Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo

Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería

Área Académica de Matemáticas y Física

Línea de investigación: Economía y Finanzas Matemáticas

Programa educativo: Licenciatura en Matemáticas Aplicadas

Nombre de la asignatura: Cálculo ELemental

Tema: Números irracionales

Ciclo: Julio-Noviembre de 2009.

Profesor: Fernando Barrera Mora

Tema: Números irracionales

Abstract: The aim of this lecture is to provide alternative methodos to show that $\sqrt{2}$ is irrational as well as to establish connections with several concepts related with Pell's equation .

Keywords: Quadratic irrationals, Pell's equation, square root of primes.

Palabras clave: Irrationales quadráticos, Ecuación de Pell, Raís cuadrada de primos

La irracionalidad de $\sqrt{2}$: una experiencia en el aula

Fernando Barrera Mora
barrera@uaeh.edu.mx

Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo

Seminario de la Maestría en Ciencias en Matemáticas y su Didáctica
Área Académica de Matemáticas y Física, UAEH

Introducción

¿Qué misterios aritméticos encierra $\sqrt{2}$, que ha causado desconcierto desde los Pitagóricos hasta el presente, particularmente en los estudiantes de cálculo?
¿Qué relación tiene $\sqrt{2}$ con otros conceptos matemáticos? Por sus propiedades especiales, en teoría de números, 2 es considerado la mitad de todos los primos.

- [illegible]
- ¿Qué rutas de instrucción, usando un sistema computacional, pueden ayudar a los estudiantes a:
  - establecer conexiones artiméticas entre $\sqrt{2}$ y las soluciones de ciertas ecuaciones diofánticas,
  - relacionar diversos conceptos matemáticos?

Introducción

¿Qué misterios aritméticos encierra $\sqrt{2}$, que ha causado desconcierto desde los Pitagóricos hasta el presente, particularmente en los estudiantes de cálculo?
¿Qué relación tiene $\sqrt{2}$ con otros conceptos matemáticos? ***Por sus propiedades especiales, en teoría de números, 2 es considerado la mitad de todos los primos.***

1. ¿Qué significa, aritméticamente, que $\sqrt{2}$ sea irracional?
2. ¿Qué rutas de instrucción, usando un sistema computacional pueden ayudar a los estudiantes a:
   - establecer conexiones aritméticas entre $\sqrt{2}$ y las soluciones de ciertas ecuaciones diofánticas,
   - relacionar diversos conceptos matemáticos?

Introducción

¿Qué misterios aritméticos encierra $\sqrt{2}$, que ha causado desconcierto desde los Pitagóricos hasta el presente, particularmente en los estudiantes de cálculo?
¿Qué relación tiene $\sqrt{2}$ con otros conceptos matemáticos? Por sus propiedades especiales, en teoría de números, 2 es considerado la mitad de todos los primos.

1. ¿Qué significa, aritméticamente, que $\sqrt{2}$ sea irracional?
2. ¿Qué rutas de instrucción, usando un sistema computacional, pueden ayudar a los estudiantes a:
   - establecer conexiones artiméticas entre $\sqrt{2}$ y las soluciones de ciertas ecuaciones diofánticas,
   - relacionar diversos conceptos matemáticos?

Introducción

¿Qué misterios aritméticos encierra $\sqrt{2}$, que ha causado desconcierto desde los Pitagóricos hasta el presente, particularmente en los estudiantes de cálculo?
¿Qué relación tiene $\sqrt{2}$ con otros conceptos matemáticos? Por sus propiedades especiales, en teoría de números, 2 es considerado la mitad de todos los primos.

1. ¿Qué significa, aritméticamente, que $\sqrt{2}$ sea irracional?
2. ¿Qué rutas de instrucción, usando un sistema computacional, pueden ayudar a los estudiantes a:
   - establecer conexiones aritméticas entre $\sqrt{2}$ y las soluciones de ciertas ecuaciones diofánticas,
   - relacionar diversos conceptos matemáticos?

Introducción

¿Qué misterios aritméticos encierra $\sqrt{2}$, que ha causado desconcierto desde los Pitagóricos hasta el presente, particularmente en los estudiantes de cálculo?
¿Qué relación tiene $\sqrt{2}$ con otros conceptos matemáticos? Por sus propiedades especiales, en teoría de números, 2 es considerado la mitad de todos los primos.

1. ¿Qué significa, aritméticamente, que $\sqrt{2}$ sea irracional?
2. ¿Qué rutas de instrucción, usando un sistema computacional, pueden ayudar a los estudiantes a:
    1. establecer conexiones artiméticas entre $\sqrt{2}$ y las soluciones de ciertas ecuaciones diofánticas,
    2. relacionar diversos conceptos matemáticos?

Introducción

¿Qué misterios aritméticos encierra $\sqrt{2}$, que ha causado desconcierto desde los Pitagóricos hasta el presente, particularmente en los estudiantes de cálculo? ¿Qué relación tiene $\sqrt{2}$ con otros conceptos matemáticos? Por sus propiedades especiales, en teoría de números, 2 es considerado la mitad de todos los primos.

