Go Back

Goto Page

Full Screen

Close

Quit

UAEH

Enlosados Aperiódicos

Oscar Edgar Pérez Gómez
Asesor: Dr. Benjamín Itzá Ortiz

18 de mayo de 2011

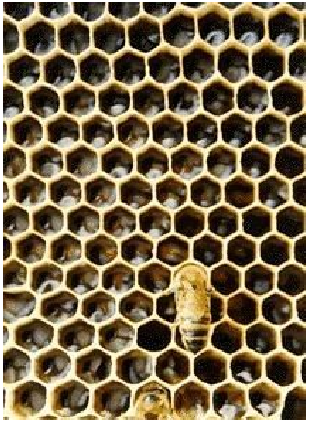
Índice

1. Introducción 2
2. Historia 4
3. Enlosados de Penrose 7
4. Cuasicristales 10
5. Enlosado aperiódico en una dimensión 11

First Page
Go Back
Goto Page
Full Screen
Close
Quit

1. Introducción

Un enlosado es generalmente entendido como el recubrimiento de una superficie por algunas formas. Por ello, en un sentido general cualquier persona conoce alguno. Existen enlosados hechos por el hombre, que regularmente se usan en arquitectura con propósitos decorativos; algunos otros se encuentran en la naturaleza, por ejemplo en un panal de abejas.



La Teoría de enlosados (Tiling Theory) es una rama de las matemáticas que estudia como un espacio puede ser cubierto por distintas figuras. Este problema ha sido tratado usando herramientas de diversas áreas como geometría, teoría de gráficos, topología y análisis, entre otras.
El área permanece llena de problemas abiertos que lucen inocentes pero encierran gran dificultad. Los enlosados se estudian no solo por curiosidad, hoy en día su principal aplicación es el modelado de superficies.

Particularmente estoy trabajando con un tipo de enlosados, los enlosados aperiódicos.

First Page
◀ ▶
◀◀ ▶▶
Go Back
Goto Page
Full Screen
Close
Quit

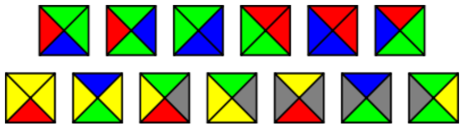
2. Historia

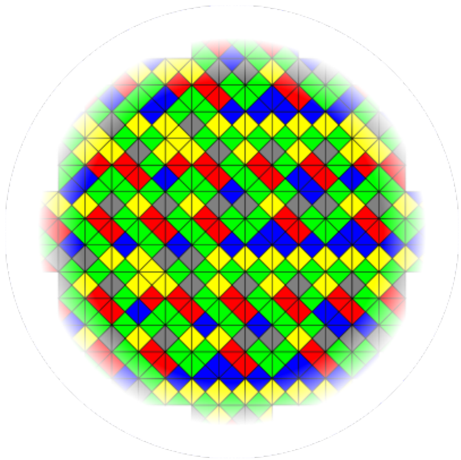
En 1900 Hilbert publicó su famosa lista de 23 problemas abiertos, los cuales fueron muy influyentes para las matemáticas del siglo XX. La segunda parte del 19° problema preguntaba si un espacio euclídeo tridimensional podía ser llenado con un poliedro de tal forma que todas sus caras fuesen diferentes. Karl Reinhart resolvió esta pregunta en 1928. Los enlosados aperiódicos surgieron entonces como una extensión de esta pregunta. Para 1961 el matemático y lógico Hao Wang propuso el problema del dominó, este es, si dado un conjunto finito de algunas losas en particular -Losas de Wang, o Wang Tiles-, se puede decidir si es posible cubrir el plano con éstas. Wang probó que el problema era decidible si y sólo si cualquier enlosado del plano admitía un enlosado periódico.

First Page
Go Back
Goto Page
Full Screen
Close
Quit

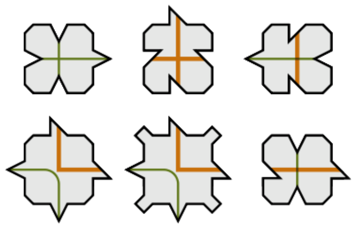
En 1966 Robert Berger, un estudiante de Wang, probó que el problema es, en efecto, indecidible, mostrando un conjunto de 20426 losas de Wang que admitía únicamente enlosados aperiódicos. Más tarde pudo encontrar otro conjunto con la misma propiedad y 104 losas.

