

La irracionalidad de $\sqrt{2}$: una experiencia en el aula

Fernando Barrera Mora

barrera@uaeh.edu.mx

Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo

Seminario de la Maestría en Ciencias en Matemáticas y su
Didáctica

Área Académica de Matemáticas y Física, UA EH

Introducción

¿Qué misterios aritméticos encierra $\sqrt{2}$, que ha causado desconcierto desde los Pitagóricos hasta el presente, particularmente en los estudiantes de cálculo?

¿Qué relación tiene $\sqrt{2}$ con otros conceptos matemáticos? Por sus propiedades especiales, en teoría de números, 2 es considerado la mitad de todos los primos.

- ¿Qué conexiones aritméticas existen entre $\sqrt{2}$ y los números primos?
- ¿Qué rutas de instrucción, usando un sistema computacional, pueden ayudar a los estudiantes a:
 - establecer conexiones aritméticas entre $\sqrt{2}$ y las soluciones de ciertas ecuaciones diofánticas,
 - relacionar diversos conceptos matemáticos?

Introducción

¿Qué misterios aritméticos encierra $\sqrt{2}$, que ha causado desconcierto desde los Pitagóricos hasta el presente, particularmente en los estudiantes de cálculo?

¿Qué relación tiene $\sqrt{2}$ con otros conceptos matemáticos? Por sus propiedades especiales, en teoría de números, 2 es considerado la mitad de todos los primos.

- 1. ¿Qué significa, aritméticamente, que $\sqrt{2}$ sea irracional?
- 2. ¿Qué rutas de instrucción, usando un sistema computacional, pueden ayudar a los estudiantes a:
 - establecer conexiones aritméticas entre $\sqrt{2}$ y las soluciones de ciertas ecuaciones diofánticas,
 - relacionar diversos conceptos matemáticos?

Introducción

¿Qué misterios aritméticos encierra $\sqrt{2}$, que ha causado desconcierto desde los Pitagóricos hasta el presente, particularmente en los estudiantes de cálculo?

¿Qué relación tiene $\sqrt{2}$ con otros conceptos matemáticos? Por sus propiedades especiales, en teoría de números, 2 es considerado la mitad de todos los primos.

- ¿Qué significa, aritméticamente, que $\sqrt{2}$ sea irracional?
- ¿Qué rutas de instrucción, usando un sistema computacional, pueden ayudar a los estudiantes a:
 - establecer conexiones aritméticas entre $\sqrt{2}$ y las soluciones de ciertas ecuaciones diofánticas,
 - relacionar diversos conceptos matemáticos?

Introducción

¿Qué misterios aritméticos encierra $\sqrt{2}$, que ha causado desconcierto desde los Pitagóricos hasta el presente, particularmente en los estudiantes de cálculo?

¿Qué relación tiene $\sqrt{2}$ con otros conceptos matemáticos? Por sus propiedades especiales, en teoría de números, 2 es considerado la mitad de todos los primos.

- 1** ***¿Qué significa, aritméticamente, que $\sqrt{2}$ sea irracional?***
- 2** *¿Qué rutas de instrucción, usando un sistema computacional, pueden ayudar a los estudiantes a:*
 - establecer conexiones aritméticas entre $\sqrt{2}$ y las soluciones de ciertas ecuaciones diofánticas,*
 - relacionar diversos conceptos matemáticos?*

Introducción

¿Qué misterios aritméticos encierra $\sqrt{2}$, que ha causado desconcierto desde los Pitagóricos hasta el presente, particularmente en los estudiantes de cálculo?

¿Qué relación tiene $\sqrt{2}$ con otros conceptos matemáticos? Por sus propiedades especiales, en teoría de números, 2 es considerado la mitad de todos los primos.

- 1 **¿Qué significa, aritméticamente, que $\sqrt{2}$ sea irracional?**
- 2 **¿Qué rutas de instrucción, usando un sistema computacional, pueden ayudar a los estudiantes a:**
 - 1 establecer conexiones aritméticas entre $\sqrt{2}$ y las soluciones de ciertas ecuaciones diofánticas,
 - 2 relacionar diversos conceptos matemáticos?

Introducción

¿Qué misterios aritméticos encierra $\sqrt{2}$, que ha causado desconcierto desde los Pitagóricos hasta el presente, particularmente en los estudiantes de cálculo?

¿Qué relación tiene $\sqrt{2}$ con otros conceptos matemáticos? Por sus propiedades especiales, en teoría de números, 2 es considerado la mitad de todos los primos.

- 1 ¿Qué significa, aritméticamente, que $\sqrt{2}$ sea irracional?
- 2 ¿Qué rutas de instrucción, usando un sistema computacional, pueden ayudar a los estudiantes a:
 - 1 establecer conexiones aritméticas entre $\sqrt{2}$ y las soluciones de ciertas ecuaciones diofánticas,
 - 2 relacionar diversos conceptos matemáticos?

Introducción

¿Qué misterios aritméticos encierra $\sqrt{2}$, que ha causado desconcierto desde los Pitagóricos hasta el presente, particularmente en los estudiantes de cálculo?