1. ¿Qué significa, aritméticamente, que $\sqrt{2}$ sea irracional?
2. ¿Qué rutas de instrucción, usando un sistema computacional, pueden ayudar a los estudiantes a:
    1. establecer conexiones artiméticas entre $\sqrt{2}$ y las soluciones de ciertas ecuaciones diofánticas,
    2. relacionar diversos conceptos matemáticos?

Introducción

¿Qué misterios aritméticos encierra $\sqrt{2}$, que ha causado desconcierto desde los Pitagóricos hasta el presente, particularmente en los estudiantes de cálculo?
¿Qué relación tiene $\sqrt{2}$ con otros conceptos matemáticos? Por sus propiedades especiales, en teoría de números, 2 es considerado la mitad de todos los primos.

1. ¿Qué significa, aritméticamente, que $\sqrt{2}$ sea irracional?
2. ¿Qué rutas de instrucción, usando un sistema computacional, pueden ayudar a los estudiantes a:
    1. establecer conexiones artiméticas entre $\sqrt{2}$ y las soluciones de ciertas ecuaciones diofánticas,
    2. relacionar diversos conceptos matemáticos?

Contenido

1. Irracionalidad de $\sqrt{2}$: enfoque clásico.
2. Irracionalidad de $\sqrt{2}$: una prueba geométrica.
3. Irracionalidad de $\sqrt{2}$: una alternativa didáctica con uso de tecnología.

Contenido

Contenido

1. Irracionalidad de $\sqrt{2}$: enfoque clásico.
2. Irracionalidad de $\sqrt{2}$: una prueba geométrica.
3. Irracionalidad de $\sqrt{2}$: una alternativa didáctica con uso de tecnología.

Contenido

Irracionalidad de $\sqrt{2}$: demostración clásica

Argumento por contradicción. Supongamos que $\sqrt{2}$ es racional, entonces existen enteros p y q, primos relativos, tales que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$.

Elevando al cuadrado y multiplicando por q se tiene: $p^2 = 2q^2$, $(*)$. De esto concluimos que p^2 es par, entonces p también lo es, es decir, $p = 2k$. Elevando al cuadrado en esta ecuación y sustituyendo en $(*)$ se concluye que $q^2 = 2k^2$. Argumentando igual que antes, q debe ser par, contradiciendo que p y q se eligieron primos relativos.

Irracionalidad de $\sqrt{2}$: demostración clásica

Argumento por contradicción. Supongamos que $\sqrt{2}$ es racional, entonces existen enteros p y q, primos relativos, tales que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$.

Elevando al cuadrado y multiplicando por q se tiene: $p^2 = 2q^2$, $(*)$. De esto concluimos que p^2 es par, entonces p también lo es, es decir, $p = 2k$. Elevando al cuadrado en esta ecuación y sustituyendo en $(*)$ se concluye que $q^2 = 2k^2$. Argumentando igual que antes, q debe ser par, contradiciendo que p y q se eligieron primos relativos.

Irracionalidad de $\sqrt{2}$: demostración clásica

Argumento por contradicción. Supongamos que $\sqrt{2}$ es racional, entonces existen enteros p y q, primos relativos, tales que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Elevando al cuadrado y multiplicando por q se tiene: $p^2 = 2q^2$, $(*)$. De esto concluimos que p^2 es par, entonces p también lo es, es decir, $p = 2k$. Elevando al cuadrado en esta ecuación y sustituyendo en $(*)$ se concluye que $q^2 = 2k^2$. Argumentando igual que antes, q debe ser par, contradiciendo que p y q se eligieron primos relativos.

Irracionalidad de $\sqrt{2}$: demostración geométrica (Apostol, 2000)

Figura: Dos triángulos rectángulos isósceles de lados enteros

Irracionalidad de $\sqrt{2}$: demostración geométrica (Apostol, 2000)

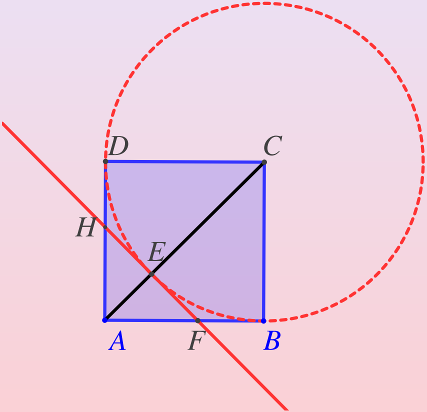

Figura: Dos triángulos rectángulos isósceles de lados enteros

Irracionalidad de $\sqrt{2}$: una alternativa didáctica con uso de tecnología.

Contexto del desarrollo de las tareas

1. Un curso de cálculo elemental de una licenciatura en matemáticas aplicadas en una universidad pública de México.
2. Una de las ideas centrales del curso fue, que los estudiantes desarrollaran tareas en donde tuvieran la oportunidad de reflexionar acerca de las propiedades de los diferentes sistemas numéricos, y su relación con el concepto de función.
3. Población estudiantil: 20 estudiantes, edad promedio 18 años.
   - Dos participantes, Leonardo e Issac con entrenamiento para olimpiadas de matemáticas nacionales.
   - Un participante invitado al curso, Inti (once años).
4. El curso se desarrolló en estrecha colaboración con otro, que tuvo por objetivo resolver problemas con el uso de tecnología.

