Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo

Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
Área Académica de Matemáticas y Física

Línea de investigación: Resolución de problemas en educación matemática.
Programa educativo: Maestría en Ciencias en Matemáticas y su Didáctica
Nombre de la asignatura: Matemáticas I.
Tema: Modelos Matemáticos Discretos.
Ciclo: Julio-Diciembre de 2010.
Profesor: Roberto Ávila-Pozos

Tema: Modelos matemáticos discretos.
Abstract: In this course we present some discrete mathematical models. It is an introductory course in mathematical modeling.
Keywords: , Mathematical Models, Logistic equation, Growth model.
Palabras clave: Modelos matemáticos, Ecuación logística, modelo de crecimiento.

Modelos Matemáticos Discretos

Roberto Ávila-Pozos

Área Académica de Matemáticas y Física
Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo

Contenido

- Los conejos de Fibonacci

Contenido

- Los conejos de Fibonacci
- Modelo lineal de crecimiento

Contenido

- Los conejos de Fibonacci
- Modelo lineal de crecimiento
- La ecuación logística

Contenido

- Los conejos de Fibonacci
- Modelo lineal de crecimiento
- La ecuación logística
- Poblaciones estructuradas por edad

Introducción

El propósito del taller es discutir y analizar modelos matemáticos discretos. A partir de ecuaciones en diferencias, se presentarán modelos de crecimiento de poblaciones; se revisarán los supuestos y se analizarán sus alcances y limitaciones. Además, se realizará un análisis cualitativo del fenómeno que se pretende modelar.

El problema de los conejos y los números de Fibonacci

Un hombre puso un par de conejos en un terreno completamente cercado. ¿Cuántos pares de conejos tendrá después de un año, suponiendo que cada mes, cada pareja de conejos genera una nueva pareja de conejos, y que cada nueva pareja comienza a reproducirse al segundo mes?

Los conejos

Al inicio...

Un mes después...

Dos meses después...

Los conejos

Tres meses después...

Cuatro meses después...

Cinco meses después...
¿Y después de un año?

Números de Fibonacci

Son números que se construyen con la fórmula de recurrencia

$$y_{n+2} = y_{n+1} + y_n$$

La sucesión más famosa de estos números, atribuida a Leonardo de Pisa es

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$$

Números de Fibonacci

Para calcular cualquier número de la sucesión, no es necesario calcular todos los anteriores. La fórmula

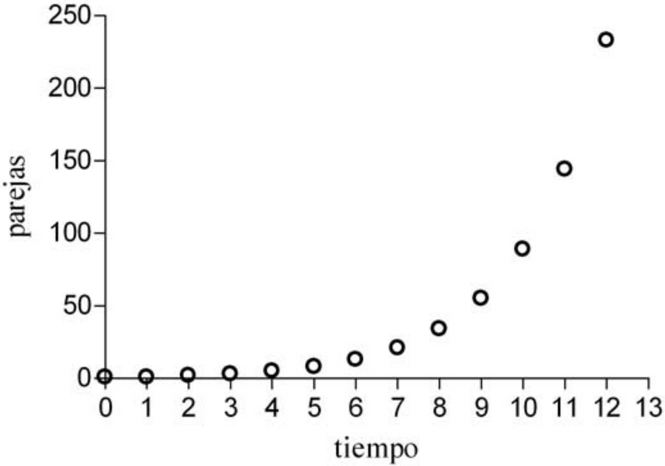
$$y_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}$$

permite calcular el número de conejos para cualquier tiempo (discreto).
N.B.

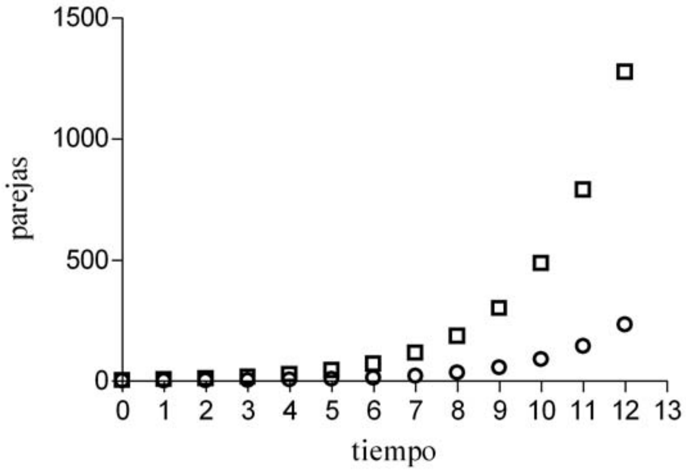
$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

se conoce como la *razón dorada*.