¿Qué relación tiene $\sqrt{2}$ con otros conceptos matemáticos? Por sus propiedades especiales, en teoría de números, 2 es considerado la mitad de todos los primos.

- 1 ¿Qué significa, aritméticamente, que $\sqrt{2}$ sea irracional?
- 2 ¿Qué rutas de instrucción, usando un sistema computacional, pueden ayudar a los estudiantes a:
 - 1 establecer conexiones aritméticas entre $\sqrt{2}$ y las soluciones de ciertas ecuaciones diofánticas,
 - 2 relacionar diversos conceptos matemáticos?

Contenido

- Irracionalidad de $\sqrt{2}$: enfoque clásico.
- Irracionalidad de $\sqrt{2}$: una prueba geométrica.
- Irracionalidad de $\sqrt{2}$: una alternativa didáctica con uso de tecnología.

Contenido

- 1 Irracionalidad de $\sqrt{2}$: enfoque clásico.
- 2 Irracionalidad de $\sqrt{2}$: una prueba geométrica.
- 3 Irracionalidad de $\sqrt{2}$: una alternativa didáctica con uso de tecnología.

Contenido

- 1 Irracionalidad de $\sqrt{2}$: enfoque clásico.
- 2 Irracionalidad de $\sqrt{2}$: una prueba geométrica.
- 3 Irracionalidad de $\sqrt{2}$: una alternativa didáctica con uso de tecnología.

Contenido

- 1 Irracionalidad de $\sqrt{2}$: enfoque clásico.
- 2 Irracionalidad de $\sqrt{2}$: una prueba geométrica.
- 3 Irracionalidad de $\sqrt{2}$: una alternativa didáctica con uso de tecnología.

Irracionalidad de $\sqrt{2}$: demostración clásica

Argumento por contradicción. Supongamos que $\sqrt{2}$ es racional, entonces existen enteros p y q , primos relativos, tales que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Elevando al cuadrado y multiplicando por q se tiene: $p^2 = 2q^2$, (*). De esto concluimos que p^2 es par, entonces p también lo es, es decir, $p = 2k$. Elevando al cuadrado en esta ecuación y sustituyendo en (*) se concluye que $q^2 = 2k^2$. Argumentando igual que antes, q debe ser par, contradiciendo que p y q se eligieron primos relativos.

Irracionalidad de $\sqrt{2}$: demostración clásica

Argumento por contradicción. Supongamos que $\sqrt{2}$ es racional, entonces existen enteros p y q , primos relativos, tales que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Elevando al cuadrado y multiplicando por q se tiene: $p^2 = 2q^2$, (*). De esto concluimos que p^2 es par, entonces p también lo es, es decir, $p = 2k$. Elevando al cuadrado en esta ecuación y sustituyendo en (*) se concluye que $q^2 = 2k^2$. Argumentando igual que antes, q debe ser par, contradiciendo que p y q se eligieron primos relativos.

Irracionalidad de $\sqrt{2}$: demostración clásica

Argumento por contradicción. Supongamos que $\sqrt{2}$ es racional, entonces existen enteros p y q , primos relativos, tales que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Elevando al cuadrado y multiplicando por q se tiene: $p^2 = 2q^2$, (*). De esto concluimos que p^2 es par, entonces p también lo es, es decir, $p = 2k$. Elevando al cuadrado en esta ecuación y sustituyendo en (*) se concluye que $q^2 = 2k^2$. Argumentando igual que antes, q debe ser par, contradiciendo que p y q se eligieron primos relativos.

Irracionalidad de $\sqrt{2}$: demostración geométrica (Apostol, 2000)

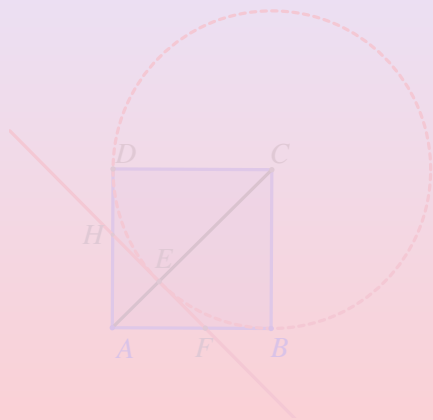


Figura: Dos triángulos rectángulos isósceles de lados enteros

Irracionalidad de $\sqrt{2}$: demostración geométrica (Apostol, 2000)

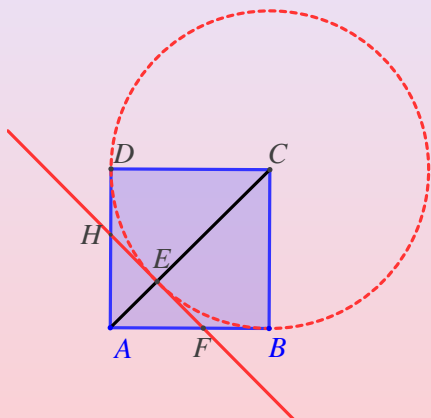


Figura: Dos triángulos rectángulos isósceles de lados enteros

Irracionalidad de $\sqrt{2}$: una alternativa didáctica con uso de tecnología.

