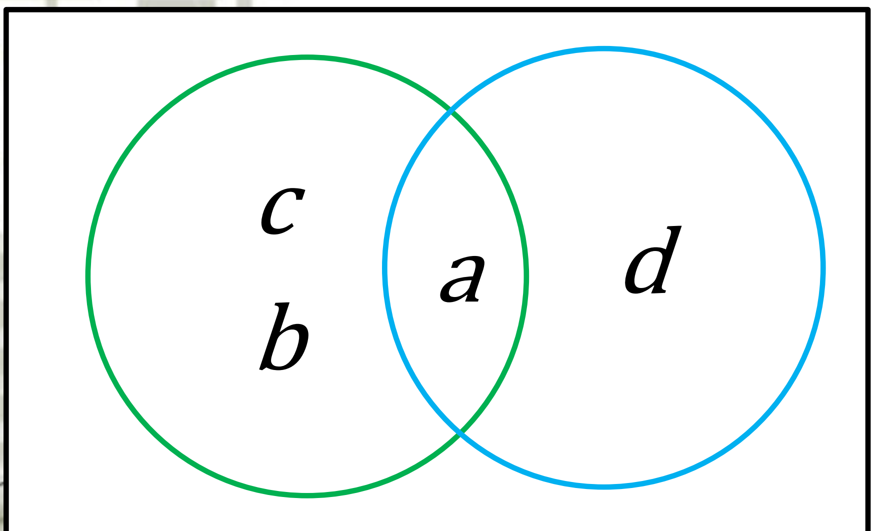
- $\{a, b\} \cap \emptyset = \emptyset$
- $\{a, b, c\} - \{a\} = \{b, c\}$

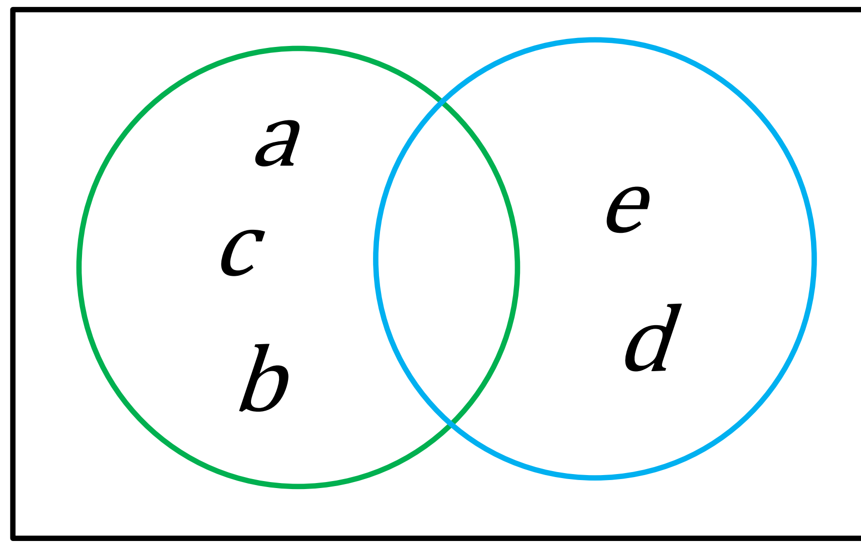




Ejemplos de operación de conjuntos

- $\{a, b, c\} - \{a, d\} = \{b, c\}$
- $\{a, b, c\} - \{d, e\} = \{a, b, c\}$





Ejemplos de subconjuntos

- El conjunto de naturales es subconjunto del conjunto de enteros:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$$

- El conjunto de enteros es subconjunto del conjunto de racionales:

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

- El conjunto de racionales e irracionales son subconjuntos de los reales:

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \text{ y } \mathbb{I} \subset \mathbb{R}$$

Ejemplos de subconjuntos

- El conjunto de reales es subconjunto de los complejos:

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

- De esta manera, se puede ver que:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Conjunto potencia

- El conjunto potencia de A, denotado como $\mathcal{P}(A)$, es el conjunto que contiene todos los subconjuntos de A.