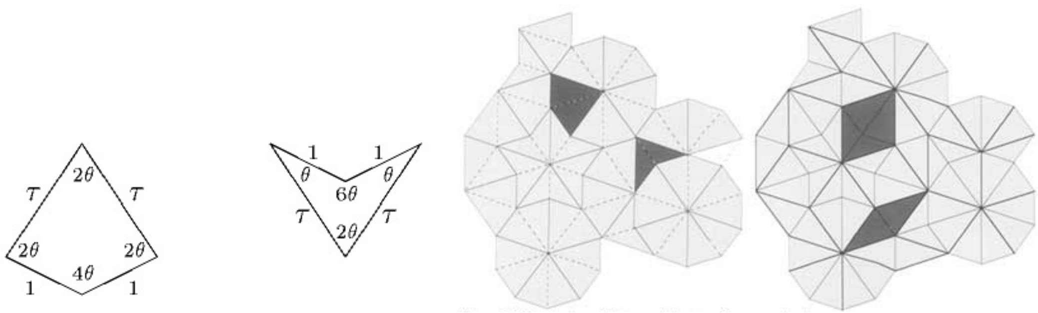
El siguiente conjunto de 13 losas fué publicado por Karel Culik en 1996.





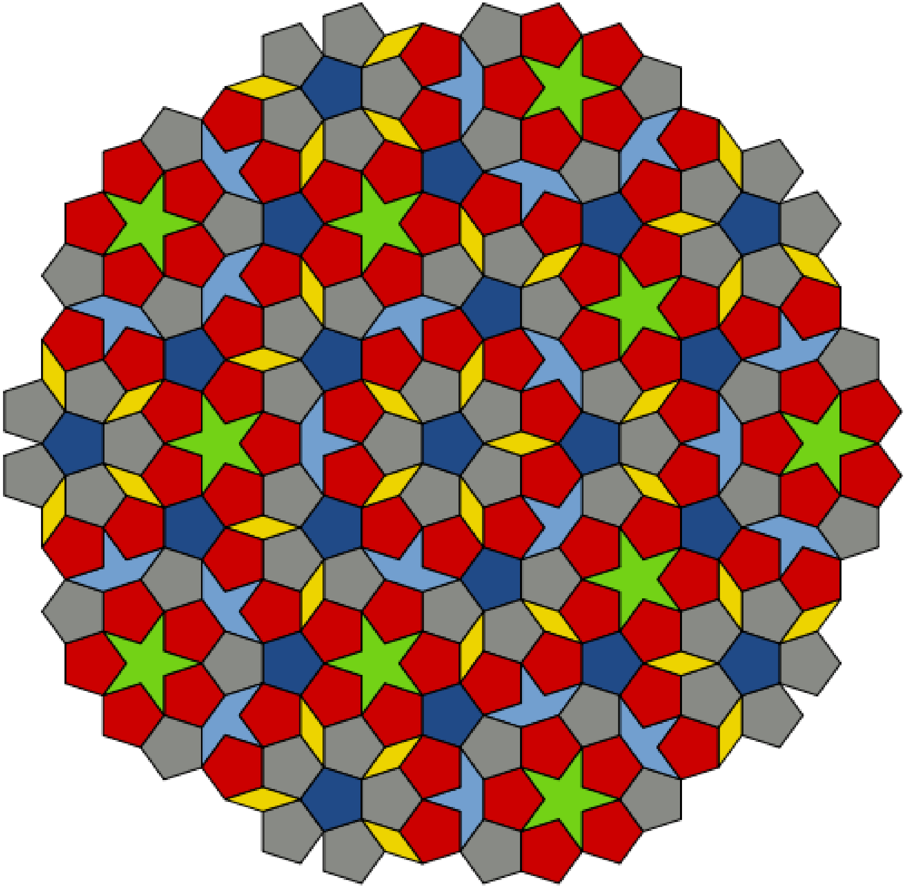
En 1971, Raphael M. Robinson presentó un ejemplo con 6 losas, que no eran losas de Wang. En 1974 Roger Penrose mostró otro conjunto, también con 6 losas, pero observando formas pentagonales y no cuadradas. Posteriormente propuso un conjunto de solo 2 losas, a las que llamó papalote y dardo (kite and dart), y otro con 2 rombos.





Penrose's kite and dart. $\theta = \frac{\pi}{5}$ and $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

3. Enlosados de Penrose

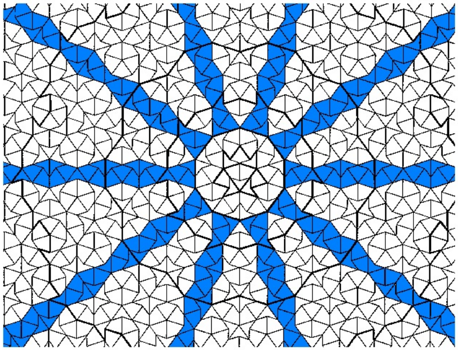


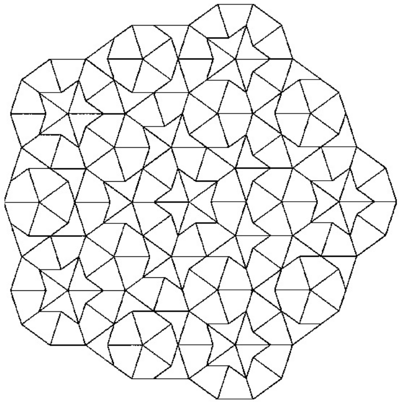
¿Por qué son interesantes?