Contexto del desarrollo de las tareas

- Un curso de cálculo elemental de una licenciatura en matemáticas aplicadas en una universidad pública de México.
- Una de las ideas centrales del curso fue, que los estudiantes desarrollaran tareas en donde tuvieran la oportunidad de reflexionar acerca de las propiedades de los diferentes sistemas numéricos, y su relación con el concepto de función.
- Población estudiantil: 20 estudiantes, edad promedio 18 años.
 - Dos participantes, Leonardo e Issac con entrenamiento para olimpiadas de matemáticas nacionales.
 - Un participante invitado al curso, Inti (once años).
- El curso se desarrolló en estrecha colaboración con otro, que tuvo por objetivo resolver problemas con el uso de tecnología.

Irracionalidad de $\sqrt{2}$: una alternativa didáctica con uso de tecnología.

Contexto del desarrollo de las tareas

- 1 Un curso de cálculo elemental de una licenciatura en matemáticas aplicadas en una universidad pública de México.
- 2 Una de las ideas centrales del curso fue, que los estudiantes desarrollaran tareas en donde tuvieran la oportunidad de reflexionar acerca de las propiedades de los diferentes sistemas numéricos, y su relación con el concepto de función.
- 3 Población estudiantil: 20 estudiantes, edad promedio 18 años.
 - Dos participantes, Leonardo e Isaac con entrenamiento para olimpiadas de matemáticas nacionales.
 - Un participante invitado al curso, Inhi (once años).
- 4 El curso se desarrolló en estrecha colaboración con otro, que tuvo por objetivo resolver problemas con el uso de tecnología.

Irracionalidad de $\sqrt{2}$: una alternativa didáctica con uso de tecnología.

Contexto del desarrollo de las tareas

- 1 Un curso de cálculo elemental de una licenciatura en matemáticas aplicadas en una universidad pública de México.
- 2 Una de las ideas centrales del curso fue, que los estudiantes desarrollaran tareas en donde tuvieran la oportunidad de reflexionar acerca de las propiedades de los diferentes sistemas numéricos, y su relación con el concepto de función.
- 3 Población estudiantil: 20 estudiantes, edad promedio 18 años.
 - Dos participantes, tomando a base de entrenamiento para olimpiadas de matemáticas nacionales.
 - Un participante invitado al curso, (1111 once años).
- 4 El curso se desarrolló en estrecha colaboración con otro, que tuvo por objetivo resolver problemas con el uso de tecnología.

Irracionalidad de $\sqrt{2}$: una alternativa didáctica con uso de tecnología.

Contexto del desarrollo de las tareas

- 1 Un curso de cálculo elemental de una licenciatura en matemáticas aplicadas en una universidad pública de México.
- 2 Una de las ideas centrales del curso fue, que los estudiantes desarrollaran tareas en donde tuvieran la oportunidad de reflexionar acerca de las propiedades de los diferentes sistemas numéricos, y su relación con el concepto de función.
- 3 **Población estudiantil: 20 estudiantes, edad promedio 18 años.**
 - 1 Dos participantes, Leonardo e Issac con entrenamiento para olimpiadas de matemáticas nacionales.
 - 2 Un participante invitado al curso, Inti (once años).
- 4 El curso se desarrolló en estrecha colaboración con otro, que tuvo por objetivo resolver problemas con el uso de tecnología.

Irracionalidad de $\sqrt{2}$: una alternativa didáctica con uso de tecnología.

Contexto del desarrollo de las tareas

- 1 Un curso de cálculo elemental de una licenciatura en matemáticas aplicadas en una universidad pública de México.
- 2 Una de las ideas centrales del curso fue, que los estudiantes desarrollaran tareas en donde tuvieran la oportunidad de reflexionar acerca de las propiedades de los diferentes sistemas numéricos, y su relación con el concepto de función.
- 3 Población estudiantil: 20 estudiantes, edad promedio 18 años.
 - 1 Dos participantes, Leonardo e Issac con entrenamiento para olimpiadas de matemáticas nacionales.
 - 2 Un participante invitado al curso, Inti (once años).
- 4 El curso se desarrolló en estrecha colaboración con otro, que tuvo por objetivo resolver problemas con el uso de tecnología.

Irracionalidad de $\sqrt{2}$: una alternativa didáctica con uso de tecnología.

Contexto del desarrollo de las tareas

- 1 Un curso de cálculo elemental de una licenciatura en matemáticas aplicadas en una universidad pública de México.
- 2 Una de las ideas centrales del curso fue, que los estudiantes desarrollaran tareas en donde tuvieran la oportunidad de reflexionar acerca de las propiedades de los diferentes sistemas numéricos, y su relación con el concepto de función.
- 3 Población estudiantil: 20 estudiantes, edad promedio 18 años.
 - 1 Dos participantes, Leonardo e Issac con entrenamiento para olimpiadas de matemáticas nacionales.
 - 2 **Un participante invitado al curso, Inti (once años).**
- 4 El curso se desarrolló en estrecha colaboración con otro, que tuvo por objetivo resolver problemas con el uso de tecnología.

Irracionalidad de $\sqrt{2}$: una alternativa didáctica con uso de tecnología.