Irracionalidad de $\sqrt{2}$: una alternativa didáctica con uso de tecnología.

Contexto del desarrollo de las tareas

1. Un curso de cálculo elemental de una licenciatura en matemáticas aplicadas en una universidad pública de México.
2. Una de las ideas centrales del curso fue, que los estudiantes desarrollaran tareas en donde tuvieran la oportunidad de reflexionar acerca de las propiedades de los diferentes sistemas numéricos, y su relación con el concepto de función.
3. Población estudiantil: 20 estudiantes, edad promedio 18 años.
   - Dos participantes, Leonardo e Issac con entrenamiento para olimpiadas de matemáticas nacionales.
   - Un participante invitado al curso, Inti (once años).
4. El curso se desarrolló en estrecha colaboración con otro, que tuvo por objetivo resolver problemas con el uso de tecnología.

Irracionalidad de $\sqrt{2}$: una alternativa didáctica con uso de tecnología.

Contexto del desarrollo de las tareas

1. Un curso de cálculo elemental de una licenciatura en matemáticas aplicadas en una universidad pública de México.
2. Una de las ideas centrales del curso fue, que los estudiantes desarrollaran tareas en donde tuvieran la oportunidad de reflexionar acerca de las propiedades de los diferentes sistemas numéricos, y su relación con el concepto de función.
3. Población estudiantil: 20 estudiantes, edad promedio 18 años.
   1. Dos participantes, Leonardo e Issac con entrenamiento para olimpiadas de matemáticas nacionales.
   2. Un participante invitado al curso, Inti (once años).
4. El curso se desarrolló en estrecha colaboración con otro, que tuvo por objetivo resolver problemas con el uso de tecnología.

Irracionalidad de $\sqrt{2}$: una alternativa didáctica con uso de tecnología.

Contexto del desarrollo de las tareas

1. Un curso de cálculo elemental de una licenciatura en matemáticas aplicadas en una universidad pública de México.
2. Una de las ideas centrales del curso fue, que los estudiantes desarrollaran tareas en donde tuvieran la oportunidad de reflexionar acerca de las propiedades de los diferentes sistemas numéricos, y su relación con el concepto de función.
3. Población estudiantil: 20 estudiantes, edad promedio 18 años.
    1. Dos participantes, Leonardo e Issac con entrenamiento para olimpiadas de matemáticas nacionales.
    2. Un participante invitado al curso, Inti (once años).
4. El curso se desarrolló en estrecha colaboración con otro, que tuvo por objetivo resolver problemas con el uso de tecnología.

Irracionalidad de $\sqrt{2}$: una alternativa didáctica con uso de tecnología.

Contexto del desarrollo de las tareas

1. Un curso de cálculo elemental de una licenciatura en matemáticas aplicadas en una universidad pública de México.
2. Una de las ideas centrales del curso fue, que los estudiantes desarrollaran tareas en donde tuvieran la oportunidad de reflexionar acerca de las propiedades de los diferentes sistemas numéricos, y su relación con el concepto de función.
3. Población estudiantil: 20 estudiantes, edad promedio 18 años.
   1. Dos participantes, Leonardo e Issac con entrenamiento para olimpiadas de matemáticas nacionales.
   2. Un participante invitado al curso, Inti (once años).
4. El curso se desarrolló en estrecha colaboración con otro, que tuvo por objetivo resolver problemas con el uso de tecnología.

Irracionalidad de $\sqrt{2}$: una alternativa didáctica con uso de tecnología.

Contexto del desarrollo de las tareas

1. Un curso de cálculo elemental de una licenciatura en matemáticas aplicadas en una universidad pública de México.
2. Una de las ideas centrales del curso fue, que los estudiantes desarrollaran tareas en donde tuvieran la oportunidad de reflexionar acerca de las propiedades de los diferentes sistemas numéricos, y su relación con el concepto de función.
3. Población estudiantil: 20 estudiantes, edad promedio 18 años.
    1. Dos participantes, Leonardo e Issac con entrenamiento para olimpiadas de matemáticas nacionales.
    2. Un participante invitado al curso, Inti (once años).
4. El curso se desarrolló en estrecha colaboración con otro, que tuvo por objetivo resolver problemas con el uso de tecnología.

Irracionalidad de $\sqrt{2}$: una alternativa didáctica con uso de tecnología.

Contexto del desarrollo de las tareas

1. Un curso de cálculo elemental de una licenciatura en matemáticas aplicadas en una universidad pública de México.
2. Una de las ideas centrales del curso fue, que los estudiantes desarrollaran tareas en donde tuvieran la oportunidad de reflexionar acerca de las propiedades de los diferentes sistemas numéricos, y su relación con el concepto de función.
3. Población estudiantil: 20 estudiantes, edad promedio 18 años.
    1. Dos participantes, Leonardo e Issac con entrenamiento para olimpiadas de matemáticas nacionales.
    2. Un participante invitado al curso, Inti (once años).
4. El curso se desarrolló en estrecha colaboración con otro, que tuvo por objetivo resolver problemas con el uso de tecnología.