¡Son aperiódicos!

Pueden ser construidos para admitir *simetría rotacional.*

Si tomas *cualquier* parche finito en un enlosado de Penrose, sin importar que tan extenso sea, se repetirá, de hecho, infinitas veces en el enlosado.





First Page

◀ ▶

◀◀ ▶▶

Go Back

Goto Page

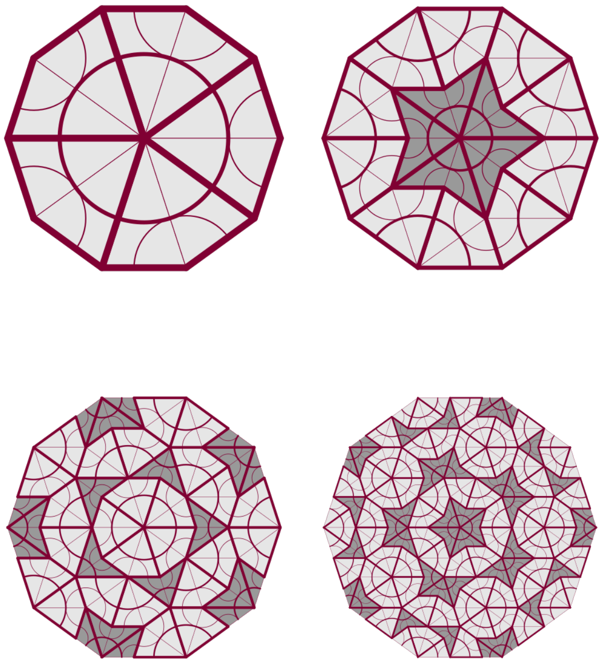
Full Screen

Close

Quit

Inflación and deflación

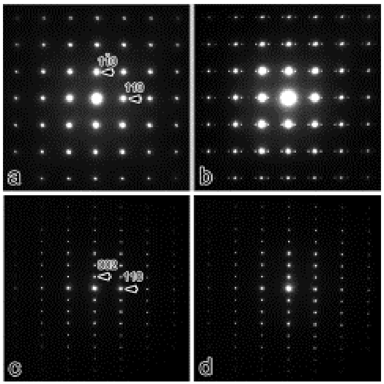
La inflación y deflación, -inflation and deflation- constituyen un método para construir enlosados. Básicamente, se define una regla de substitución, la cual debe respetar normas de adyacencia, si las hay, y luego es iterada infinitamente. Enlosados creados de esta forma suelen ser llamados Enlosados de sustitución.

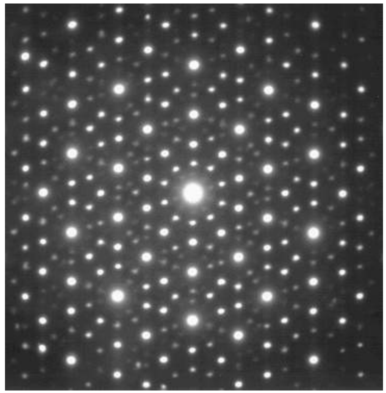


First Page
Go Back
Goto Page
Full Screen
Close
Quit

4. Cuasicristales

En 1984 una nueva clase de materiales, llamados *cuasicristales* fué descubierta. La sorpresa que caractrizó a estos materiales fué su Espectro de difracción, el cual es obtenido por un microscopio de electrones. Éste era una malla de puntos, como en un cristal, pero exhibía una simetría pentagonal, nunca vista hasta entonces y que de hecho se consideraba imposible. Esto implicaba que la estructura atómica de estos materiales no era periódica, pero *casi*.



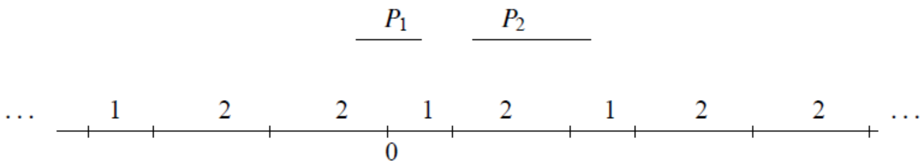


First Page
◀ ▶
◀◀ ▶▶
Go Back
Goto Page
Full Screen
Close
Quit

5. Enlosado aperiódico en una dimensión

Para empezar a fijar conceptos, consideremos un caso sencillo, un enlosado en una recta.