- Por ejemplo, sea $A = \{a, b\}$, el conjunto potencia es:

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

Conjunto potencia

- Nótese que para cualquier conjunto A se cumple que:
  - $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$,
  - $\emptyset \subset \mathcal{P}(A)$.

- La cantidad de elementos que tiene un conjunto potencia es:

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^n.$$

Donde A tiene n elementos.

Ejemplos

- $A = \{\{a, b, c\}, d\}$, $n = 2$

  $$\mathcal{P}(A) = \{\{\{a, b, c\}\}, \{d\}, \{\{a, b, c\}, d\}, \emptyset\}$$

  - $|\mathcal{P}(A)| = 2^2 = 4$

- $A = \{a, \{a\}\}$, $n = 2$

  $$\mathcal{P}(A) = \{\{a\}, \{\{a\}\}, \{a, \{a\}\}, \emptyset\}$$

Escuela Superior de Tizayuca

Ejemplos

- Sea $A = \{a, \emptyset\}$, ¿Cómo será $\mathcal{P}\big(\mathcal{P}(A)\big)$?

- $|\mathcal{P}(A)| = 2^2 = 4$

$$\mathcal{P}(A) = \big\{\{a\}, \{\emptyset\}, \{a, \emptyset\}, \emptyset\big\}$$

- $\big|\mathcal{P}\big(\mathcal{P}(A)\big)\big| = 2^4 = 16$

Producto Cartesiano

- El producto cartesiano se denota como:

$$A \times B = \{(a, b) | \forall a \in A, b \in B\}$$

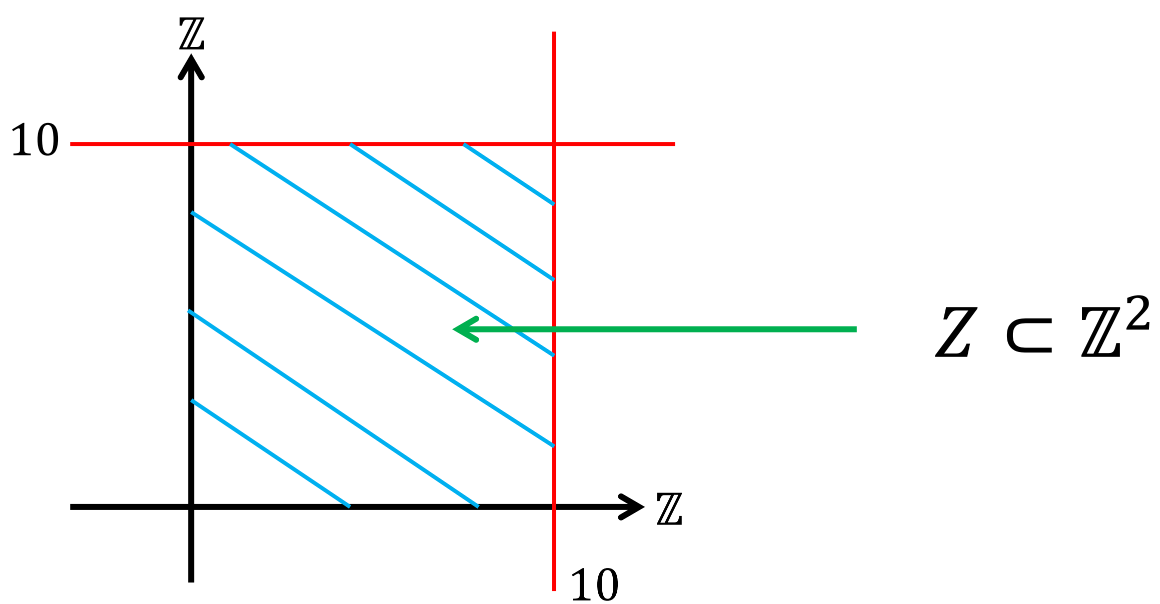
- Por ejemplo, sean $A = \{1,2\}$ y $B = \{3,4\}$:

$$A \times B = \{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4)\}$$
$$B \times A = \{(3,1), (3,2), (4,1), (4,2)\}$$

Ejemplos

- El conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{(z_1, z_2) | z_1, z_2 \in \mathbb{Z}\}$ se puede abreviar como $\mathbb{Z}^2$.

