



Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo

Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería

Área Académica de Matemáticas y Física

Línea de investigación: Economía y Finanzas Matemáticas

Programa educativo: Maestría en Ciencias en Matemáticas y su Didáctica

Nombre de la asignatura: Uso de Tecnología en el Aprendizaje de las Matemáticas

Tema: Validando Conjeturas

Ciclo: Enero-Mayo de 2008.

Profesor: Fernando Barrera Mora

Tema: Validando Conjeturas

Abstract: The objective of this lecture is to provide some elements that can be taken as a reference when approaching learning tasks using technological tools to formulate and justify conjectures.

Keywords: Validating Conjectures, Technological Tools

Palabras clave: Validando Conjeturas, Herramientas Tecnológicas

El uso de la Tecnología en el Proceso de Formular y Validar Conjeturas

Fernando Barrera Mora
barrera@uaeh.edu.mx

Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo

Seminario, Maestría en Ciencias en Matemáticas y su
Didáctica

“La tecnología ha cambiado la forma de hacer y aprender matemáticas”

• Hacer Matemáticas:

- Teoría de Números: Factorizar enteros y encontrar primos. [1994] – [1, septiembre 6, 2002]

• Aprender Matemáticas:

- ¿Qué tan confiables son los resultados obtenidos con el uso de un sistema computacional?
- ¿Qué trayectorias de aprendizaje tomar cuando los resultados de un sistema computacional no son consistentes con los argumentos matemáticos?

“La tecnología ha cambiado la forma de hacer y aprender matemáticas”

● Hacer Matemáticas:

- Teoría de Números: Factorizar enteros y encontrar primos: ($2^{32582657} - 1$, septiembre 4, 2006)
- Algoritmos y criptografía: procesamiento de información

● Aprender Matemáticas:

- ¿Cuál es el papel de la tecnología en los procesos del pensar matemáticamente? Particularmente, ¿cuál es el rol de la tecnología al formular y demostrar conjeturas?
- ¿Qué tan confiables son los resultados obtenidos con el uso de un sistema computacional?
- ¿Qué trayectorias de aprendizaje tomar cuando los resultados de un sistema computacional no son consistentes con los argumentos matemáticos?

“La tecnología ha cambiado la forma de hacer y aprender matemáticas”

- **Hacer Matemáticas:**

- **Teoría de Números: Factorizar enteros y encontrar primos: ($2^{32582657} - 1$, septiembre 4, 2006)**
- Algoritmos y criptografía: procesamiento de información

- **Aprender Matemáticas:**

- ¿Cuál es el papel de la tecnología en los procesos del pensar matemáticamente? Particularmente, ¿cuál es el rol de la tecnología al formular y demostrar conjeturas?
- ¿Qué tan confiables son los resultados obtenidos con el uso de un sistema computacional?
- ¿Qué trayectorias de aprendizaje tomar cuando los resultados de un sistema computacional no son consistentes con los argumentos matemáticos?

“La tecnología ha cambiado la forma de hacer y aprender matemáticas”

- **Hacer Matemáticas:**

- **Teoría de Números: Factorizar enteros y encontrar primos:** ($2^{32582657} - 1$, septiembre 4, 2006)
- **Algoritmos y criptografía: procesamiento de información**

- **Aprender Matemáticas:**

- ¿Cuál es el papel de la tecnología en los procesos del pensar matemáticamente? Particularmente, ¿cuál es el rol de la tecnología al formular y demostrar conjeturas?
- ¿Qué tan confiables son los resultados obtenidos con el uso de un sistema computacional?
- ¿Qué trayectorias de aprendizaje tomar cuando los resultados de un sistema computacional no son consistentes con los argumentos matemáticos?

“La tecnología ha cambiado la forma de hacer y aprender matemáticas”

- **Hacer Matemáticas:**

- **Teoría de Números: Factorizar enteros y encontrar primos:** ($2^{32582657} - 1$, septiembre 4, 2006)
- **Algoritmos y criptografía: procesamiento de información**

- **Aprender Matemáticas:**

- ¿Cuál es el papel de la tecnología en los procesos del pensar matemáticamente? Particularmente, ¿cuál es el rol de la tecnología al formular y demostrar conjeturas?
- ¿Qué tan confiables son los resultados obtenidos con el uso de un sistema computacional?
- ¿Qué trayectorias de aprendizaje tomar cuando los resultados de un sistema computacional no son consistentes con los argumentos matemáticos?