Números de Fibonacci



Números de Fibonacci

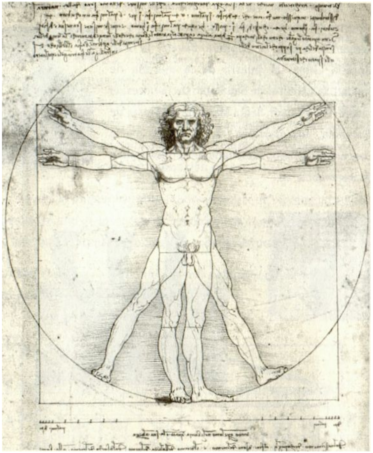


Números de Fibonacci

Algunas propiedades de los números de Fibonacci

- $\frac{y_{n+1}}{y_n} \approx \phi$
- $\frac{y_{n+2}}{y_n} \approx \phi^2$
- $y_1 + y_2 + \cdots + y_n = y_{n+2} - 1$
- $y_1 + y_3 + \cdots + y_{2n+1} = y_{2n}$
- $y_2 + y_4 + \cdots + y_{2n} = y_{2n+1} - 1$
- $y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 = y_n y_{n+1}$

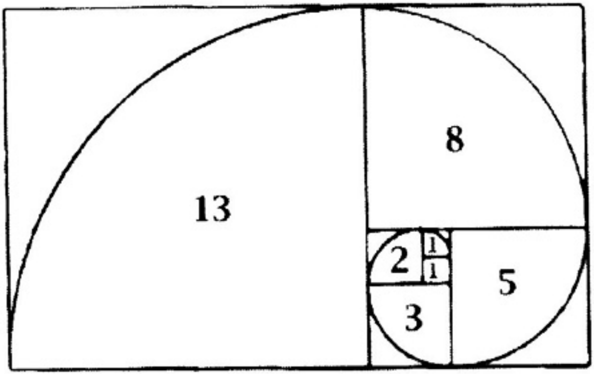
Aplicaciones



Aplicaciones

Aplicaciones

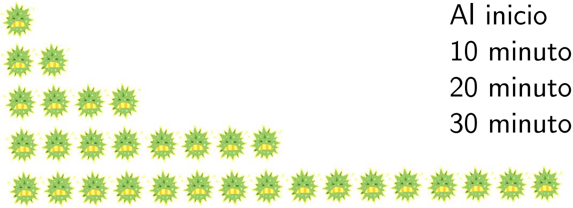
Aplicaciones



Un problema de crecimiento

En un medio de cultivo, se coloca una bacteria para su estudio detallado. Después de 10 minutos, al observar el cultivo bajo el microscopio, se puede ver que hay dos bacterias. A los 20 minutos de comenzar con el experimento, se observa el doble de bacterias que había a los 10 minutos. A los 30 minutos el número de bacterias ha vuelto a duplicarse. ¿Cuántas bacterias habrá después de 2 horas?

Un problema de crecimiento



Al inicio

10 minutos después del inicio...

20 minutos después del inicio...

30 minutos después del inicio...

¿Y después de dos horas?

El crecimiento de las bacterias

Digamos que n_0 es el número inicial de bacterias. Después de 10 minutos tenemos $n_1 = 2 \times n_0$. A los 20 minutos $n_3 = 2 \times n_1$. En general,

$$n_{t+1} = 2 \times n_t$$

Y esto significa que para poder conocer el valor al tiempo $t + 1$ debemos conocer el valor al tiempo t.
Podemos ver que

$$n_2 = 2n_1 = 2 \times (2n_0) = 4n_0 = 2^2 n_0$$

El crecimiento de las bacterias

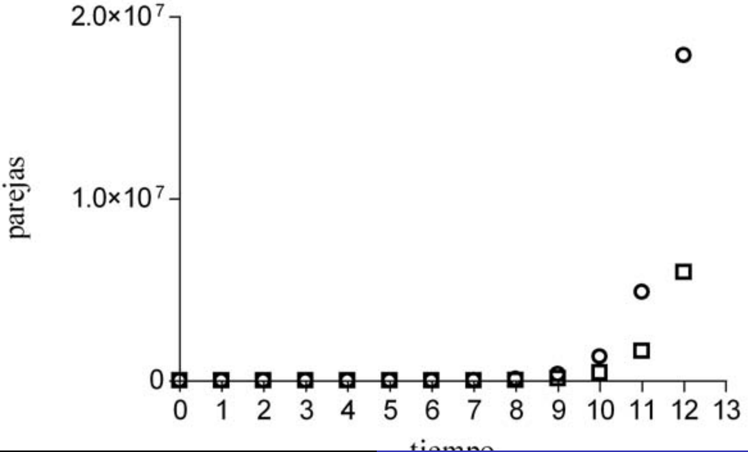
De manera similar

$$n_3 = 2n_2 = 2 \times (2n_1) = 2 \times 2 \times 2 \times n_0 = 8 \times n_0 = 2^3 n_0$$

