Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
Escuela Superior de Tizayuca
Tópicos Selectos de Robótica II
Dr. Farid García Lamont

Velocidades en robots manipuladores

Contenido

- Velocidades
- Esquema del robot
- Ejes de referencia
- Transformaciones homogéneas
- Estimación del Jacobiano

Calculo de velocidades

$$V_p = J_p(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}$$

V_p Vector de velocidad de un punto p (puede ser el efector final o una junta en especifico).

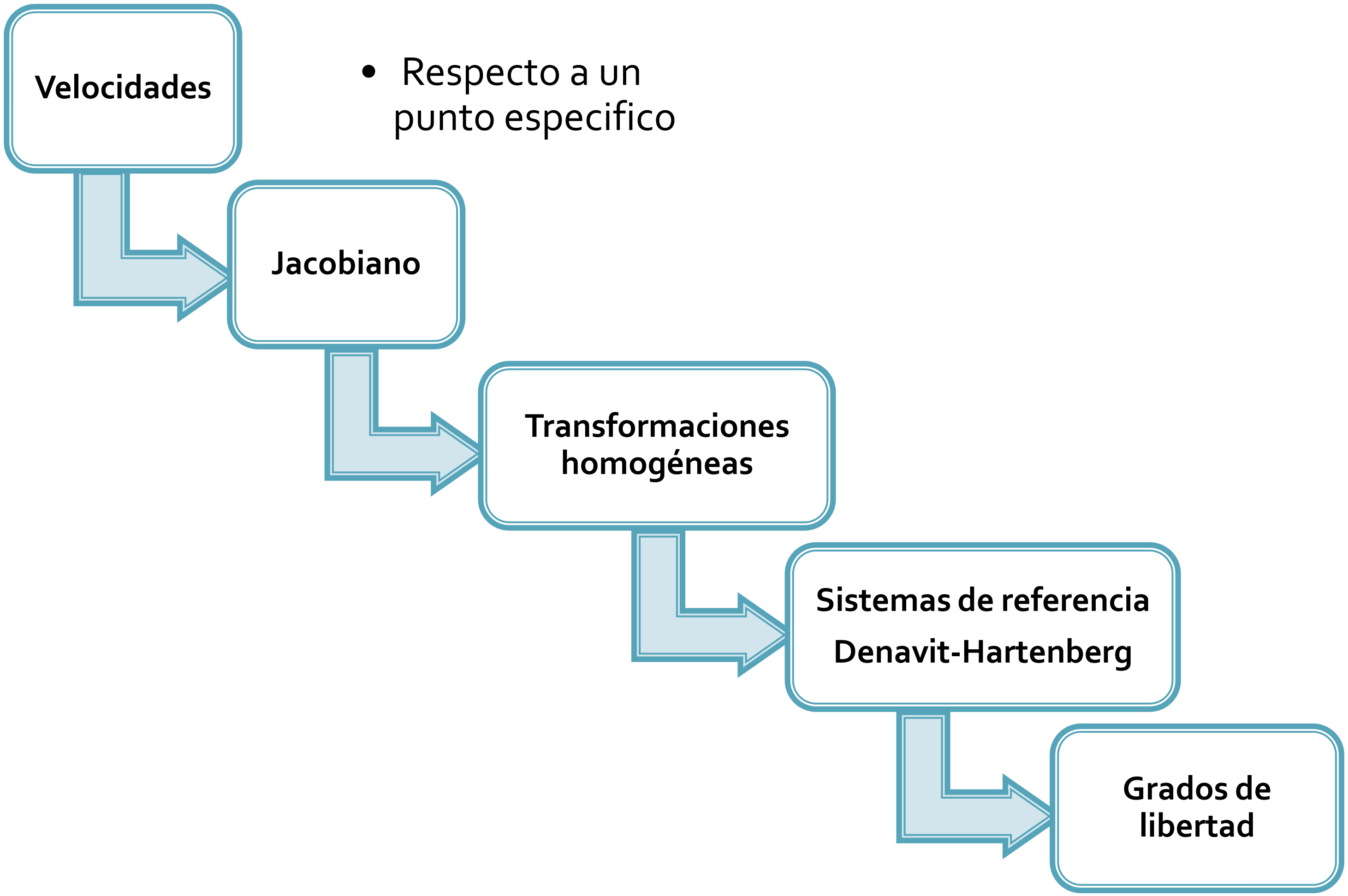
$\boldsymbol{q}$ Vector de coordenadas de los grados de libertad.

