UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO

ESCUELA PREPARATORIA DE IXTLAHUACO

Tema:2.3. Integral por partes.

L.S.C. Lucia Hernández Granados

Julio – Diciembre 2017

Tema: Integración por partes

Resumen

Cuando el integrando está formado por un producto (o una división, que podemos tratar como un producto) se recomienda utilizar el método de integración por partes que consiste en aplicar la siguiente fórmula:

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$$

Palabras clave: derivadas, producto, integración, expresión algebraica, formulas.

Tema: integración por partes

Abstrac

When the integrand is formed by a product (or a division, which we can treat as a product) it is recommended to use the part integration method that consists of applying the following formula:

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$$

Key words: derivatives, product, integration, algebraic expression, formulas.

2.3. INTEGRAL POR PARTES.

Método:

- ❖ El integrando debe ser un producto de dos factores.
- ❖ Uno de los factores será *u* y el otro será *dv*.
- ❖ Se calcula *du* derivando *u* y se calcula *dv* integrando *v*.
- ❖ Se aplica la fórmula.

Objetivo General:

Resolver integrales distinguiendo la estrategia adecuada y calculará la constante de integración a partir de condiciones iniciales argumentando con diversos métodos.

INTRODUCCIÓN

En este capítulo veremos las técnicas más comunes para calcular integrales por partes indefinidas. Para esto comenzaremos presentando brevemente el concepto de diferencial de una función.

El método que presentamos en esta sección está basado en la regla para derivar un producto de funciones .

Como sabemos, si $u = f(x)$ & $v = g(x)$ son funciones derivables, entonces por la regla de la Derivada de un Producto

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x).$$

Luego, al integrar se obtiene:

$$\int [f(x)g(x)]' \,\mathrm{d}x = \int \left[f(x)g'(x) + g(x)f'(x)\right] \mathrm{d}x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)g(x) = \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)f'(x)\,\mathrm{d}x;$$

de donde resulta:

$$\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2.1}$$

A esta igualdad se le denomina fórmula de integración por partes y es esencial para calcular familias importantes de integrales.

Veamos una presentación más compacta de esta fórmula.

Dado que $u = f(x)$ & $v = g(x)$, entonces $\mathrm{d}u = f'(x)\,\mathrm{d}x$ & $\mathrm{d}v = g'(x)\,\mathrm{d}x$; luego, la igualdad

$$\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,\mathrm{d}x$$

2.3. INTEGRAL POR PARTES.

Escoger adecuadamente *u* y *dv*:

Paso 1

- ✓ Una mala elección puede complicar más el integrando.
- ✓ Supongamos que tenemos un producto en el que uno de sus factores es un monomio (por ejemplo x^3). Si consideramos $dv = x^3$. Entonces, integrando tendremos que $v = x^4/4$, con lo que hemos aumentado el grado del exponente y esto suele suponer un paso atrás.
- ✓ Normalmente, se escogen los monomios como *u* para reducir su exponente al derivarlos. Cuando el exponente es 0, el monomio es igual a 1 y el integrando es más fácil.
- ✓ Algo parecido ocurre con las fracciones (como $1/x$). Si consideramos $dv = 1/x$, tendremos $v = log|x|$ y, probablemente, obtendremos una integral más difícil.

Paso 2

No cambiar la elección:

A veces tenemos que aplicar el método más de una vez para calcular una misma integral.

En estas integrales, al aplicar el método por *n*-ésima vez, tenemos que llamar *u* al resultado *du*del paso anterior y *dv* al resultado *v*. Si **no** lo hacemos así, como escoger una opción u otra supone integrar o derivar, estaremos deshaciendo el paso anterior y no avanzaremos.

Paso 3

Integrales cíclicas:

En ocasiones, tras aplicar dos veces integración por partes, tenemos que despejar la propia integral de la igualdad obtenida para poder calcularla.

Ejemplo 1

$$\int x \cos x \, dx$$

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$$

$$u = x \xrightarrow{\text{derivar}} u' = 1$$

$$v' = \cos x \xrightarrow{\text{integrar}} v = \operatorname{sen} x$$

$$\int x \cos x \, dx = x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x \, dx = x \operatorname{sen} x + \cos x + C$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Ejemplo 2

Calcular la integral $\int xe^x\,\mathrm{d}x$.