Primer Episodio: Exploración y primeras estrategias de solución de las tareas

1. Construir una tabla con una hoja de cálculo, por ejemplo Excel, en la que se muestren los enteros positivos, sus cuadrados y su doble. Se pidió a los estudiantes, con el uso de la tabla, verificar que la ecuación $x^2 = 2y^2$ no tiene soluciones enteras distintas de cero.
2. Observación de Inti. "hay números en las columnas segunda y tercera que son casi iguales, por ejemplo 1 y 2, 8 y 9, 49 y 50, 289 y 288"
3. A partir de la Observación de Inti, la discusión tomó una ruta no prevista por el profesor.
4. ¿Qué significa que "hay números en las columnas segunda y tercera que son casi iguales"? Después de una discusión hubo consenso y se llegó a: la ecuación $x^2 - 2y^2 = \pm 1$ tiene soluciones enteras diferentes de cero: $(1, 1)$, $(3, 2)$, $(7, 5)$, $(17, 12)$.

Primer Episodio: Exploración y primeras estrategias de solución de las tareas

1. Construir una tabla con una hoja de cálculo, por ejemplo Excel, en la que se muestren los enteros positivos, sus cuadrados y su doble. Se pidió a los estudiantes, con el uso de la tabla, verificar que la ecuación $x^2 = 2y^2$ no tiene soluciones enteras distintas de cero.
2. Observación de Inti. "hay números en las colunmas segunda y tercera que son casi iguales, por ejemplo **1** y **2**; **8** y **9**; **49** y **50**; **299** y **288**"
3. A partir de la Observación de Inti, la discusión tomó una ruta no prevista por el profesor.
4. ¿Qué significa que "hay números en las colunmas segunda y tercera que son casi iguales"? Después de una discusión hubo consenso y se llegó a: la ecuación $x^2 - 2y^2 = \pm 1$ tiene soluciones enteras diferentes de cero: $(1, 1)$, $(3, 2)$, $(7, 5)$, $(17, 12)$.

Primer Episodio: Exploración y primeras estrategias de solución de las tareas

1. Construir una tabla con una hoja de cálculo, por ejemplo Excel, en la que se muestren los enteros positivos, sus cuadrados y su doble. Se pidió a los estudiantes, con el uso de la tabla, verificar que la ecuación $x^2 = 2y^2$ no tiene soluciones enteras distintas de cero.
2. Observación de Inti. “hay números en las colunmas segunda y tercera que son casi iguales, por ejemplo **1** y **2**; **8** y **9**; **49** y **50**; **299** y **288**”
3. A partir de la Observación de Inti, la discusión tomó una ruta no prevista por el profesor.
4. ¿Qué significa que “hay números en las colunmas segunda y tercera que son casi iguales”? Después de una discusión hubo consenso y se llegó a: la ecuación $x^2 - 2y^2 = \pm 1$ tiene soluciones enteras diferentes de cero: $(1,1),\ (3,2),\ (7,5),\ (17,12)$.

Primer Episodio: Exploración y primeras estrategias de solución de las tareas

1. Construir una tabla con una hoja de cálculo, por ejemplo Excel, en la que se muestren los enteros positivos, sus cuadrados y su doble. Se pidió a los estudiantes, con el uso de la tabla, verificar que la ecuación $x^2 = 2y^2$ no tiene soluciones enteras distintas de cero.
2. Observación de Inti. “hay números en las colunmas segunda y tercera que son casi iguales, por ejemplo **1** y **2**; **8** y **9**; **49** y **50**; **299** y **288**”
3. A partir de la Observación de Inti, la discusión tomó una ruta no prevista por el profesor.
4. ¿Qué significa que “hay números en las colunmas segunda y tercera que son casi iguales”? Después de una discusión hubo consenso y se llegó a: la ecuación $x^2 - 2y^2 = \pm 1$ tiene soluciones enteras diferentes de cero: $(1,1),\ (3,2),\ (7,5),\ (17,12)$.

Primer Episodio: Exploración y primeras estrategias de solución de las tareas

1. Construir una tabla con una hoja de cálculo, por ejemplo Excel, en la que se muestren los enteros positivos, sus cuadrados y su doble. Se pidió a los estudiantes, con el uso de la tabla, verificar que la ecuación $x^2 = 2y^2$ no tiene soluciones enteras distintas de cero.
2. Observación de Inti. "hay números en las colunmas segunda y tercera que son casi iguales, por ejemplo **1** y **2**; **8** y **9**; **49** y **50**; **299** y **288**"
3. A partir de la Observación de Inti, la discusión tomó una ruta no prevista por el profesor.
4. ¿Qué significa que "hay números en las colunmas segunda y tercera que son casi iguales"? Después de una discusión hubo consenso y se llegó a: la ecuación $x^2 - 2y^2 = \pm 1$ tiene soluciones enteras diferentes de cero: $(1,1),\ (3,2),\ (7,5),\ (17,12)$.