$\dot{\boldsymbol{q}}$ Vector de derivadas, respecto del tiempo, de las coordenadas de los grados de libertad.

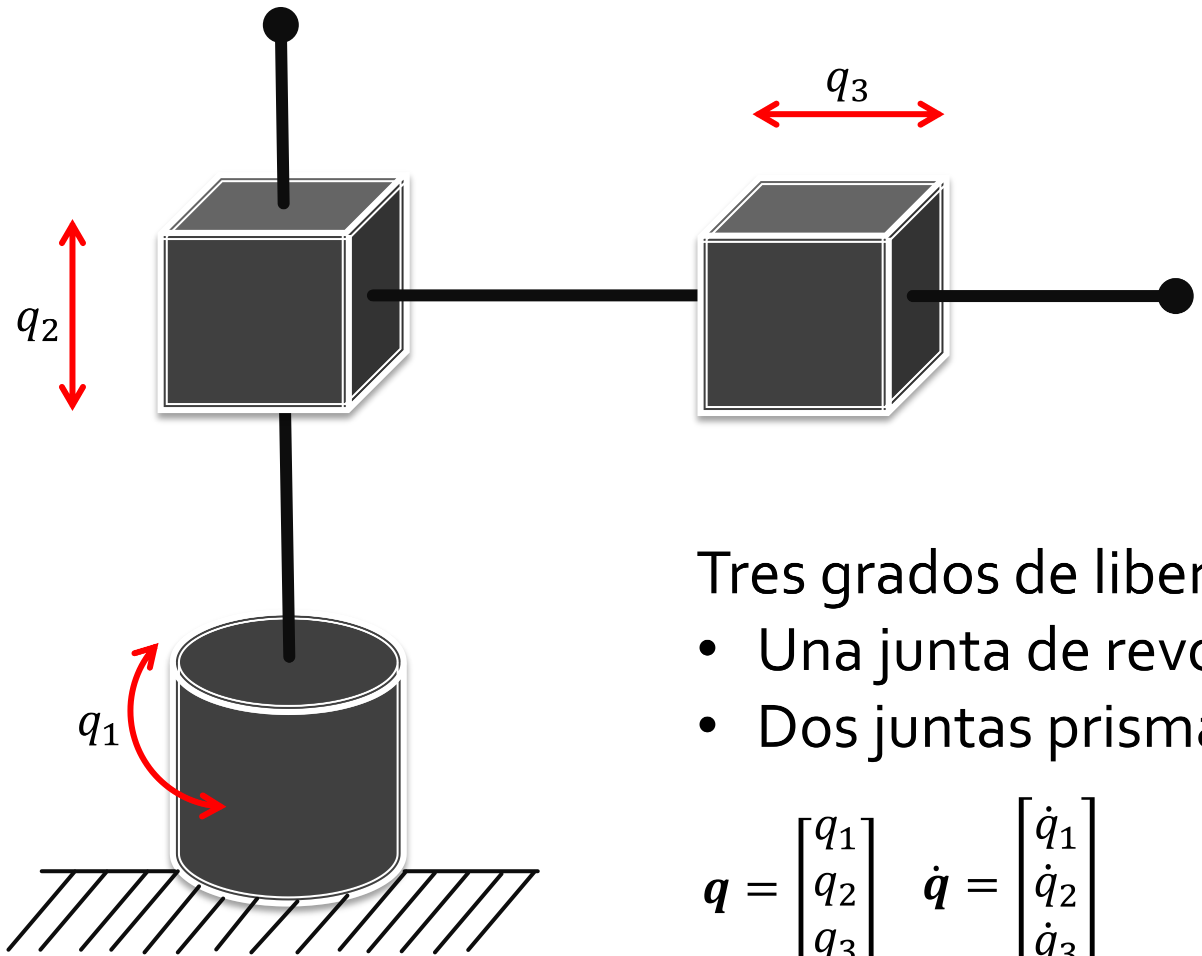
J_p Matriz Jacobiana del robot para el punto p.