- Sea $Z = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{Z}^2 | 0 \leq z_1, z_2 \leq 10\}$



Ejemplos

- Sean $A = \{a, \emptyset\}$, $B = \{b, \emptyset\}$ y $C = \{c, \emptyset\}$:

$$A \times B \times C = \begin{Bmatrix} (a, b, c), (a, b, \emptyset), \\ (a, \emptyset, c), (a, \emptyset, \emptyset), \\ (\emptyset, b, c), (\emptyset, b, \emptyset), \\ (\emptyset, \emptyset, c), (\emptyset, \emptyset, \emptyset) \end{Bmatrix}$$

- ¿Cómo serán $B \times A \times C$ y $C \times B \times A$?

Escuela Superior de Tizayuca

Ejercicio

- Sean $A = \{a, x\}$, $B = \{b, y\}$, $C = \{c, z\}$ y $D = \{d, \emptyset\}$.

- Determinar:
  - $A \times B \times C \times D$
  - $C \times A \times D \times B$

Escuela Superior de Tizayuca

Leyes de Morgan

- Sean A y B dos conjuntos cualesquiera:
  - $(A \cup B)' = A' \cap B'$
  - $(A \cap B)' = A' \cup B'$
- Distributividad:
  - $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
  - $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

Conjunto finito e infinito

- **Conjunto finito**: aquel cuya cantidad de elementos esta definido por un numero natural.

- **Conjunto infinito**: aquel cuya cantidad de elementos no esta definido por algún numero natural.

Ejemplos

- Conjuntos finitos:
  - Resultados posibles de lanzar un dado, $S = \{1,2,3,4,5,6\}$.
  - Resultados posibles de lanzar una moneda, $S = \{sol, aguila\}$.

- Conjuntos infinitos:
  - Números naturales, $\mathbb{N} = \{1,2,\ldots\}$.
  - Números enteros, $\mathbb{Z} = \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$.

Conjunto numerable y no numerable

- **Conjunto numerable (contable)**: sus elementos pueden ponerse 1 a 1 con el conjunto de números naturales.

- **Conjunto no numerable (no contable)**: aquel que tiene demasiados elementos para contarlos.

Ejemplos

- Conjunto numerable:
  - Resultados posibles de lanzar un dado $S = \{1,2,3,4,5,6\}$.
  - Números enteros $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.

- Conjunto no numerable:
  - Números reales $\mathbb{R}$.
  - Números racionales $\mathbb{Q}$.

Cardinalidad de conjuntos

- Es el numero de elementos de un conjunto.
- La notación empleada para denotar la cardinalidad de un conjunto P es:
  - $|P|$, $n(A)$, $\mathrm{card}(A)$, o $\#A$.
- La notación mas común de encontrar es $|P|$.

Cardinalidad de conjuntos importantes

- Sean dos conjuntos A y B:
  - $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
  - $|A \times B| = |A| \cdot |B|$
  - $|\emptyset| = 0$
  - $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$
  - $|A - B| = |A| - |A \cap B|$
  - $|A'| = |S| - |A|$

Ejemplos

- Supóngase que se tienen 6 PC's con las siguientes especificaciones:

Numero de PC	RAM 2Gb	Disco externo	Ratón inalámbrico
1	si	si	no
2	si	si	si
3	no	no	no
4	no	si	si
5	no	si	no
6	no	si	si

Ejemplos

- Sean A_1, A_2 y A_3 los conjuntos de computadoras con RAM de 2Gb, con disco externo y con ratón inalámbrico, respectivamente.
  - $|A_1| = 2$, $|A_2| = 5$, $|A_3| = 3$
  - $|A_1 \cap A_2| = 2$, $|A_1 \cap A_3| = 1$, $|A_2 \cap A_3| = 3$
  - $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| =$

Referencias

- Liu, C.L.: Elements of Discrete Mathematics. McGraw-Hill, 1985.
- Herstein, I.N.: Algebra Abstracta. Grupo Editorial Iberoamericana, 1998.