“La tecnología ha cambiado la forma de hacer y aprender matemáticas”

- **Hacer Matemáticas:**

- Teoría de Números: Factorizar enteros y encontrar primos: ($2^{32582657} - 1$, septiembre 4, 2006)
- Algoritmos y criptografía: procesamiento de información

- **Aprender Matemáticas:**

- ¿Cuál es el papel de la tecnología en los procesos del pensar matemáticamente? Particularmente, ¿cuál es el rol de la tecnología al formular y demostrar conjeturas?
- ¿Qué tan confiables son los resultados obtenidos con el uso de un sistema computacional?
- ¿Qué trayectorias de aprendizaje tomar cuando los resultados de un sistema computacional no son consistentes con los argumentos matemáticos?

“La tecnología ha cambiado la forma de hacer y aprender matemáticas”

- **Hacer Matemáticas:**

- Teoría de Números: Factorizar enteros y encontrar primos: ($2^{32582657} - 1$, septiembre 4, 2006)
- Algoritmos y criptografía: procesamiento de información

- **Aprender Matemáticas:**

- ¿Cuál es el papel de la tecnología en los procesos del pensar matemáticamente? Particularmente, ¿cuál es el rol de la tecnología al formular y demostrar conjeturas?
- ¿Qué tan confiables son los resultados obtenidos con el uso de un sistema computacional?
- ¿Qué trayectorias de aprendizaje tomar cuando los resultados de un sistema computacional no son consistentes con los argumentos matemáticos?

“La tecnología ha cambiado la forma de hacer y aprender matemáticas”

- **Hacer Matemáticas:**

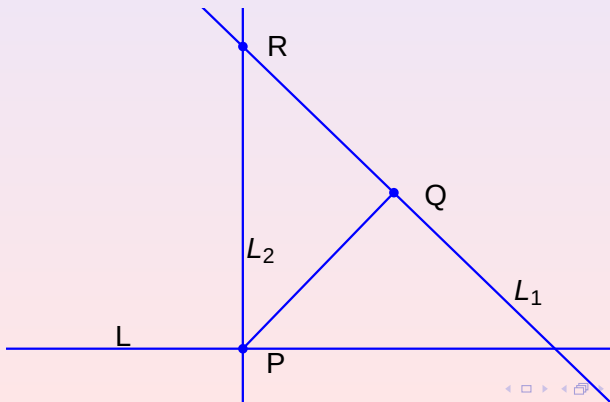
- Teoría de Números: Factorizar enteros y encontrar primos: ($2^{32582657} - 1$, septiembre 4, 2006)
- Algoritmos y criptografía: procesamiento de información

- **Aprender Matemáticas:**

- ¿Cuál es el papel de la tecnología en los procesos del pensar matemáticamente? Particularmente, ¿cuál es el rol de la tecnología al formular y demostrar conjeturas?
- ¿Qué tan confiables son los resultados obtenidos con el uso de un sistema computacional?
- ¿Qué trayectorias de aprendizaje tomar cuando los resultados de un sistema computacional no son consistentes con los argumentos matemáticos?

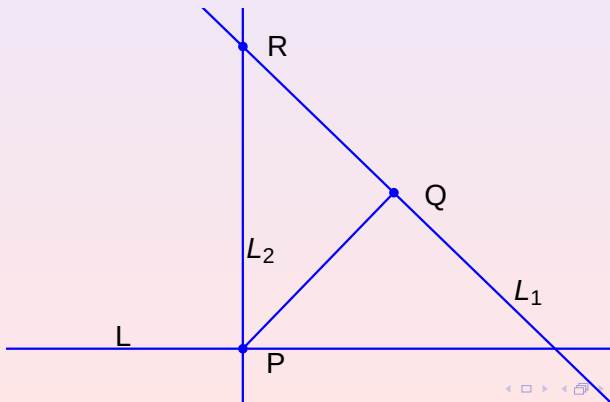
PROBLEMA

- Dada una recta L , $P \in L$ y $Q \notin L$, se traza el segmento PQ , la recta L_1 perpendicular a PQ en Q y la recta L_2 perpendicular a L en P . Sea $R \in L_1 \cap L_2$. ¿Qué lugar geométrico describe R al moverse P en L ?