Supongamos que queremos *cubrir* la recta real con dos intervalos -compactos, de diferente longitud-, P_1 y P_2. Podemos entonces identificar nuestras losas P_1 and P_2 con dos símbolos, sean 1 y 2, identificando así la teselación con una palabra bi-infinita del alfabeto $\mathcal{A} = \{1, 2\}$.
Definimos también la regla de sustitución $\varphi(1) = 12$ y $\varphi(2) = 122$. Comenzando por la palabra 2.1 e iterando φ infinitas veces, obtenemos el enlosado T:



¿Cómo saber que es aperiódico?

Ideas:

- Contradicción
- Por construcción

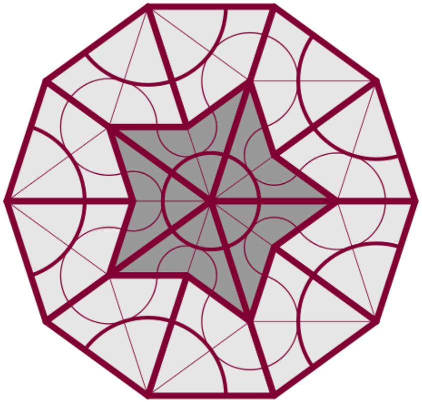
Por contradicción, hay que suponer que tiene algún periodo k, y buscar algun propiedad de tal forma que mostremos que k tiene que ser arbitrariamente grande.

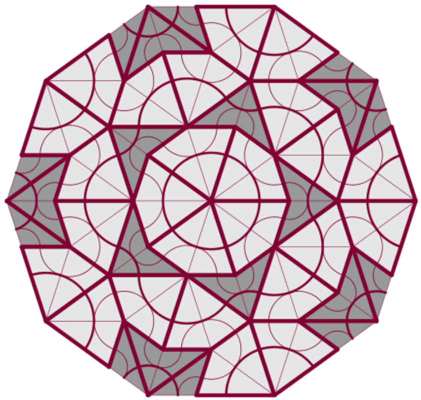
Busquemos algo más en su estructura.

Recordemos que T fué construido por inflación y deflación.

Primero, notemos que si fuese periódico, la forma de desinflar T no es única.

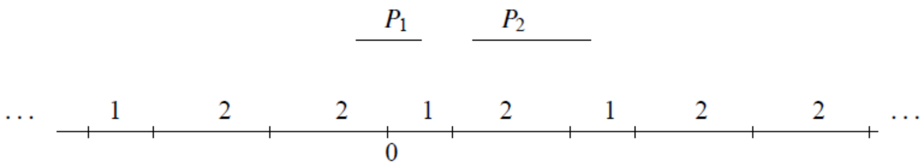
Luego, por contrapositiva, si la forma de desinflar es única, entonces T es aperiódico.





Volviendo al ejemplo...

$$\varphi(1) = 12 \; \varphi(2) = 122$$



Con las nociones que hemos dado para construir T, podemos ahora decir que T es un elemento del espacio de todos los posibles mapeos de $\mathbb{Z}$ a $\mathcal{A}$.

Definimos así $\tau_\varphi = cl\,\{T + x : x \in \mathbb{R}\}$, que tiene una topología inducida por una métrica, en la cual dos enlosados son cercanos si una traslación de uno coincíde con el otro en un parche grande del origen.

Consideremos ahora $\varphi(1) = 12$ y $\varphi(2) = 212$; luego $\varphi'(1) = 112$ y $\varphi'(2) = 12$.

¿Son homeomorfos los espacios τ_φ y $\tau_{\varphi'}$?

Con las nociones que hemos dado para construir T, podemos ahora decir que T es un elemento del espacio de todos los posibles mapeos de $\mathbb{Z}$ a $\mathcal{A}$.

Definimos así $\tau_\varphi = cl\{T + x : x \in \mathbb{R}\}$, que tiene una topología inducida por una métrica, en la cual dos enlosados son cercanos si una traslación de uno coincíde con el otro en un parche grande del origen.

Consideremos ahora $\varphi(1) = 12$ y $\varphi(2) = 212$; luego $\varphi'(1) = 112$ y $\varphi'(2) = 12$.

¿Son homeomorfos los espacios τ_φ y $\tau_{\varphi'}$?

Bueno, la verdad es que si. (Teorema, Barge y Diamond)