Calculo de velocidades

- Respecto a un punto especifico



Ejemplo: Robot cilíndrico (esquema)

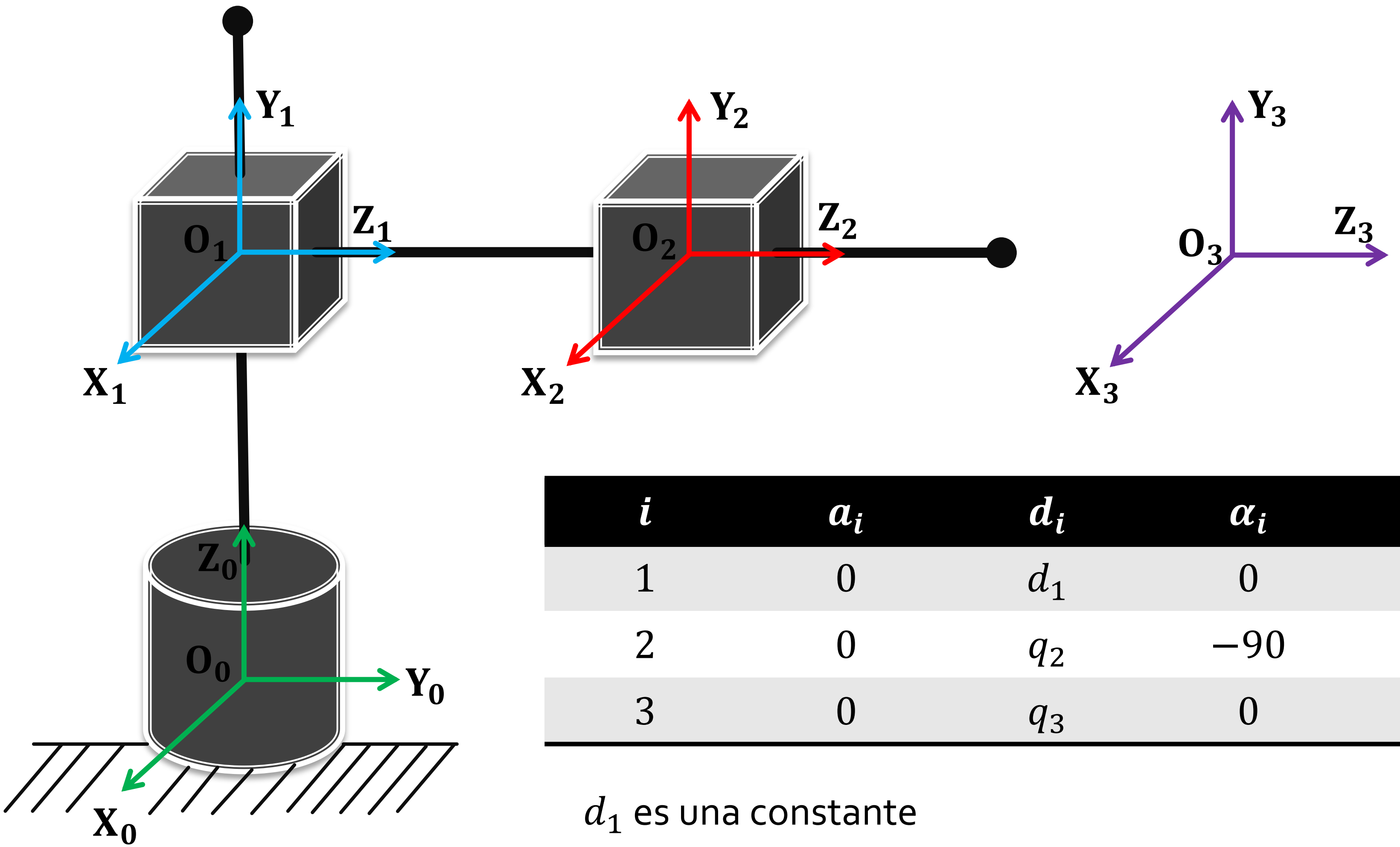


Tres grados de libertad:

- Una junta de revolución
- Dos juntas prismáticas

$$\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad \dot{\boldsymbol{q}} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix}$$