Contexto del desarrollo de las tareas

- 1 Un curso de cálculo elemental de una licenciatura en matemáticas aplicadas en una universidad pública de México.
- 2 Una de las ideas centrales del curso fue, que los estudiantes desarrollaran tareas en donde tuvieran la oportunidad de reflexionar acerca de las propiedades de los diferentes sistemas numéricos, y su relación con el concepto de función.
- 3 Población estudiantil: 20 estudiantes, edad promedio 18 años.
 - 1 Dos participantes, Leonardo e Issac con entrenamiento para olimpiadas de matemáticas nacionales.
 - 2 Un participante invitado al curso, Inti (once años).
- 4 El curso se desarrolló en estrecha colaboración con otro, que tuvo por objetivo resolver problemas con el uso de tecnología.

Primer Episodio: Exploración y primeras estrategias de solución de las tareas

- Construir una tabla con una hoja de cálculo, por ejemplo Excel, en la que se muestren los enteros positivos, sus cuadrados y su doble. Se pidió a los estudiantes, con el uso de la tabla, verificar que la ecuación $x^2 = 2y^2$ no tiene soluciones enteras distintas de cero.
- Observación de Inti. “hay números en las columnas segunda y tercera que son casi iguales, por ejemplo 7 y 8; 6 y 9; 44 y 50; 239 y 285”
- A partir de la Observación de Inti, la discusión tomó una ruta no prevista por el profesor.
- ¿Que significa que “hay números en las columnas segunda y tercera que son casi iguales”? Después de una discusión hubo consenso y se llegó a: la ecuación $x^2 - 2y^2 = \pm 1$ tiene soluciones enteras diferentes de cero: $(1, 1)$, $(3, 2)$, $(7, 5)$, $(17, 12)$.

Primer Episodio: Exploración y primeras estrategias de solución de las tareas

- 1 Construir una tabla con una hoja de cálculo, por ejemplo Excel, en la que se muestren los enteros positivos, sus cuadrados y su doble. Se pidió a los estudiantes, con el uso de la tabla, verificar que la ecuación $x^2 = 2y^2$ no tiene soluciones enteras distintas de cero.
- 2 Observación de Inti. “hay números en las columnas segunda y tercera que son casi iguales, por ejemplo **1** y **2**; **8** y **9**; **49** y **50**; **299** y **288**”
- 3 A partir de la Observación de Inti, la discusión tomó una ruta no prevista por el profesor.
- 4 ¿Qué significa que “hay números en las columnas segunda y tercera que son casi iguales”? Después de una discusión hubo consenso y se llegó a: la ecuación $x^2 - 2y^2 = \pm 1$ tiene soluciones enteras diferentes de cero: $(1, 1)$, $(3, 2)$, $(7, 5)$, $(17, 12)$.

Primer Episodio: Exploración y primeras estrategias de solución de las tareas

- 1 Construir una tabla con una hoja de cálculo, por ejemplo Excel, en la que se muestren los enteros positivos, sus cuadrados y su doble. Se pidió a los estudiantes, con el uso de la tabla, verificar que la ecuación $x^2 = 2y^2$ no tiene soluciones enteras distintas de cero.
- 2 Observación de Inti. “hay números en las columnas segunda y tercera que son casi iguales, por ejemplo **1 y 2; 8 y 9; 49 y 50; 299 y 288**”
- 3 A partir de la Observación de Inti, la discusión tomó una ruta no prevista por el profesor.
- 4 ¿Qué significa que “hay números en las columnas segunda y tercera que son casi iguales”? Después de una discusión hubo consenso y se llegó a: la ecuación $x^2 - 2y^2 = \pm 1$ tiene soluciones enteras diferentes de cero: $(1, 1), (3, 2), (7, 5), (17, 12)$.

Primer Episodio: Exploración y primeras estrategias de solución de las tareas

- 1 Construir una tabla con una hoja de cálculo, por ejemplo Excel, en la que se muestren los enteros positivos, sus cuadrados y su doble. Se pidió a los estudiantes, con el uso de la tabla, verificar que la ecuación $x^2 = 2y^2$ no tiene soluciones enteras distintas de cero.
- 2 Observación de Inti. “hay números en las columnas segunda y tercera que son casi iguales, por ejemplo **1 y 2; 8 y 9; 49 y 50; 299 y 288**”
- 3 A partir de la Observación de Inti, la discusión tomó una ruta no prevista por el profesor.
- 4 ¿Qué significa que “hay números en las columnas segunda y tercera que son casi iguales”? Después de una discusión hubo consenso y se llegó a: la ecuación $x^2 - 2y^2 = \pm 1$ tiene soluciones enteras diferentes de cero: $(1, 1), (3, 2), (7, 5), (17, 12)$.