Continuación: primer episodio

1. Algunos estudiantes notaron que $x^2 - 2y^2 = (x + y\sqrt{2})(x - y\sqrt{2}) = \pm 1$ y preguntaron, "¿cómo se pueden obtener más soluciones de $x^2 - 2y^2 = \pm 1$?"
2. El profesor sugirió a los estudiantes usar un CAS para calcular $(1 + \sqrt{2})^n$, para varios valores de n y observar los coeficientes en la expansión y su relación con las soluciones encontradas.
3. Se pidió a los estudiantes justificar por qué [illegible]
4. Los estudiantes lograron justificar que (x_n, y_n) es solución de $x^2 - 2y^2 = \pm 1$, de manera más precisa, justificaron que (x_n, y_n) es solución de $x^2 - 2y^2 = 1$, exactamente cuando n es par.
5. También observaron que $\dfrac{x_n}{y_n} \to \sqrt{2}$ cuando n crece.

Continuación: primer episodio

1. Algunos estudiantes notaron que $x^2 - 2y^2 = (x + y\sqrt{2})(x - y\sqrt{2}) = \pm 1$ y preguntaron, "¿cómo se pueden obtener más soluciones de $x^2 - 2y^2 = \pm 1$?"
2. El profesor sugirió a los estudiantes usar un CAS para calcular $(1 + \sqrt{2})^n$, para varios valores de n y observar los coeficientes en la expansión y su relación con las soluciones encontradas.
3. Se pidió a los estudiantes justificar por qué $(1 + \sqrt{2})^n = x_n + y_n\sqrt{2}$, con $x_n,\ y_n$ enteros positivos. También se pidió justificar que $(1 - \sqrt{2})^n = x_n - y_n\sqrt{2}$.
4. Los estudiantes lograron justificar que (x_n, y_n) es solución de $x^2 - 2y^2 = \pm 1$, de manera más precisa, justificaron que (x_n, y_n) es solución de $x^2 - 2y^2 = 1$, exactamente cuando n es par.
5. También observaron que $\frac{x_n}{y_n} \to \sqrt{2}$ cuando n crece.

Continuación: primer episodio

1. Algunos estudiantes notaron que $x^2 - 2y^2 = (x + y\sqrt{2})(x - y\sqrt{2}) = \pm 1$ y preguntaron, "¿cómo se pueden obtener más soluciones de $x^2 - 2y^2 = \pm 1$?"
2. El profesor sugirió a los estudiantes usar un CAS para calcular $(1 + \sqrt{2})^n$, para varios valores de n y observar los coeficientes en la expansión y su relación con las soluciones encontradas.
3. Se pidió a los estudiantes justificar por qué $(1 + \sqrt{2})^n = x_n + y_n\sqrt{2}$, con $x_n, \ y_n$ enteros positivos. También se pidió justificar que $(1 - \sqrt{2})^n = x_n - y_n\sqrt{2}$.
4. Los estudiantes lograron justificar que (x_n, y_n) es solución de $x^2 - 2y^2 = \pm 1$, de manera más precisa, justificaron que (x_n, y_n) es solución de $x^2 - 2y^2 = 1$, exactamente cuando n es par.
5. También observaron que $\dfrac{x_n}{y_n} \to \sqrt{2}$ cuando n crece.

Continuación: primer episodio

1. Algunos estudiantes notaron que $x^2 - 2y^2 = (x + y\sqrt{2})(x - y\sqrt{2}) = \pm 1$ y preguntaron, "¿cómo se pueden obtener más soluciones de $x^2 - 2y^2 = \pm 1$?"
2. El profesor sugirió a los estudiantes usar un CAS para calcular $(1 + \sqrt{2})^n$, para varios valores de n y observar los coeficientes en la expansión y su relación con las soluciones encontradas.
3. Se pidió a los estudiantes justificar por qué $(1 + \sqrt{2})^n = x_n + y_n\sqrt{2}$, con $x_n,\ y_n$ enteros positivos. También se pidió justificar que $(1 - \sqrt{2})^n = x_n - y_n\sqrt{2}$.
4. Los estudiantes lograron justificar que (x_n, y_n) es solución de $x^2 - 2y^2 = \pm 1$, de manera más precisa, justificaron que (x_n, y_n) es solución de $x^2 - 2y^2 = 1$, exactamente cuando n es par.
5. También observaron que $\frac{x_n}{y_n} \to \sqrt{2}$ cuando n crece.

Continuación: primer episodio

1. Algunos estudiantes notaron que $x^2 - 2y^2 = (x + y\sqrt{2})(x - y\sqrt{2}) = \pm 1$ y preguntaron, "¿cómo se pueden obtener más soluciones de $x^2 - 2y^2 = \pm 1$?"
2. El profesor sugirió a los estudiantes usar un CAS para calcular $(1 + \sqrt{2})^n$, para varios valores de n y observar los coeficientes en la expansión y su relación con las soluciones encontradas.
3. Se pidió a los estudiantes justificar por qué $(1 + \sqrt{2})^n = x_n + y_n\sqrt{2}$, con $x_n,\ y_n$ enteros positivos. También se pidió justificar que $(1 - \sqrt{2})^n = x_n - y_n\sqrt{2}$.
4. Los estudiantes lograron justificar que (x_n, y_n) es solución de $x^2 - 2y^2 = \pm 1$, de manera más precisa, justificaron que (x_n, y_n) es solución de $x^2 - 2y^2 = 1$, exactamente cuando n es par.
5. También observaron que $\frac{x_n}{y_n} \to \sqrt{2}$ cuando n crece.