Asignación de referenciales



i	a_i	d_i	α_i	θ_i
1	0	d_1	0	q_1
2	0	q_2	-90	0
3	0	q_3	0	0

d_1 es una constante

Convención Denavit-Hartenberg

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i\cos\alpha_i & \sin\theta_i\cos\alpha_i & a_i\cos\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i\cos\alpha_i & -\cos\theta_i\sin\alpha_i & a_i\sin\theta_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

i	a_i	d_i	α_i	θ_i
1	0	d_1	0	q_1
2	0	q_2	-90	0
3	0	q_3	0	0

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} \cos q_1 & -\sin q_1 & 0 & 0 \\ \sin q_1 & \cos q_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformaciones homogéneas

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} \cos q_1 & -\sin q_1 & 0 & 0 \\ \sin q_1 & \cos q_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \cos q_1 & 0 & -\sin q_1 & 0 \\ \sin q_1 & 0 & \cos q_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & q_2 + d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} \cos q_1 & 0 & -\sin q_1 & -q_3 \sin q_1 \\ \sin q_1 & 0 & \cos q_1 & q_3 \cos q_1 \\ 0 & -1 & 0 & q_2 + d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Donde:

$$T_0^1 = \mathbf{A}_1$$

$$T_0^2 = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$$

$$T_0^3 = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3$$

Construcción del Jacobiano

$J = [J_1, \dots, J_n]$ Donde n es la cantidad de juntas y $\vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$J_i = \begin{bmatrix} Z_{i-1} \\ \vec{0} \end{bmatrix}$ si la junta es prismática.

$J_i = \begin{bmatrix} Z_{i-1} \times (O_n - O_{i-1}) \\ Z_{i-1} \end{bmatrix}$ si la junta es rotacional.

Dado $T_0^i = \prod_{k=1}^{n} \mathbf{A}_i$, entonces:

$$T_0^i = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \phantom{r_{11}} & \phantom{r_{12}} & Z_{i-1} & O_i \end{array} \\ \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & dx \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & dy \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Jacobiano

$$J = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} Z_0 \times (O_3 - O_0) \\ Z_0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} Z_1 & Z_2 \\ \vec{0} & \vec{0} \end{matrix}} \end{bmatrix}$$

Una junta rotacional

Dos juntas prismáticas

$$T_0^1 = \begin{bmatrix} \cos q_1 & -\sin q_1 & 0 & 0 \\ \sin q_1 & \cos q_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_0^2 = \begin{bmatrix} \cos q_1 & 0 & -\sin q_1 & 0 \\ \sin q_1 & 0 & \cos q_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & q_2 + d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_0^3 = \begin{bmatrix} \cos q_1 & 0 & -\sin q_1 & -q_3 \sin q_1 \\ \sin q_1 & 0 & \cos q_1 & q_3 \cos q_1 \\ 0 & -1 & 0 & q_2 + d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Z_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad Z_1 = \begin{bmatrix} -\sin q_1 \\ \cos q_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Z_2 = \begin{bmatrix} -\sin q_1 \\ \cos q_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad O_3 = \begin{bmatrix} -q_3 \sin q_1 \\ q_3 \cos q_1 \\ q_2 + d_1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad O_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jacobiano

$$J = \begin{bmatrix} (q_2 + d_1)\cos q_1 & -\sin q_1 & -\sin q_1 \\ (q_2 + d_1)\sin q_1 & \cos q_1 & \cos q_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad J = \begin{bmatrix} J_v \\ J_\omega \end{bmatrix}$$

Movimientos lineales

Movimientos rotacionales

$$J_v = \begin{bmatrix} (q_2 + d_1)\cos q_1 & -\sin q_1 & -\sin q_1 \\ (q_2 + d_1)\sin q_1 & \cos q_1 & \cos q_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad J_\omega = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Velocidades

$$V_p = \begin{bmatrix} (q_2 + d_1)\cos q_1 & -\sin q_1 & -\sin q_1 \\ (q_2 + d_1)\sin q_1 & \cos q_1 & \cos q_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix}$$

Velocidades respecto a la base.

Referencias

- Spong, M., Vidyasagar, M.: *Robot Dynamics and Control*. John Wiley Ed., 1989.

- Lewis, F.L., Abdallah, C.T., Pawson, D.M.: *Control of Robot Manipulators*. MacMillan Ed., 1993.