UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO
Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
Institute of Basic Sciences and Engineering
Área Académica de Ingeniería y Arquitectura.
Engineering and Architecture Department

Licenciatura en Ingeniería Industrial.

Asignatura: Logística y Cadena de Suministros.

Tema: Problemario de punto de equilibrio y crecimiento de la capacidad.

Profesor(es):
Martínez Rojo Edgar.
Montufar Benítez Marco Antonio.

Periodo de elaboración: MAYO/2019.

Nombre del contacto: Martínez Rojo Edgar, Montufar Benítez Marco Antonio
Teléfono: 771-199-47-87,771 7172000 ext. 4011
Correo electrónico: edgar_martinez@uaeh.edu.mx, montufar@uaeh.edu.mx
Material Elaborado en la Academia de Ingeniería Industrial

Introducción

La resolución de problemas es reconocida como una técnica didáctica que ayuda a fomentar el aprendizaje, en ella los alumnos se involucran en la solución de situaciones problemática reales o inventadas. Este trabajo, presenta en particular algunos problemas comúnmente presentes en la toma de decisiones de cualquier empresa, como lo es decidir si un producto es más económico fabricarlo que comprarlo.
Otra situación importante en el ámbito empresarial es, cada cuándo hacer una expansión de la capacidad y de qué tamaño.

Objetivos

1. Entender, comprender y aplicar las fórmulas para la resolución de problemas de punto de equilibrio.
2. Entender, comprender y aplicar las fórmulas para la resolución de problemas de expansión de capacidad.
3. Fomentar en el alumno la toma de decisiones basadas en modelos matemáticos.
4. Hacer uso de algún paquete informático para resolver dichos problemas

Desarrollo

La toma de decisiones empresariales, apoyándose en modelos matemáticos es ampliamente reconocida, ya que es posible representar en un lenguaje universal la problemática presente en una organización. También, nos facilita la experimentación de soluciones, ya que, si estas las hiciéramos con el sistema real, serían costosas y consumidoras de tiempo, además de que irrumpirían con el funcionamiento normal de la empresa. Dichos modelos matemáticos siempre serán una aproximación de la realidad y estarán regidos por lo supuestos llevados a cabo y por las limitaciones mismas del modelo.

A continuación, se describen dos modelos típicos de las situaciones problemáticas antes mencionas que estamos interesados en resolver:

Nombre del contacto: Martínez Rojo Edgar, Montufar Benítez Marco Antonio
Teléfono: 771-199-47-87,771 7172000 ext. 4011
Correo electrónico: edgar_martinez@uaeh.edu.mx, montufar@uaeh.edu.mx
Material Elaborado en la Academia de Ingeniería Industrial

HACER O COMPRAR:

Este modelo nos ayuda a decidir si una compañía deberá fabricar sus productos o si le es conveniente comprarlos a un tercero.

La compañía puede comprar el producto de una fuente externa a C_1 por unidad, pero puede producirlo internamente por un costo por unidad menor, $C_2 < C_1$. Sin embargo, para que la compañía pueda producirlo deberá realizar una inversión $\$K$.

Por lo que la expresión de costo por X unidades producidas está dado por la ecuación 1:

$$K + C_2\,x \tag{1}$$

Al graficar (ver figura 1) los costos totales tanto de la producción interna como de la compra externa, nos permite encontrar el punto de equilibrio en el que se igualan los costos.

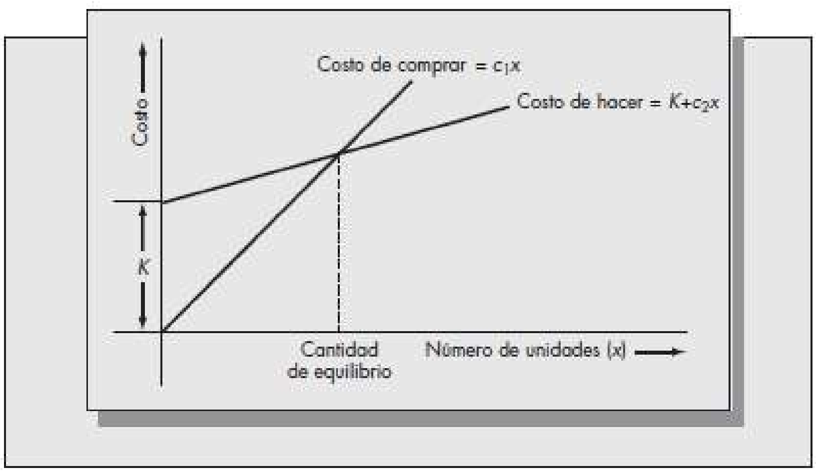

Fig. 1 Gráfica de punto de equilibrio de costos.