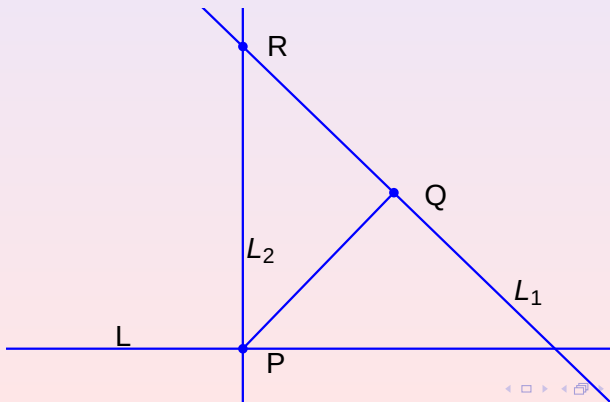
PROBLEMA

- Dada una recta L , $P \in L$ y $Q \notin L$, se traza el segmento PQ , la recta L_1 perpendicular a PQ en Q y la recta L_2 perpendicular a L en P . Sea $R \in L_1 \cap L_2$. ¿Qué lugar geométrico describe R al moverse P en L ?



PROBLEMA

- Dada una recta L , $P \in L$ y $Q \notin L$, se traza el segmento PQ , la recta L_1 perpendicular a PQ en Q y la recta L_2 perpendicular a L en P . Sea $R \in L_1 \cap L_2$. ¿Qué lugar geométrico describe R al moverse P en L ?



VALIDANDO CONJETURAS

- Ecuación de la recta que pasa por $P = (t, 0)$ y $Q = (a, b)$:

$$y = \frac{b}{a-t}(x-t).$$

- Ecuación de la recta perpendicular a PQ , en Q :

$$y = \frac{t-a}{b}(x-a) + b.$$

- Ecuación de la recta vertical que pasa por P : $x = t$.

- Coordenadas de R : $\left(t, \frac{(t-a)^2}{b} + b\right)$.

- Lugar geométrico: Parábola con foco en $\left(a, b + \frac{b}{4}\right)$ y

$$\text{directriz: } y = b - \frac{b}{4}.$$

- ❶ Ecuación de la recta que pasa por $P = (t, 0)$ y $Q = (a, b)$:

$$y = \frac{b}{a-t}(x-t).$$

- ❷ Ecuación de la recta perpendicular a PQ , en Q :

$$y = \frac{t-a}{b}(x-a) + b.$$

- ❸ Ecuación de la recta vertical que pasa por P : $x = t$.

- ❹ Coordenadas de R : $\left(t, \frac{(t-a)^2}{b} + b\right)$.

- ❺ Lugar geométrico: Parábola con foco en $\left(a, b + \frac{b}{4}\right)$ y

$$\text{directriz: } y = b - \frac{b}{4}.$$

VALIDANDO CONJETURAS

- ❶ Ecuación de la recta que pasa por $P = (t, 0)$ y $Q = (a, b)$:

$$y = \frac{b}{a-t}(x-t).$$

- ❷ Ecuación de la recta perpendicular a PQ , en Q :

$$y = \frac{t-a}{b}(x-a) + b.$$

- ❸ Ecuación de la recta vertical que pasa por P : $x = t$.

- ❹ Coordenadas de R : $\left(t, \frac{(t-a)^2}{b} + b\right)$.

- ❺ Lugar geométrico: Parábola con foco en $\left(a, b + \frac{b}{4}\right)$ y

$$\text{directriz: } y = b - \frac{b}{4}.$$

- ❶ Ecuación de la recta que pasa por $P = (t, 0)$ y $Q = (a, b)$:

$$y = \frac{b}{a-t}(x-t).$$

- ❷ Ecuación de la recta perpendicular a PQ , en Q :

$$y = \frac{t-a}{b}(x-a) + b.$$

- ❸ Ecuación de la recta vertical que pasa por P : $x = t$.

- ❹ Coordenadas de R : $\left(t, \frac{(t-a)^2}{b} + b\right)$.

- ❺ Lugar geométrico: Parábola con foco en $\left(a, b + \frac{b}{4}\right)$ y

$$\text{directriz: } y = b - \frac{b}{4}.$$

VALIDANDO CONJETURAS

- ❶ Ecuación de la recta que pasa por $P = (t, 0)$ y $Q = (a, b)$:

$$y = \frac{b}{a-t}(x-t).$$

- ❷ Ecuación de la recta perpendicular a PQ , en Q :

$$y = \frac{t-a}{b}(x-a) + b.$$

- ❸ Ecuación de la recta vertical que pasa por P : $x = t$.