En general

$$n_{t+1} = 2 \times n_t = 2^{t+1} n_0$$

El crecimiento de bacterias



Modelo de crecimiento

En general

$$x_{n+1} = x_n + (b - d)x_n = x_n(1 + b - d) = x_n(1 + r)$$

donde

$$r = b - d$$

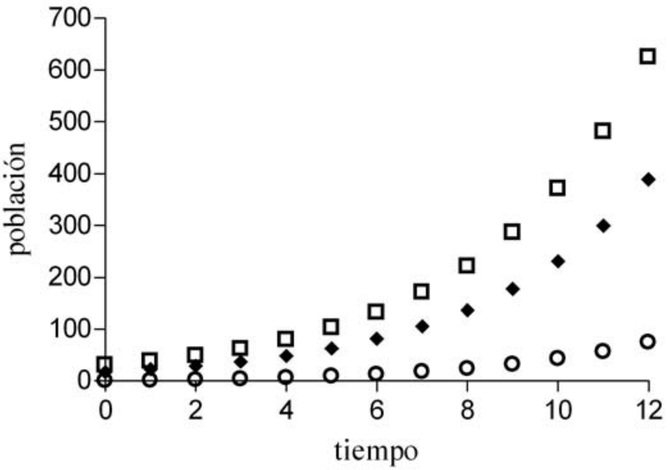
Modelo de crecimiento con migración

Si consideramos la migración, el modelo queda como

$$x_{n+1} = rx_n + \beta$$

donde $\beta > 0$ significa inmigración y $\beta < 0$ indica emigración

El crecimiento con migración



La ecuación logística

$$x_{n+1} = x_n + rx_n \left(1 + \frac{x_n}{K}\right)$$

Análisis cualitativo

Por ejemplo, grafique $f(x_n) = x_n + rx_n \left(1 + \frac{x_n}{K}\right)$ en el plano $x - y$.
También grafique $x_{n+1} = x_n$.
Tome un valor inicial x_0 y se trace una segmento de recta, perpendicular al eje x, hasta alcanzar a la curva $f(x_n)$. Ese punto es $(x_0, f(x_0))$.
A continuación se traza un segmento de recta perpendicular al eje y, hasta alcanzar a la recta $x_{n+1} = x_n$. Ese será el punto $(f(x_0), f(x_0))$.
Se repite este procedimiento hasta encontrar el comportamiento de la ecuación en diferencias.