Primer Episodio: Exploración y primeras estrategias de solución de las tareas

- 1 Construir una tabla con una hoja de cálculo, por ejemplo Excel, en la que se muestren los enteros positivos, sus cuadrados y su doble. Se pidió a los estudiantes, con el uso de la tabla, verificar que la ecuación $x^2 = 2y^2$ no tiene soluciones enteras distintas de cero.
- 2 Observación de Inti. “hay números en las columnas segunda y tercera que son casi iguales, por ejemplo **1** y **2**; **8** y **9**; **49** y **50**; **299** y **288**”
- 3 A partir de la Observación de Inti, la discusión tomó una ruta no prevista por el profesor.
- 4 ¿Qué significa que “hay números en las columnas segunda y tercera que son casi iguales”? Después de una discusión hubo consenso y se llegó a: la ecuación $x^2 - 2y^2 = \pm 1$ tiene soluciones enteras diferentes de cero: $(1, 1)$, $(3, 2)$, $(7, 5)$, $(17, 12)$.

Continuación: primer episodio

- Algunos estudiantes notaron que $x^2 - 2y^2 = (x + y\sqrt{2})(x - y\sqrt{2}) = \pm 1$ y preguntaron, "¿cómo se pueden obtener más soluciones de $x^2 - 2y^2 = \pm 1$?"
- El profesor sugirió a los estudiantes usar un CAS para calcular $(1 + \sqrt{2})^n$, para varios valores de n y observar los coeficientes en la expansión y su relación con las soluciones encontradas:
 - Se pidió a los estudiantes justificar por qué $(1 + \sqrt{2})^n = x_n + y_n\sqrt{2}$ con x_n, y_n enteros positivos. También se pidió justificar que $(1 - \sqrt{2})^n = x_n - y_n\sqrt{2}$.
- Los estudiantes lograron justificar que (x_n, y_n) es solución de $x^2 - 2y^2 = \pm 1$, de manera más precisa, justificaron que (x_n, y_n) es solución de $x^2 - 2y^2 = 1$, exactamente cuando n es par.
- También observaron que $\frac{x_n}{y_n} \rightarrow \sqrt{2}$ cuando n crece.

Continuación: primer episodio

- 1 Algunos estudiantes notaron que $x^2 - 2y^2 = (x + y\sqrt{2})(x - y\sqrt{2}) = \pm 1$ y preguntaron, “¿cómo se pueden obtener más soluciones de $x^2 - 2y^2 = \pm 1$?”
- 2 El profesor sugirió a los estudiantes usar un CAS para calcular $(1 + \sqrt{2})^n$, para varios valores de n y observar los coeficientes en la expansión y su relación con las soluciones encontradas.
- 3 Se pidió a los estudiantes justificar por qué $(1 + \sqrt{2})^n = x_n + y_n\sqrt{2}$, con x_n, y_n enteros positivos. También se pidió justificar que $(1 - \sqrt{2})^n = x_n - y_n\sqrt{2}$.
- 4 Los estudiantes lograron justificar que (x_n, y_n) es solución de $x^2 - 2y^2 = \pm 1$, de manera más precisa, justificaron que (x_n, y_n) es solución de $x^2 - 2y^2 = 1$, exactamente cuando n es par.
- 5 También observaron que $\frac{x_n}{y_n} \rightarrow \sqrt{2}$ cuando n crece.

Continuación: primer episodio

- 1 Algunos estudiantes notaron que $x^2 - 2y^2 = (x + y\sqrt{2})(x - y\sqrt{2}) = \pm 1$ y preguntaron, “¿cómo se pueden obtener más soluciones de $x^2 - 2y^2 = \pm 1$?”
- 2 El profesor sugirió a los estudiantes usar un CAS para calcular $(1 + \sqrt{2})^n$, para varios valores de n y observar los coeficientes en la expansión y su relación con las soluciones encontradas.
- 3 Se pidió a los estudiantes justificar por qué $(1 + \sqrt{2})^n = x_n + y_n\sqrt{2}$, con x_n, y_n enteros positivos. También se pidió justificar que $(1 - \sqrt{2})^n = x_n - y_n\sqrt{2}$.
- 4 Los estudiantes lograron justificar que (x_n, y_n) es solución de $x^2 - 2y^2 = \pm 1$, de manera más precisa, justificaron que (x_n, y_n) es solución de $x^2 - 2y^2 = 1$, exactamente cuando n es par.
- 5 También observaron que $\frac{x_n}{y_n} \rightarrow \sqrt{2}$ cuando n crece.

Continuación: primer episodio

- 1 Algunos estudiantes notaron que $x^2 - 2y^2 = (x + y\sqrt{2})(x - y\sqrt{2}) = \pm 1$ y preguntaron, “¿cómo se pueden obtener más soluciones de $x^2 - 2y^2 = \pm 1$?”
- 2 El profesor sugirió a los estudiantes usar un CAS para calcular $(1 + \sqrt{2})^n$, para varios valores de n y observar los coeficientes en la expansión y su relación con las soluciones encontradas.
- 3 Se pidió a los estudiantes justificar por qué $(1 + \sqrt{2})^n = x_n + y_n\sqrt{2}$, con x_n, y_n enteros positivos. También se pidió justificar que $(1 - \sqrt{2})^n = x_n - y_n\sqrt{2}$.
- 4 Los estudiantes lograron justificar que (x_n, y_n) es solución de $x^2 - 2y^2 = \pm 1$, de manera más precisa, justificaron que (x_n, y_n) es solución de $x^2 - 2y^2 = 1$, exactamente cuando n es par.
- 5 También observaron que $\frac{x_n}{y_n} \rightarrow \sqrt{2}$ cuando n crece.