- ❹ Coordenadas de R : $\left(t, \frac{(t-a)^2}{b} + b\right)$.

- ❺ Lugar geométrico: Parábola con foco en $\left(a, b + \frac{b}{4}\right)$ y

directriz: $y = b - \frac{b}{4}$.

- 1 Ecuación de la recta que pasa por $P = (t, 0)$ y $Q = (a, b)$:

$$y = \frac{b}{a-t}(x-t).$$

- 2 Ecuación de la recta perpendicular a PQ , en Q :

$$y = \frac{t-a}{b}(x-a) + b.$$

- 3 Ecuación de la recta vertical que pasa por P : $x = t$.

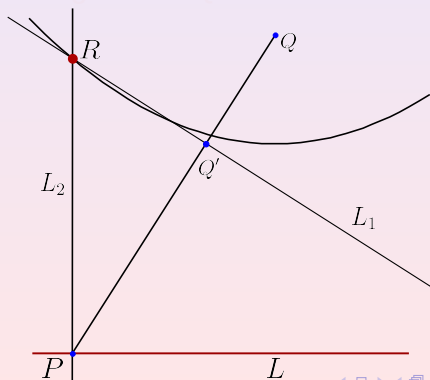
- 4 Coordenadas de R : $\left(t, \frac{(t-a)^2}{b} + b\right)$.

- 5 Lugar geométrico: Parábola con foco en $\left(a, b + \frac{b}{4}\right)$ y

directriz: $y = b - \frac{b}{4}$.

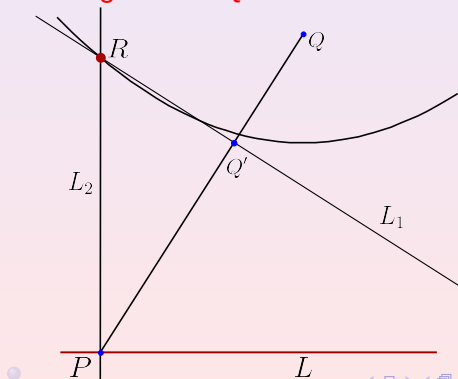
GENERALIZANDO

- Dada una recta L , un punto $P \in L$, un punto $Q \notin L$, y un punto Q' en el segmento PQ , se traza la recta L_1 perpendicular a PQ en Q' y la recta L_2 perpendicular a L en P . Sea $R \in L_1 \cap L_2$. ¿Qué lugar geométrico describe R al moverse P en L ? ¿Qué ocurre con el lugar geométrico al mover Q' en el segmento PQ ?



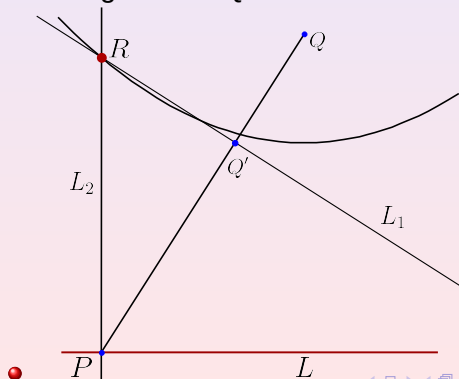
GENERALIZANDO

- Dada una recta L , un punto $P \in L$, un punto $Q \notin L$, y un punto Q' en el segmento PQ , se traza la recta L_1 perpendicular a PQ en Q' y la recta L_2 perpendicular a L en P . Sea $R \in L_1 \cap L_2$. ¿Qué lugar geométrico describe R al moverse P en L ? ¿Qué ocurre con el lugar geométrico al mover Q' en el segmento PQ ?



GENERALIZANDO

- Dada una recta L , un punto $P \in L$, un punto $Q \notin L$, y un punto Q' en el segmento PQ , se traza la recta L_1 perpendicular a PQ en Q' y la recta L_2 perpendicular a L en P . Sea $R \in L_1 \cap L_2$. ¿Qué lugar geométrico describe R al moverse P en L ? ¿Qué ocurre con el lugar geométrico al mover Q' en el segmento PQ ?



¿CÓMO EFECTÚA CABRI GEOMETRY CIERTAS TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS?

● Suponemos $Q = (a, b)$ fijo, $Q' = (c, d)$ y $P = (t, 0)$.