Continuación: primer episodio

1. Algunos estudiantes notaron que $x^2 - 2y^2 = (x + y\sqrt{2})(x - y\sqrt{2}) = \pm 1$ y preguntaron, "¿cómo se pueden obtener más soluciones de $x^2 - 2y^2 = \pm 1$?"
2. El profesor sugirió a los estudiantes usar un CAS para calcular $(1 + \sqrt{2})^n$, para varios valores de n y observar los coeficientes en la expansión y su relación con las soluciones encontradas.
3. Se pidió a los estudiantes justificar por qué $(1 + \sqrt{2})^n = x_n + y_n\sqrt{2}$, con $x_n, \ y_n$ enteros positivos. También se pidió justificar que $(1 - \sqrt{2})^n = x_n - y_n\sqrt{2}$.
4. Los estudiantes lograron justificar que (x_n, y_n) es solución de $x^2 - 2y^2 = \pm 1$, de manera más precisa, justificaron que (x_n, y_n) es solución de $x^2 - 2y^2 = 1$, exactamente cuando n es par.
5. También observaron que $\dfrac{x_n}{y_n} \to \sqrt{2}$ cuando n crece.

Segundo episodio:Presentación de argumentos formales

1. En esta etapa se pidió probar que $x^2 = 2y^2$ no tiene soluciones diferentes de cero.
2. Después de aproximadamente 10 minutos, Leonardo preguntó: “¿puedo exponer una idea para ver si funciona?”. El profesor pidió a todos escuchar con atención. Leonardo inició con otra pregunta: “¿puedo usar que los números enteros se representan como producto de primos?”
3. **Argumento de Leonardo:** *Si* $x = p_1 \cdots p_k$, entonces $x^2 = p_1 \cdots p_k p_1 \cdots p_k$, es decir, el cuadrado de todo entero tiene un número par de factores primos; como 2 es primo, entonces $2y^2$ tiene un número impar de factores primos, por lo que no se puede que $x^2 = 2y^2$.
4. Unos minutos después, Leonardo dijo que su argumento “funciona” para cualquier primo p.

Segundo episodio:Presentación de argumentos formales

1. En esta etapa se pidió probar que $x^2 = 2y^2$ no tiene soluciones diferentes de cero.
2. Después de aproximadamente 10 minutos, Leonardo preguntó: "¿puedo exponer una idea para ver si funciona?". El profesor pidió a todos escuchar con atención. Leonardo inició con otra pregunta: "¿puedo usar que los números enteros se representan como producto de primos?"
3. **Argumento de Leonardo:** Si $x = p_1 \cdots p_k$, entonces $x^2 = p_1 \cdots p_k p_1 \cdots p_k$, es decir, el cuadrado de todo entero tiene un número par de factores primos; como 2 es primo, entonces $2y^2$ tiene un número impar de factores primos, por lo que no se puede que $x^2 = 2y^2$.
4. Unos minutos después, Leonardo dijo que su argumento "funciona" para cualquier primo p.

Segundo episodio:Presentación de argumentos formales

1. En esta etapa se pidió probar que $x^2 = 2y^2$ no tiene soluciones diferentes de cero.
2. Después de aproximadamente 10 minutos, Leonardo preguntó: "¿puedo exponer una idea para ver si funciona?". El profesor pidió a todos escuchar con atención. Leonardo inició con otra pregunta: "¿puedo usar que los números enteros se representan como producto de primos?"
3. **Argumento de Leonardo:** Si $x = p_1 \cdots p_k$, entonces $x^2 = p_1 \cdots p_k p_1 \cdots p_k$, es decir, el cuadrado de todo entero tiene un número par de factores primos; como 2 es primo, entonces $2y^2$ tiene un número impar de factores primos, por lo que no se puede que $x^2 = 2y^2$.
4. Unos minutos después, Leonardo dijo que su argumento "funciona" para cualquier primo p.

Segundo episodio:Presentación de argumentos formales

1. En esta etapa se pidió probar que $x^2 = 2y^2$ no tiene soluciones diferentes de cero.
2. Después de aproximadamente 10 minutos, Leonardo preguntó: "¿puedo exponer una idea para ver si funciona?". El profesor pidió a todos escuchar con atención. Leonardo inició con otra pregunta: "¿puedo usar que los números enteros se representan como producto de primos?"
3. **Argumento de Leonardo:** Si $x = p_1 \cdots p_k$, entonces $x^2 = p_1 \cdots p_k p_1 \cdots p_k$, es decir, el cuadrado de todo entero tiene un número par de factores primos; como 2 es primo, entonces $2y^2$ tiene un número impar de factores primos, por lo que no se puede que $x^2 = 2y^2$.
4. Unos minutos después, Leonardo dijo que su argumento "funciona" para cualquier primo p.