Continuación: primer episodio

- 1 Algunos estudiantes notaron que $x^2 - 2y^2 = (x + y\sqrt{2})(x - y\sqrt{2}) = \pm 1$ y preguntaron, “¿cómo se pueden obtener más soluciones de $x^2 - 2y^2 = \pm 1$?”
- 2 El profesor sugirió a los estudiantes usar un CAS para calcular $(1 + \sqrt{2})^n$, para varios valores de n y observar los coeficientes en la expansión y su relación con las soluciones encontradas.
- 3 Se pidió a los estudiantes justificar por qué $(1 + \sqrt{2})^n = x_n + y_n\sqrt{2}$, con x_n, y_n enteros positivos. También se pidió justificar que $(1 - \sqrt{2})^n = x_n - y_n\sqrt{2}$.
- 4 Los estudiantes lograron justificar que (x_n, y_n) es solución de $x^2 - 2y^2 = \pm 1$, de manera más precisa, justificaron que (x_n, y_n) es solución de $x^2 - 2y^2 = 1$, exactamente cuando n es par.
- 5 También observaron que $\frac{x_n}{y_n} \rightarrow \sqrt{2}$ cuando n crece.

Continuación: primer episodio

- 1 Algunos estudiantes notaron que $x^2 - 2y^2 = (x + y\sqrt{2})(x - y\sqrt{2}) = \pm 1$ y preguntaron, “¿cómo se pueden obtener más soluciones de $x^2 - 2y^2 = \pm 1$?”
- 2 El profesor sugirió a los estudiantes usar un CAS para calcular $(1 + \sqrt{2})^n$, para varios valores de n y observar los coeficientes en la expansión y su relación con las soluciones encontradas.
- 3 Se pidió a los estudiantes justificar por qué $(1 + \sqrt{2})^n = x_n + y_n\sqrt{2}$, con x_n, y_n enteros positivos. También se pidió justificar que $(1 - \sqrt{2})^n = x_n - y_n\sqrt{2}$.
- 4 Los estudiantes lograron justificar que (x_n, y_n) es solución de $x^2 - 2y^2 = \pm 1$, de manera más precisa, justificaron que (x_n, y_n) es solución de $x^2 - 2y^2 = 1$, exactamente cuando n es par.
- 5 También observaron que $\frac{x_n}{y_n} \rightarrow \sqrt{2}$ cuando n crece.

Segundo episodio: Presentación de argumentos formales

- En esta etapa se pidió probar que $x^2 = 2y^2$ no tiene soluciones diferentes de cero.
- Después de aproximadamente 10 minutos, Leonardo preguntó: "¿puedo exponer una idea para ver si funciona?". El profesor pidió a todos escuchar con atención. Leonardo inició con otra pregunta: "¿puedo usar que los números enteros se representan como producto de primos?".
- Argumento de Leonardo: Si $x = p_1 \cdots p_n$ entonces $x^2 = p_1^2 \cdots p_n^2$, es decir, el cuadrado de todo entero tiene un número par de factores primos; como 2 es primo, entonces $2y^2$ tiene un número impar de factores primos, por lo que no se puede que $x^2 = 2y^2$.
- Unos minutos después, Leonardo dijo que su argumento "funciona" para cualquier primo p .

Segundo episodio: Presentación de argumentos formales

- 1 En esta etapa se pidió probar que $x^2 = 2y^2$ no tiene soluciones diferentes de cero.
- 2 Después de aproximadamente 10 minutos, Leonardo preguntó: “¿puedo exponer una idea para ver si funciona?”. El profesor pidió a todos escuchar con atención. Leonardo inició con otra pregunta: “¿puedo usar que los números enteros se representan como producto de primos?”
- 3 **Argumento de Leonardo:** Si $x = p_1 \cdots p_k$, entonces $x^2 = p_1 \cdots p_k p_1 \cdots p_k$, es decir, el cuadrado de todo entero tiene un número par de factores primos; como 2 es primo, entonces $2y^2$ tiene un número impar de factores primos, por lo que no se puede que $x^2 = 2y^2$.
- 4 Unos minutos después, Leonardo dijo que su argumento “funciona” para cualquier primo p .

Segundo episodio: Presentación de argumentos formales

- 1 En esta etapa se pidió probar que $x^2 = 2y^2$ no tiene soluciones diferentes de cero.
- 2 Después de aproximadamente 10 minutos, Leonardo preguntó: “¿puedo exponer una idea para ver si funciona?”. El profesor pidió a todos escuchar con atención. Leonardo inició con otra pregunta: “¿puedo usar que los números enteros se representan como producto de primos?”
- 3 **Argumento de Leonardo:** Si $x = p_1 \cdots p_k$, entonces $x^2 = p_1 \cdots p_k p_1 \cdots p_k$, es decir, el cuadrado de todo entero tiene un número par de factores primos; como 2 es primo, entonces $2y^2$ tiene un número impar de factores primos, por lo que no se puede que $x^2 = 2y^2$.
- 4 Unos minutos después, Leonardo dijo que su argumento “funciona” para cualquier primo p .