Diagrama de telaraña

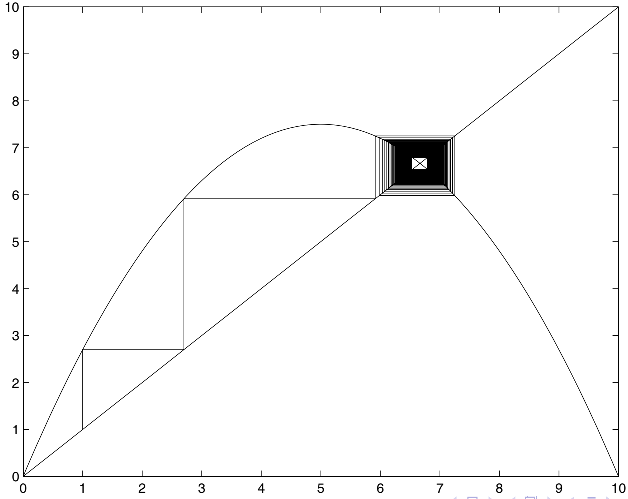


Diagrama de telaraña

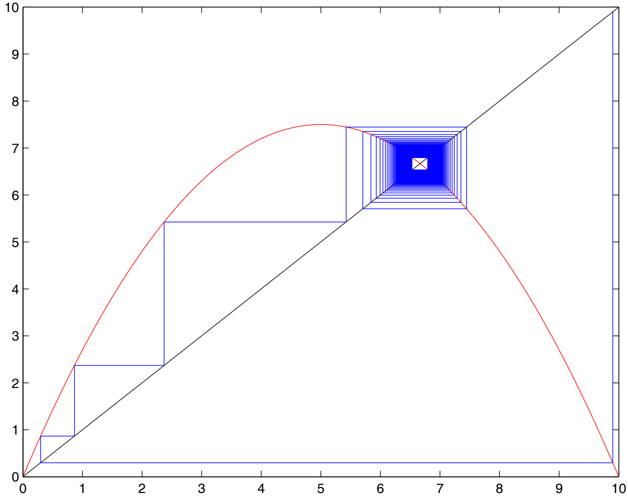
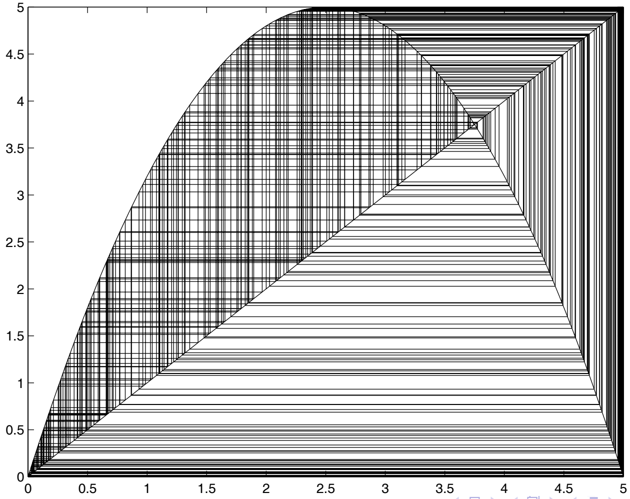


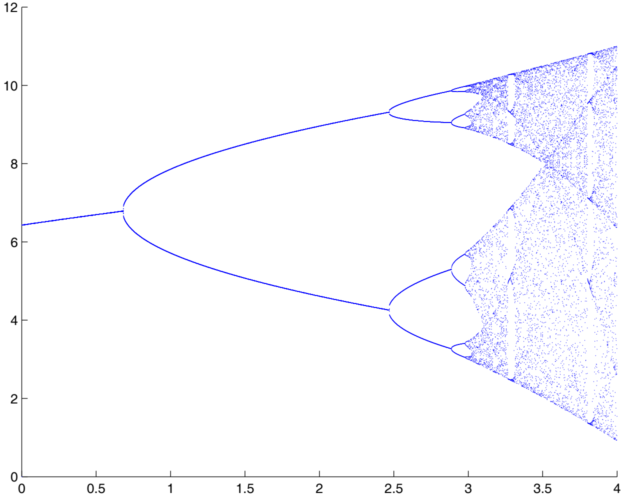
Diagrama de telaraña



Análisis cualitativo

En ocasiones, estos sistemas pueden tener un comportamiento caótico. Para esos casos, el diagrama de bifurcación resulta de gran utilidad, pues se puede evaluar la dependencia del parámetro que causa el comportamiento. Un ejemplo de dicho comportamiento se presenta en la siguiente figura:

Diagrama de bifurcación



Matrices de Leslie

Cuando el interés está centrado en determinar el número de elementos de la población con cierta característica, por ejemplo, rango de edad, un modelo de gran utilidad es aquel que preserve la información de cierta estructura. Si nos interesa saber cuántos conejos juveniles y cuántos adultos hay en determinado momento, el modelo de Fibonacci no resuelve el problema. Por eso, es necesario introducir la información de la edad, en cualquier momento, mediante un modelo de población estructurada por edad.

Matrices de Leslie

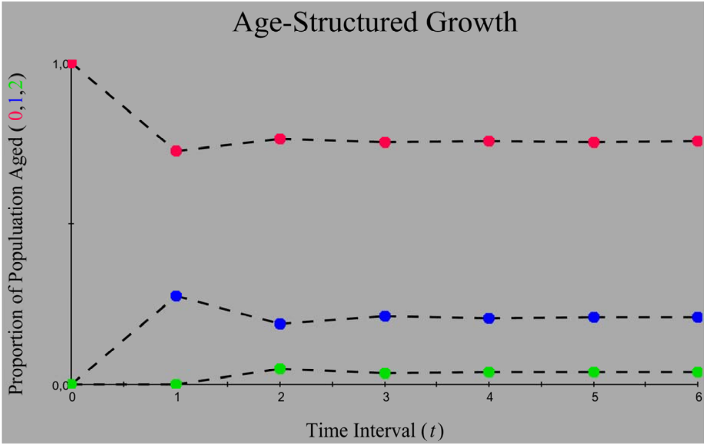
$$\begin{pmatrix} z_{1,n+1} \\ \\ z_{2,n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{1,n} \\ \\ z_{2,n} \end{pmatrix} \tag{1}$$

Población estructurada por edad

Age-Structured Growth
Leslie Projection Matrix

1.312	1.875	0.0
0.5	0.0	0.0
0.0	0.333	0.0

Población estructurada por edad



Contacto

Gracias

contacto: ravila@uaeh.edu.mx