Segundo episodio:Presentación de argumentos formales

1. En esta etapa se pidió probar que $x^2 = 2y^2$ no tiene soluciones diferentes de cero.
2. Después de aproximadamente 10 minutos, Leonardo preguntó: "¿puedo exponer una idea para ver si funciona?". El profesor pidió a todos escuchar con atención. Leonardo inició con otra pregunta: "¿puedo usar que los números enteros se representan como producto de primos?"
3. **Argumento de Leonardo:** Si $x = p_1 \cdots p_k$, entonces $x^2 = p_1 \cdots p_k p_1 \cdots p_k$, es decir, el cuadrado de todo entero tiene un número par de factores primos; como 2 es primo, entonces $2y^2$ tiene un número impar de factores primos, por lo que no se puede que $x^2 = 2y^2$.
4. Unos minutos después, Leonardo dijo que su argumento "funciona" para cualquier primo p.

Tercer episodio: generalización y extensión de resultados

1. En la discución surgieron preguntas como:
   - Para un primo dado p, ¿cómo encontrar soluciones de la ecuación $x^2 - py^2 = \pm 1$ (Ecuación de Pell).
   - ¿Para cuales primos p, la ecuación $x^2 - py^2 = -1$ tiene solución.
   - Si p se cambia por un entero d, libre de cuadrados, ¿es $\sqrt{d}$

Tercer episodio: generalización y extensión de resultados

1. En la discución surgieron preguntas como:
    1. Para un primo dado p, ¿cómo encontrar soluciones de la ecuación $x^2 - py^2 = \pm 1$ (Ecuación de Pell).
    2. ¿Para cuales primos p, la ecuación $x^2 - py^2 = -1$ tiene solución.
    3. Si p se cambia por un entero d, libre de cuadrado, ¿es $\sqrt{d}$ irracional?
2. El papel de SAGE (Software for Algebra and Geometry Experimentation), en la respuesta a la pregunta 1.

Tercer episodio: generalización y extensión de resultados

1. En la discución surgieron preguntas como:
   1. Para un primo dado p, ¿cómo encontrar soluciones de la ecuación $x^2 - py^2 = \pm 1$ (Ecuación de Pell).
   2. ¿Para cuales primos p, la ecuación $x^2 - py^2 = -1$ tiene solución.
   3. Si p se cambia por un entero d, libre de cuadrado, ¿es $\sqrt{d}$ irracional?
2. El papel de SAGE (Software for Algebra and Geometry Experimentation), en la respuesta a la pregunta 1.

Tercer episodio: generalización y extensión de resultados

1. En la discución surgieron preguntas como:
    1. Para un primo dado p, ¿cómo encontrar soluciones de la ecuación $x^2 - py^2 = \pm 1$ (Ecuación de Pell).
    2. ¿Para cuales primos p, la ecuación $x^2 - py^2 = -1$ tiene solución.
    3. Si p se cambia por un entero d, libre de cuadrado, ¿es $\sqrt{d}$ irracional?
2. El papel de SAGE (Software for Algebra and Geometry Experimentation), en la respuesta a la pregunta 1.

Tercer episodio: generalización y extensión de resultados

1. En la discución surgieron preguntas como:
   1. Para un primo dado p, ¿cómo encontrar soluciones de la ecuación $x^2 - py^2 = \pm 1$ (Ecuación de Pell).
   2. ¿Para cuales primos p, la ecuación $x^2 - py^2 = -1$ tiene solución.
   3. Si p se cambia por un entero d, libre de cuadrado, ¿es $\sqrt{d}$ irracional?
2. El papel de SAGE (Software for Algebra and Geometry Experimentation), en la respuesta a la pregunta 1.

Tercer episodio: generalización y extensión de resultados

1. En la discución surgieron preguntas como:
   1. Para un primo dado p, ¿cómo encontrar soluciones de la ecuación $x^2 - py^2 = \pm 1$ (Ecuación de Pell).
   2. ¿Para cuales primos p, la ecuación $x^2 - py^2 = -1$ tiene solución.
   3. Si p se cambia por un entero d, libre de cuadrado, ¿es $\sqrt{d}$ irracional?
2. El papel de SAGE (Software for Algebra and Geometry Experimentation), en la respuesta a la pregunta 1.

Conclusiones

1. Las características de un sistema computacional, brindan a los estudiantes la oportunidad de explorar diferentes aspectos del pensamiento matemático y posibles generalizaciones de un problema.
2. El uso de un software, al resolver casos particulares y a partir de esto formular conjeturas, permite a los estudiantes reconocer la necesidad de utilizar diferentes tipos de argumentos, incluyendo los formales.
3. El uso sistemático de un software, al resolver tareas de aprendizaje, puede ayudar a los estudiantes a establecer conexiones entre diferentes conceptos matemáticos. (irracionalidad de $\sqrt{7}$, aproximaciones, soluciones de ecuaciones diofánticas, entre otros).
4. La creatividad matemática en el salón de clase (Leonardo e Inti), debe ser estimulada y estudiada sistemáticamente (Sriraman, 2004, p. 32).