Segundo episodio: Presentación de argumentos formales

- 1 En esta etapa se pidió probar que $x^2 = 2y^2$ no tiene soluciones diferentes de cero.
- 2 Después de aproximadamente 10 minutos, Leonardo preguntó: “¿puedo exponer una idea para ver si funciona?”. El profesor pidió a todos escuchar con atención. Leonardo inició con otra pregunta: “¿puedo usar que los números enteros se representan como producto de primos?”
- 3 **Argumento de Leonardo:** Si $x = p_1 \cdots p_k$, entonces $x^2 = p_1 \cdots p_k p_1 \cdots p_k$, es decir, el cuadrado de todo entero tiene un número par de factores primos; como 2 es primo, entonces $2y^2$ tiene un número impar de factores primos, por lo que no se puede que $x^2 = 2y^2$.
- 4 Unos minutos después, Leonardo dijo que su argumento “funciona” para cualquier primo p .

Segundo episodio: Presentación de argumentos formales

- 1 En esta etapa se pidió probar que $x^2 = 2y^2$ no tiene soluciones diferentes de cero.
- 2 Después de aproximadamente 10 minutos, Leonardo preguntó: “¿puedo exponer una idea para ver si funciona?”. El profesor pidió a todos escuchar con atención. Leonardo inició con otra pregunta: “¿puedo usar que los números enteros se representan como producto de primos?”
- 3 **Argumento de Leonardo:** Si $x = p_1 \cdots p_k$, entonces $x^2 = p_1 \cdots p_k p_1 \cdots p_k$, es decir, el cuadrado de todo entero tiene un número par de factores primos; como 2 es primo, entonces $2y^2$ tiene un número impar de factores primos, por lo que no se puede que $x^2 = 2y^2$.
- 4 Unos minutos después, Leonardo dijo que su argumento “funciona” para cualquier primo p .

Tercer episodio: generalización y extensión de resultados

- En la discusión surgieron preguntas como:
 - Para un primo dado p , ¿cómo encontrar soluciones de la ecuación $x^2 - py^2 = \pm 1$ (Ecuación de Pell).
 - ¿Para cuales primos p , la ecuación $x^2 - py^2 = -1$ tiene solución.
 - Si p se cambia por un entero d , libre de cuadrado, ¿es \sqrt{d} irracional?

Tercer episodio: generalización y extensión de resultados

1 En la discusión surgieron preguntas como:

- 1 Para un primo dado p , ¿cómo encontrar soluciones de la ecuación $x^2 - py^2 = \pm 1$ (Ecuación de Pell).
- 2 ¿Para cuales primos p , la ecuación $x^2 - py^2 = -1$ tiene solución.
- 3 Si p se cambia por un entero d , libre de cuadrado, ¿es \sqrt{d} irracional?

2 El papel de SAGE (Software for Algebra and Geometry Experimentation), en la respuesta a la pregunta 1.

Tercer episodio: generalización y extensión de resultados

- 1 En la discusión surgieron preguntas como:
 - 1 Para un primo dado p , ¿cómo encontrar soluciones de la ecuación $x^2 - py^2 = \pm 1$ (Ecuación de Pell).
 - 2 ¿Para cuales primos p , la ecuación $x^2 - py^2 = -1$ tiene solución.
 - 3 Si p se cambia por un entero d , libre de cuadrado, ¿es \sqrt{d} irracional?
- 2 El papel de SAGE (Software for Algebra and Geometry Experimentation), en la respuesta a la pregunta 1.

Tercer episodio: generalización y extensión de resultados

- 1 En la discusión surgieron preguntas como:
 - 1 Para un primo dado p , ¿cómo encontrar soluciones de la ecuación $x^2 - py^2 = \pm 1$ (Ecuación de Pell).
 - 2 ¿Para cuales primos p , la ecuación $x^2 - py^2 = -1$ tiene solución.
 - 3 Si p se cambia por un entero d , libre de cuadrado, ¿es \sqrt{d} irracional?
- 2 El papel de SAGE (Software for Algebra and Geometry Experimentation), en la respuesta a la pregunta 1.

Tercer episodio: generalización y extensión de resultados

- 1 En la discusión surgieron preguntas como:
 - 1 Para un primo dado p , ¿cómo encontrar soluciones de la ecuación $x^2 - py^2 = \pm 1$ (Ecuación de Pell).
 - 2 ¿Para cuales primos p , la ecuación $x^2 - py^2 = -1$ tiene solución.
 - 3 Si p se cambia por un entero d , libre de cuadrado, ¿es \sqrt{d} irracional?
- 2 El papel de SAGE (Software for Algebra and Geometry Experimentation), en la respuesta a la pregunta 1.

Tercer episodio: generalización y extensión de resultados

- 1 En la discusión surgieron preguntas como:
 - 1 Para un primo dado p , ¿cómo encontrar soluciones de la ecuación $x^2 - py^2 = \pm 1$ (Ecuación de Pell).
 - 2 ¿Para cuales primos p , la ecuación $x^2 - py^2 = -1$ tiene solución.
 - 3 Si p se cambia por un entero d , libre de cuadrado, ¿es \sqrt{d} irracional?
- 2 El papel de SAGE (Software for Algebra and Geometry Experimentation), en la respuesta a la pregunta 1.