Por tal motivo, en el punto de equilibrio se pueden igualar los costos quedando la siguiente expresión:

$$K + C_2\,x = C_1\,x \tag{2}$$

Nombre del contacto: Martínez Rojo Edgar, Montufar Benítez Marco Antonio
Teléfono: 771-199-47-87,771 7172000 ext. 4011
Correo electrónico: edgar_martinez@uaeh.edu.mx, montufar@uaeh.edu.mx
Material Elaborado en la Academia de Ingeniería Industrial

UN PROBLEMA PROTOTIPO DE EXPANSIÓN DE LA CAPACIDAD: POLÍTICA DINÁMICA DE EXPANSIÓN DE LA CAPACIDAD.

Las decisiones de capacidad deben realizarse en un ambiente dinámico. Una compañía que basa su estrategia a largo plazo en la maximización de la utilización de la capacidad corre el riesgo de incurrir en faltantes durante periodos con demanda mayor a la prevista. Una alternativa para incrementar la capacidad consiste en producir para inventario y permitir que este absorba las fluctuaciones de la demanda.

De la figura 2 podemos ver que:

a) Si la capacidad va por delante de la demanda, significa que la compañía mantiene un excedente de la capacidad en exceso en todo momento.

b) Si la capacidad va por detrás de la demanda, significa que la capacidad existente se utiliza plenamente en todo momento.

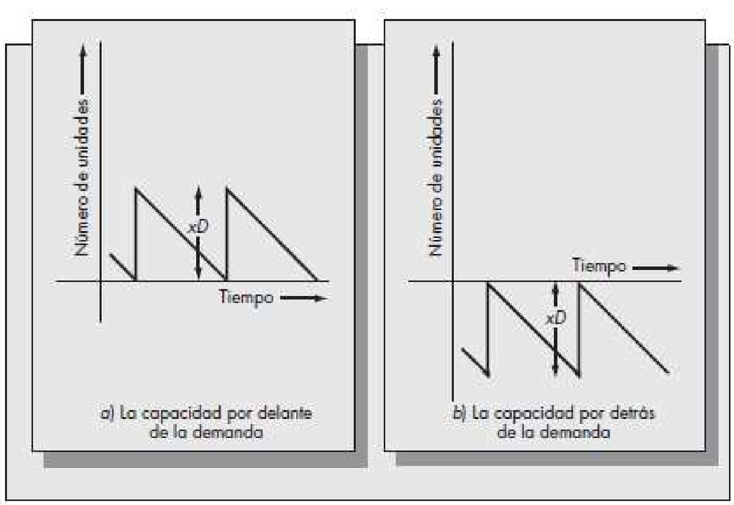

Fig. 2 Gráficos: a) Excedente de la capacidad, b) Escasez de la capacidad.

Nombre del contacto: Martínez Rojo Edgar, Montufar Benítez Marco Antonio
Teléfono: 771-199-47-87,771 7172000 ext. 4011
Correo electrónico: edgar_martinez@uaeh.edu.mx, montufar@uaeh.edu.mx
Material Elaborado en la Academia de Ingeniería Industrial

La experiencia ha demostrado que una representación del costo de construir una instalación de capacidad *y*, está dada por f*(y),* y que explica las economías de escala para plantas en diferentes industrias es:

$$f(y) = ky^a \tag{3}$$

Donde:

f(y)= costo de planta.

k= constante de proporcionalidad.

y= capacidad de planta.

a= la razón entre los costos incrementales y los costos promedio de una unidad de capacidad de planta.

