Método de cuadratura Gaussiana

Integración numérica

Deducción

- Se integrará una función con solo evaluarla en 2 puntos.

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt = C_1 \cdot f(t_1) + C_2 \cdot f(t_2)$$

- Solo falta determinar t_1, t_2, C_1 y C_2, se proponen las siguientes funciones

$$f(t)=1 \qquad f(t)=t \qquad f(t)=t^2 \qquad f(t)=t^3$$

Determinación de las incógnitas

- Se integran las funciones anteriores.

$$\int_{-1}^{1} dt = t\Big|_{-1}^{1} = 1-(-1) = 2 \qquad 2 = C_1 + C_2$$

$$\int_{-1}^{1} t\,dt = \frac{t^2}{2}\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{1^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2} = 0 \qquad 0 = C_1 t_1 + C_2 t_2$$

$$\int_{-1}^{1} t^2 dt = \frac{t^3}{3}\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{1^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{2}{3} \qquad \frac{2}{3} = C_1 t_1{}^2 + C_2 t_2{}^2$$

$$\int_{-1}^{1} t^3 dt = \frac{t^4}{4}\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{1^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4} = 0 \qquad 0 = C_1 t_1{}^3 + C_2 t_2{}^3$$

- Resolviendo las cuatro ecuaciones para las cuatro incógnitas tenemos

$$t_1 = -\sqrt{\frac{1}{3}} = -0.5773$$

$$t_2 = \sqrt{\frac{1}{3}} = 0.5773$$

$$C_1 = 1$$

$$C_2 = 1$$

Formula cuadratura gaussiana (2 términos)

- Finalmente tenemos.

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt = f(0.5773) + f(-0.5773)$$

que es exacto para funciones de hasta tercer orden, solo de -1 a 1

Formula cuadratura gaussiana (2 términos)

- Para cualquier intervalo

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\left[f(x_1) + f(x_2)\right]$$

- donde

$$x_i = \frac{(b-a)t_i + a + b}{2}$$

Formula cuadratura gaussiana (mas términos)

- Para mayor exactitud es necesario introducir mas terminos

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\left[C_1 f(x_1) + \cdots + C_n f(x_n)\right]$$

Valores para cuadratura gaussiana

Número de términos	valores de t	Coeficientes	válido hasta
2	-0.57735027	1	3er grado
	0.57735027	1	
3	-0.77459667	0.5555555	5º grado
	0	0.8888888	
	0.77459667	0.5555555	
4	-0.86113631	0.34785485	7º grado
	-0.33998104	0.65214515	
	0.33998104	0.65214515	
	0.86113631	0.34785485	
5	-0.90617975	0.23692689	9º grado
	-0.53846931	0.47862867	
	0	0.5688889	
	0.53846931	0.47862867	
	0.90617975	0.23692689	