Conclusiones

- Las características de un sistema computacional, brindan a los estudiantes la oportunidad de explorar diferentes aspectos del pensamiento matemático y posibles generalizaciones de un problema.
- El uso de un software, al resolver casos particulares y a partir de esto formular conjeturas, permite a los estudiantes reconocer la necesidad de utilizar diferentes tipos de argumentos, incluyendo los formales.
- El uso interactivo de un software, al resolver tareas de aprendizaje, puede ayudar a los estudiantes a establecer conexiones entre diferentes conceptos matemáticos (irracionalidad de $\sqrt{2}$, aproximaciones, soluciones de ecuaciones diofánticas, entre otros).
- La creatividad matemática en el salón de clase (Leonardo e Inti), debe ser estimulada y estudiada sistemáticamente (Sriraman, 2004, p. 32).

Conclusiones

- 1 Las características de un sistema computacional, brindan a los estudiantes la oportunidad de explorar diferentes aspectos del pensamiento matemático y posibles generalizaciones de un problema.
- 2 El uso de un software, al resolver casos particulares y a partir de esto formular conjeturas, permite a los estudiantes reconocer la necesidad de utilizar diferentes tipos de argumentos, incluyendo los formales.
- 3 El uso sistemático de un software, al resolver tareas de aprendizaje, puede ayudar a los estudiantes a establecer conexiones entre diferentes conceptos matemáticos. (irracionalidad de \sqrt{d} , aproximaciones, soluciones de ecuaciones diofánticas, entre otros).
- 4 La creatividad matemática en el salón de clase (Leonardo e Inti), debe ser estimulada y estudiada sistemáticamente (Sriraman, 2004, p. 32).

Conclusiones

- 1 Las características de un sistema computacional, brindan a los estudiantes la oportunidad de explorar diferentes aspectos del pensamiento matemático y posibles generalizaciones de un problema.
- 2 El uso de un software, al resolver casos particulares y a partir de esto formular conjeturas, permite a los estudiantes reconocer la necesidad de utilizar diferentes tipos de argumentos, incluyendo los formales.
- 3 El uso sistemático de un software, al resolver tareas de aprendizaje, puede ayudar a los estudiantes a establecer conexiones entre diferentes conceptos matemáticos. (irracionalidad de \sqrt{d} , aproximaciones, soluciones de ecuaciones diofánticas, entre otros).
- 4 La creatividad matemática en el salón de clase (Leonardo e Inti), debe ser estimulada y estudiada sistemáticamente (Sriraman, 2004, p. 32).






Conclusiones

- 1 Las características de un sistema computacional, brindan a los estudiantes la oportunidad de explorar diferentes aspectos del pensamiento matemático y posibles generalizaciones de un problema.
- 2 El uso de un software, al resolver casos particulares y a partir de esto formular conjeturas, permite a los estudiantes reconocer la necesidad de utilizar diferentes tipos de argumentos, incluyendo los formales.
- 3 El uso sistemático de un software, al resolver tareas de aprendizaje, puede ayudar a los estudiantes a establecer conexiones entre diferentes conceptos matemáticos. (irracionalidad de \sqrt{d} , aproximaciones, soluciones de ecuaciones diofánticas, entre otros).
- 4 La creatividad matemática en el salón de clase (Leonardo e Inti), debe ser estimulada y estudiada sistemáticamente (Sriraman, 2004, p. 32).

Conclusiones

- 1 Las características de un sistema computacional, brindan a los estudiantes la oportunidad de explorar diferentes aspectos del pensamiento matemático y posibles generalizaciones de un problema.
- 2 El uso de un software, al resolver casos particulares y a partir de esto formular conjeturas, permite a los estudiantes reconocer la necesidad de utilizar diferentes tipos de argumentos, incluyendo los formales.
- 3 El uso sistemático de un software, al resolver tareas de aprendizaje, puede ayudar a los estudiantes a establecer conexiones entre diferentes conceptos matemáticos. (irracionalidad de \sqrt{d} , aproximaciones, soluciones de ecuaciones diofánticas, entre otros).
- 4 La creatividad matemática en el salón de clase (Leonardo e Inti), debe ser estimulada y estudiada sistemáticamente (Sriraman, 2004, p. 32).

Referencias

-  Apostol, T. (2000). Irrationality of the Square Root of Two: A Geometric Proof. The Amer. Math Monthly, Vol 107, No. 9 (Nov., 2000) pp 841-842.
-  Edward, H. M. (1977). Fermat's Last Theorem: A Generic Introduction to Algebraic Number Theory. New York: Springer-Verlag.
-  Hiebert, et al. (1997). Making sense: teaching and learning mathematics with understanding. Portsmouth, NH: Heinemann.
-  Sriraman, B. (2004) The Characteristics of Mathematical Creativity. The Mathematics Educator 14, 1, 19-34.
-  Stein W. (2006, february). Sage? Recuperado de: http://www.sagemath.org/talks/2006-02-sage_days/current.pdf el 13 de noviembre de 2009.