La siguiente proporción sirve para entender que duplicar el tamaño de la planta requiere un incremento inferior al doble en los costos de construcción, siempre y cuando $a < 1$

$$\frac{f(2y)}{f(y)} = \frac{k(2y)^a}{k(y)^a} = 2^a \tag{4}$$

Recomendamos al lector revisar la referencia bibliográfica cuya información se da al final de este documento, para comprender mejor el modelo matemático subyacente.

A continuación, se presentan 2 ecuaciones para poder determinar el valor de “x”, que representa el tiempo óptimo entre aumentos de capacidad. Es posible demostrar que dicho valor satisface la relación siguiente:

$$\frac{rx}{e^{rx} - 1} = a \tag{5}$$

Donde:

r= tasa de descuento de los costos.

x= tiempo óptimo entre aumentos de capacidad de la planta.

Nombre del contacto: Martínez Rojo Edgar, Montufar Benítez Marco Antonio
Teléfono: 771-199-47-87,771 7172000 ext. 4011
Correo electrónico: edgar_martinez@uaeh.edu.mx, montufar@uaeh.edu.mx
Material Elaborado en la Academia de Ingeniería Industrial

Haciendo *u* = *r x* , se obtiene:

$$f(u) = \frac{u}{e^u - 1} \tag{6}$$

Dicha función podrá graficarse (ver Fig. 3) para determinar el valor de u, y posteriormente el de x, con un simple despeje.

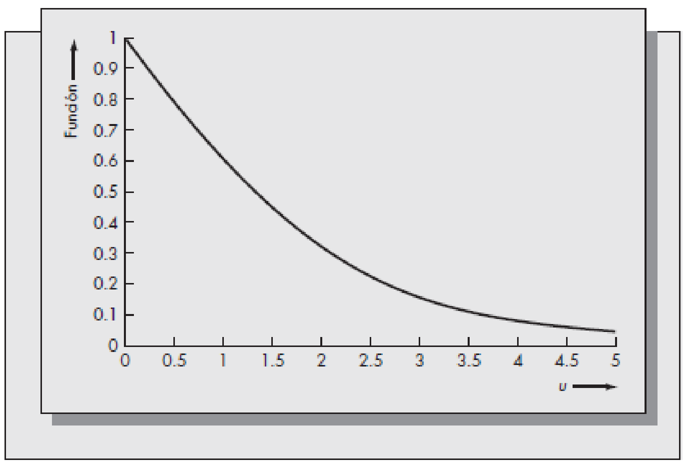

Fig. 3 gráfica de función: f(u)=u/((e^u)-1).

Una vez conocidos dichos métodos de trabajo, se realizan ejercicios para que el alumno comprenda la metodología para la solución de problemas con estas características.

Nombre del contacto: Martínez Rojo Edgar, Montufar Benítez Marco Antonio
Teléfono: 771-199-47-87,771 7172000 ext. 4011
Correo electrónico: edgar_martinez@uaeh.edu.mx, montufar@uaeh.edu.mx
Material Elaborado en la Academia de Ingeniería Industrial

Actividades (problemas).

1. Una ensambladora de vehículos KIA ubicada en Cd. Sahagún, adquiere llantas a un fabricante que se encuentra ubicado en el norte del país. Las llantas actualmente cuestan $ 200.00 cada una, sin embrago la compañía pretende aumentar el precio en un 30%. Por tal motivo la ensambladora desea producir las llantas ellos mismos. KIA tendrá que agregar capacidad a sus instalaciones a un costo de $ 7, 000,000.00 de pesos. Según los cálculos del personal de producción se determina el costo de fabricación en $ 180.00. La empresa actualmente vende 10 000 vehículos por año. (Asumir que el vehículo se entrega con 5 llantas)

   a) Con la tasa actual de ventas, ¿Cuánto tiempo llevara a la compañía recuperar la inversión?
   b) Si se espera un incremento en ventas del 20% al año, ¿Cuánto tiempo llevara recuperar dicha expansión?

FORMULA.