Si seleccionamos

$$u = x \quad \& \quad \mathrm{d}v = e^x\,\mathrm{d}x \Rightarrow \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 1 \Rightarrow \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \quad \& \quad v = \int \mathrm{d}v = \int e^x\,\mathrm{d}x = e^x,$$

entonces:

$$\underbrace{\int xe^x\,\mathrm{d}x}_{\boxed{\begin{array}{lcl} u = x & \& & \mathrm{d}v = e^x\,\mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x & \& & v = e^x. \end{array}}} = uv - \int v\,\mathrm{d}u = xe^x - \int e^x\,\mathrm{d}x = xe^x - e^x + C = (x-1)e^x + C.$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Ejemplo 3

$$\int e^{3x}\,\text{sen}\,2x\,dx$$

$$u = e^{3x} \xrightarrow{\text{derivar}} u' = 3e^{3x}$$

$$v' = \text{sen}\,2x \xrightarrow{\text{integrar}} v = -\frac{1}{2}\cos 2x$$

$$\int e^{3x}\,\text{sen}\,2x\,dx = -\frac{1}{2}e^{3x}\cos 2x + \frac{3}{2}\int e^{3x}\cos 2x\,dx$$

$$u = e^{3x} \xrightarrow{\text{derivar}} u' = 3e^{3x}$$

$$v' = \cos 2x \xrightarrow{\text{integrar}} v = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x$$

Ejemplo 3

$$\int e^{3x} \operatorname{sen} 2x\, dx = -\frac{1}{2} e^{3x} \cos 2x + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2} e^{3x} \operatorname{sen} 2x - \frac{3}{2}\int e^{3x} \operatorname{sen} 2x\, dx\right)$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int e^{3x} \operatorname{sen} 2x\, dx = -\frac{1}{2} e^{3x} \cos 2x + \frac{3}{4} e^{3x} \operatorname{sen} 2x - \frac{9}{4}\int e^{3x} \operatorname{sen} 2x\, dx$$

$$\int e^{3x} \operatorname{sen} 2x\, dx + \frac{9}{4}\int e^{3x} \operatorname{sen} 2x\, dx = -\frac{1}{2} e^{3x} \cos 2x + \frac{3}{4} e^{3x} \operatorname{sen} 2x$$

$$\int e^{3x} \operatorname{sen} 2x\, dx = \frac{4}{13}\left(-\frac{1}{2} e^{3x} \cos 2x + \frac{3}{4} e^{3x} \operatorname{sen} 2x\right) + C$$

$$\int e^{3x} \operatorname{sen} 2x\, dx = \frac{1}{13} e^{3x} \left(-2\cos 2x + 3\operatorname{sen} 2x\right) + C$$

$\int \text{arc cotg}\, x\, dx$

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$$

Ejemplo 4

$$u = \text{arc cotg}\, x \xrightarrow{\text{derivar}} u' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$v' = 1 \xrightarrow{\text{integrar}} v = x$$

$$\int \text{arc cotg}\, x\, dx = x\, \text{arc cotg}\, x + \int \frac{x}{1+x^2}\, dx =$$

$$= x\, \text{arc cotg}\, x + \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C$$

Ejemplo 6

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int \operatorname{arc\,cos} x\,dx$$

$$u = \operatorname{arc\,cos} x \xrightarrow{\text{derivar}} u' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$v' = 1 \xrightarrow{\text{integrar}} v = x$$

$$\int \operatorname{arc\,cos} x\,dx = x \operatorname{arc\,cos} x + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

$$= x \operatorname{arc\,cos} x - \sqrt{1-x^2} + C$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Ejemplo 7

$$\int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx$$

$$u = x \xrightarrow{\text{derivar}} u' = 1$$

$$v' = \frac{1}{\cos^2 x} \xrightarrow{\text{integrar}} v = \operatorname{tg} x$$

$$\int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx = x \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x\,dx = x \operatorname{tg} x + \int \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx =$$

$$= x \operatorname{tg} x + \ln(\cos x) + C$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Ejemplo 8

$$\int \frac{\ln x}{x^3} dx$$

$$u = \ln x \xrightarrow{\text{derivar}} u' = \frac{1}{x}$$

$$v' = \frac{1}{x^3} \xrightarrow{\text{integrar}} v = -\frac{1}{2x^2}$$

$$\int \frac{\ln x}{x^3} dx = -\frac{1}{2x^2} \ln x + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^3} dx = -\frac{1}{2x^2} \ln x - \frac{1}{4x^2} + C$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Ejercicios

$$\int \ln^2 x \, dx$$

$$\int \left(x^3 + 5x^2 - 2\right) e^{2x} \, dx$$

$$\int \operatorname{sen} x \ln\left(\cos x\right) dx$$

$$\int x^2 \operatorname{arc\,tg} x \, dx$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Soluciones

$$\int \ln^2 x\,dx = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C$$

$$\int \left(x^3 + 5x^2 - 2\right)e^{2x}\,dx = \left(\frac{1}{2}x^3 + \frac{7}{4}x^2 - \frac{7}{4}x - \frac{1}{8}\right)e^{2x} + C$$

$$\int \operatorname{sen} x \ln\left(\cos x\right)dx = -\cos x \ln\left(\cos x\right) + \cos x + C$$

$$\int x^2 \operatorname{arc\,tg} x\,dx = \frac{1}{3}x^3 \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}\ln\left(1 + x^2\right) + C$$

Bibliografía del tema:

Bibliografía básica
Granville W.. (2009).Cálculo diferencial e Integral. México Limusa.
Ortiz. F. (2013). Cálculo diferencial e Integral 1ª edición. México Patria.

Webgrafia.
http://www.inetor.com/metodos/ejercicios_partes.html