Conclusiones

1. Las características de un sistema computacional, brindan a los estudiantes la oportunidad de explorar diferentes aspectos del pensamiento matemático y posibles generalizaciones de un problema.
2. El uso de un software, al resolver casos particulares y a partir de esto formular conjeturas, permite a los estudiantes reconocer la necesidad de utilizar diferentes tipos de argumentos, incluyendo los formales.
3. El uso sistemático de un software, al resolver tareas de aprendizaje, puede ayudar a los estudiantes a establecer conexiones entre diferentes conceptos matemáticos. (irracionalidad de $\sqrt{d}$, aproximaciones, soluciones de ecuaciones diofánticas, entre otros).
4. La creatividad matemática en el salón de clase (Leonardo e Inti), debe ser estimulada y estudiada sistemáticamente (Sriraman, 2004, p. 32).

Conclusiones

1. Las características de un sistema computacional, brindan a los estudiantes la oportunidad de explorar diferentes aspectos del pensamiento matemático y posibles generalizaciones de un problema.
2. El uso de un software, al resolver casos particulares y a partir de esto formular conjeturas, permite a los estudiantes reconocer la necesidad de utilizar diferentes tipos de argumentos, incluyendo los formales.
3. El uso sistemático de un software, al resolver tareas de aprendizaje, puede ayudar a los estudiantes a establecer conexiones entre diferentes conceptos matemáticos. (irracionalidad de $\sqrt{d}$, aproximaciones, soluciones de ecuaciones diofánticas, entre otros).
4. La creatividad matemática en el salón de clase (Leonardo e Inti), debe ser estimulada y estudiada sistemáticamente (Sriraman, 2004, p. 32).

Conclusiones

1. Las características de un sistema computacional, brindan a los estudiantes la oportunidad de explorar diferentes aspectos del pensamiento matemático y posibles generalizaciones de un problema.
2. El uso de un software, al resolver casos particulares y a partir de esto formular conjeturas, permite a los estudiantes reconocer la necesidad de utilizar diferentes tipos de argumentos, incluyendo los formales.
3. El uso sistemático de un software, al resolver tareas de aprendizaje, puede ayudar a los estudiantes a establecer conexiones entre diferentes conceptos matemáticos. (irracionalidad de $\sqrt{d}$, aproximaciones, soluciones de ecuaciones diofánticas, entre otros).
4. La creatividad matemática en el salón de clase (Leonardo e Inti), debe ser estimulada y estudiada sistemáticamente (Sriraman, 2004, p. 32).

Conclusiones

1. Las características de un sistema computacional, brindan a los estudiantes la oportunidad de explorar diferentes aspectos del pensamiento matemático y posibles generalizaciones de un problema.
2. El uso de un software, al resolver casos particulares y a partir de esto formular conjeturas, permite a los estudiantes reconocer la necesidad de utilizar diferentes tipos de argumentos, incluyendo los formales.
3. El uso sistemático de un software, al resolver tareas de aprendizaje, puede ayudar a los estudiantes a establecer conexiones entre diferentes conceptos matemáticos. (irracionalidad de $\sqrt{d}$, aproximaciones, soluciones de ecuaciones diofánticas, entre otros).
4. La creatividad matemática en el salón de clase (Leonardo e Inti), debe ser estimulada y estudiada sistemáticamente (Sriraman, 2004, p. 32).

Referencias

Apostol, T. (2000). Irrationality of the Square Root of Two: A Geometric Proof. The Amer. Math Monthly, Vol 107, No. 9 (Nov., 2000) pp 841-842.

Edward, H. M. (1977). Fermat's Last Theorem: A Generic Introduction to Algebraic Number Theory. New York: Springer-Verlag.

Hiebert, et al. (1997). Making sense: teaching and learning mathematics with understanding. Portsmouth, NH: Heinemann.

Sriraman, B. (2004) The Characteristics of Mathematical Creativity. The Mathematics Educator 14, **1**, 19-34.

Stein W. (2006, february). Sage? Recuperado de: http://www.sagemath.org/talks/2006-02-sage_days/current.pdf el 13 de noviembre de 2009.

Referencias

- Apostol, T. (2000). Irrationality of the Square Root of Two: A Geometric Proof. The Amer. Math Monthly, Vol 107, No. 9 (Nov., 2000) pp 841-842.
- Edward, H. M. (1977). Fermat's Last Theorem: A Generic Introduction to Algebraic Number Theory. New York: Springer-Verlag.
- Hiebert, et al. (1997). Making sense: teaching and learning mathematics with understanding. Portsmouth, NH: Heinemann.
- Sriraman, B. (2004) The Characteristics of Mathematical Creativity. The Mathematics Educator 14, **1**, 19-34.
- Stein W. (2006, february). Sage? Recuperado de: `http://www.sagemath.org/talks/2006-02-sage_days/current.pdf` el 13 de noviembre de 2009.

◂ inicio ◂ intr