Utilizando la ecuación 2: $K + c_2 x = c_1 x$

Despeje:

Despejando el número de unidades "x" de la ecuación 2:

$$x = \frac{K}{(c_1 - c_2)}$$

Datos:

$c_1 = \$\ 200.00 * 1.30 = \$\ 260.00$; $c_2 = \$180.00$ $k = \$\ 7{,}000{,}000.00$

Nombre del contacto: Martínez Rojo Edgar, Montufar Benítez Marco Antonio
Teléfono: 771-199-47-87,771 7172000 ext. 4011
Correo electrónico: edgar_martinez@uaeh.edu.mx, montufar@uaeh.edu.mx
Material Elaborado en la Academia de Ingeniería Industrial

Respuestas:

a) Sustituyendo valores en la expresión de despeje para determinar el número de unidades.

$$x = \frac{7\,,000\,000.00}{(260.00\ - 180.00)} = 87,500\ unidades$$

La compañía tendría que vender 87, 500 unidades para justificar la inversión.

Puesto que la compañía tiene una demanda anual de vehículos de 10, 000 y cada uno de ellos se entrega con 5 llantas, la demanda anual de estas es de 50, 000 Por lo tanto el ahorro anual seria:

$$ahorro = \$\ 80.00 * 50,000 = \$\ 4,000,000.00$$

Por lo tanto, para recuperar la inversión inicial, deberán transcurrir:

$$tiempo\ de\ recuperación. = \frac{7,000,000.00}{4,000,000.00} = 1.75\ años$$

b) Se esperan incrementos anuales de un 20% en las ventas

Tabla 1. Tiempo de recuperación de inversión.

Año.	Demanda (llantas).	Ahorro ($).
1	50, 000	4, 000, 000.00
2	60, 000	4, 800, 000.00

Si se realiza el acumulado de 2 años tendremos una cantidad de $ 8 800 000 de ahorro. Para poder ofrecer un resultado más exacto con referencia a nuestro ahorro

Nombre del contacto: Martínez Rojo Edgar, Montufar Benítez Marco Antonio
Teléfono: 771-199-47-87,771 7172000 ext. 4011
Correo electrónico: edgar_martinez@uaeh.edu.mx, montufar@uaeh.edu.mx
Material Elaborado en la Academia de Ingeniería Industrial

Tabla 2 Tiempo exacto de recuperación de inversión.

Año.	Ahorro ($).
1	4 000 000
1.46	7 000 000
1.75	8 800 000

$$x = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}(x_2 - x_1) + x_1$$ [1]

$$x = \frac{7,000,000.00 - 4\,,000,000.00}{8,800,000.00 - 4,000,000.00}(1.75 - 1) + 1 = \mathbf{1.46\ años}$$

2. Una importante compañía petrolera está considerando el momento óptimo para la construcción de nuevas refinerías. Por experiencias pasadas, cada duplicación en el tamaño de una refinería en una ubicación da como resultado un incremento en los costos de construcción de cerca de 68%. Adicionalmente, el tamaño de una planta de 10 000 barriles por día cuesta $6 millones. Asuma que la demanda de petróleo está aumentando a una tasa constante de dos millones de barriles por año y que la tasa de descuento para costos futuros es de 15%.

a) Encuentre los valores de k y a asumiendo una relación de la forma $f(y) = k\,y^a$. Asuma que y está en unidades de barriles por día.

b) Determine el tiempo óptimo de las adiciones a la planta y el tamaño óptimo de cada planta.

[1] Formula de interpolación lineal.

Nombre del contacto: Martínez Rojo Edgar, Montufar Benítez Marco Antonio
Teléfono: 771-199-47-87,771 7172000 ext. 4011
Correo electrónico: edgar_martinez@uaeh.edu.mx, montufar@uaeh.edu.mx
Material Elaborado en la Academia de Ingeniería Industrial

Respuestas:

a) Calculando el valor de “a” despejando la incógnita de la ecuación 4.

$2^a = 1.68$; $a = \frac{\ln 1.68}{\ln 2} = 0.7484 = 0.75$

Determinar el valor de “*k*” despejando de la ecuación 3:

Si $f(y) = ky^a$; $k = \frac{f(y)}{y^a} = \frac{6}{10\,000^{0.75}} = 0.006$

b) Determinamos el valor de ***u*** con la fórmula 6: $f(u) = \frac{u}{e^{u-1}}$

Tabla 3 Determinación del valor "u".

$f(u) = \frac{u}{e^u - 1}$	
f(u)	*u*
0.7582	0.53
0.7541	0.54
0.75	0.55
0.7298	0.6

Para poder determinar el tiempo se utiliza la expresión:

$$\boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{r}} = \frac{0.55}{.15} = 3.66\ años$$

El tamaño óptimo está dado por el producto del tiempo por la demanda

$$\boldsymbol{xD} = 3.66 * 2,000,000 = 7,320,000\ barriles$$

Nombre del contacto: Martínez Rojo Edgar, Montufar Benítez Marco Antonio
Teléfono: 771-199-47-87,771 7172000 ext. 4011
Correo electrónico: edgar_martinez@uaeh.edu.mx, montufar@uaeh.edu.mx
Material Elaborado en la Academia de Ingeniería Industrial

3. Para el modelo de hacer o comprar [1] demuestre que el tiempo t , para recuperar la inversión inicial K, bajo una demanda constante D, está dado por:

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{K}/(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{c_1} - \boldsymbol{c_2}))$$

Solución:

Dado que el ahorro por unidad producida y hacer la inversión inicial es $(\boldsymbol{c_1} - \boldsymbol{c_2})$, y la demanda anual es D, estaríamos teniendo un ingreso anual de $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{c_1} - \boldsymbol{c_2})$), por lo tanto la inversión se recuperaría en:

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{K}/(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{c_1} - \boldsymbol{c_2})) \text{ años}$$

4. Implemente el modelo de capacidad optima dado en [Nahmias , 2007], en Solver y/o Lingo, y use los datos del ejercicio 2 de este problemario.

Solución:

$$C(x) = \frac{k(xD)^a}{1 - e^{-rx}}.$$

```
a=.75;
K=.006;
D=2000000;
r=.15;

Min= K *@POW(D*x,a)/(1-@EXP(-r*x));

x>=0;
end
```

A continuación, mostramos la solución arrojada por LINGO, donde podemos observar que la solución coincide (x=3.66 años) con el método analítico mostrado en el problema 2. Además, el costo mínimo total es de $ 1998.6

```
Local optimal solution found.
Objective value:                              1998.644
Infeasibilities:                              0.000000
Extended solver steps:                               5
Best multistart solution found at step:              1
Total solver iterations:                            39
Elapsed runtime seconds:                          0.24

Model Class:                                       NLP

Total variables:                      1
Nonlinear variables:                  1
Integer variables:                    0

Total constraints:                    2
Nonlinear constraints:                1

Total nonzeros:                       2
Nonlinear nonzeros:                   1


                        Variable           Value        Reduced Cost
                               A       0.7500000            0.000000
                               K       0.6000000E-02        0.000000
                               D        2000000.            0.000000
                               R       0.1500000            0.000000
                               X        3.668005          -0.1640387E-08
```

Conclusiones

En este trabajo se ha explicado la importancia de los modelos matemáticos en el contexto de la toma de decisiones. Siendo estos relevantes para determinar soluciones a ciertas problemáticas de una compañía.

Tomando como base los problemas anteriores, sería interesante proponer trabajos de investigación para resolverlos con alguna modificación en los supuestos, por ejemplo, en el modelo de crecimiento de la capacidad es retador hacer las siguientes preguntas:

- ¿Qué pasa con el modelo cuando el periodo de estudio es finito?
- ¿Qué pasa con el modelo cuando la tasa de interés no se compone continuamente sino de hace de manera discreta?

Nombre del contacto: Martínez Rojo Edgar, Montufar Benítez Marco Antonio
Teléfono: 771-199-47-87,771 7172000 ext. 4011
Correo electrónico: edgar_martinez@uaeh.edu.mx, montufar@uaeh.edu.mx
Material Elaborado en la Academia de Ingeniería Industrial

Bibliografía

Nahmias, S. (2007). *Análisis de la producción y las operaciones.* México, D.F.: Mc Graw Hill.

Nombre del contacto: Martínez Rojo Edgar, Montufar Benítez Marco Antonio
Teléfono: 771-199-47-87,771 7172000 ext. 4011
Correo electrónico: edgar_martinez@uaeh.edu.mx, montufar@uaeh.edu.mx
Material Elaborado en la Academia de Ingeniería Industrial