● La ecuación de la recta que pasa por P y Q es

$$y - b = \frac{b}{a - t}(x - a).$$

● La ecuación de L_1 es:

$$y - d = \frac{t - a}{b}(x - c) \quad (1)$$

$$= \frac{t - a}{b}(x - a - c + a) \quad (2)$$

$$= \frac{(t - a)(x - a)}{b} + \frac{t - a}{b}(a - c). \quad (3)$$

● $Q' \in (PQ) \Rightarrow d - b = \frac{b}{a - t}(c - a).$

● Despejando $a - c$, sustituyendo en (3), haciendo $x = t$ y simplificando obtenemos $y - d = \frac{d}{b^2}(x - a)^2.$

¿CÓMO EFECTÚA CABRI GEOMETRY CIERTAS TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS?

➊ Suponemos $Q = (a, b)$ fijo, $Q' = (c, d)$ y $P = (t, 0)$.

➋ La ecuación de la recta que pasa por P y Q es

$$y - b = \frac{b}{a - t}(x - a).$$

➌ La ecuación de L_1 es:

$$y - d = \frac{t - a}{b}(x - c) \quad (1)$$

$$= \frac{t - a}{b}(x - a - c + a) \quad (2)$$

$$= \frac{(t - a)(x - a)}{b} + \frac{t - a}{b}(a - c). \quad (3)$$

➍ $Q' \in (PQ) \Rightarrow d - b = \frac{b}{a - t}(c - a).$

➎ Despejando $a - c$, sustituyendo en (3), haciendo $x = t$ y simplificando obtenemos $y - d = \frac{d}{b^2}(x - a)^2.$

¿CÓMO EFECTÚA CABRI GEOMETRY CIERTAS TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS?

1 Suponemos $Q = (a, b)$ fijo, $Q' = (c, d)$ y $P = (t, 0)$.

2 La ecuación de la recta que pasa por P y Q es

$$y - b = \frac{b}{a - t}(x - a).$$

3 La ecuación de L_1 es:

$$y - d = \frac{t - a}{b}(x - c) \quad (1)$$

$$= \frac{t - a}{b}(x - a - c + a) \quad (2)$$

$$= \frac{(t - a)(x - a)}{b} + \frac{t - a}{b}(a - c). \quad (3)$$

4 $Q' \in (PQ) \Rightarrow d - b = \frac{b}{a - t}(c - a).$

5 Despejando $a - c$, sustituyendo en (3), haciendo $x = t$ y simplificando obtenemos $y - d = \frac{d}{b^2}(x - a)^2.$

¿CÓMO EFECTÚA CABRI GEOMETRY CIERTAS TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS?

- 1 Suponemos $Q = (a, b)$ fijo, $Q' = (c, d)$ y $P = (t, 0)$.
- 2 La ecuación de la recta que pasa por P y Q es

$$y - b = \frac{b}{a - t}(x - a).$$

- 3 La ecuación de L_1 es:

$$y - d = \frac{t - a}{b}(x - c) \quad (1)$$

$$= \frac{t - a}{b}(x - a - c + a) \quad (2)$$

$$= \frac{(t - a)(x - a)}{b} + \frac{t - a}{b}(a - c). \quad (3)$$

- 4 $Q' \in (PQ) \Rightarrow d - b = \frac{b}{a - t}(c - a).$

- 5 Despejando $a - c$, sustituyendo en (3), haciendo $x = t$ y simplificando obtenemos $y - d = \frac{d}{b^2}(x - a)^2.$

¿CÓMO EFECTÚA CABRI GEOMETRY CIERTAS TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS?

① Suponemos $Q = (a, b)$ fijo, $Q' = (c, d)$ y $P = (t, 0)$.

② La ecuación de la recta que pasa por P y Q es

$$y - b = \frac{b}{a - t}(x - a).$$

③ La ecuación de L_1 es:

$$y - d = \frac{t - a}{b}(x - c) \quad (1)$$

$$= \frac{t - a}{b}(x - a - c + a) \quad (2)$$

$$= \frac{(t - a)(x - a)}{b} + \frac{t - a}{b}(a - c). \quad (3)$$

④ $Q' \in (PQ) \Rightarrow d - b = \frac{b}{a - t}(c - a).$

⑤ Despejando $a - c$, sustituyendo en (3), haciendo $x = t$ y simplificando obtenemos $y - d = \frac{d}{b^2}(x - a)^2.$

¿CÓMO EFECTÚA CABRI GEOMETRY CIERTAS TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS?

- 1 Suponemos $Q = (a, b)$ fijo, $Q' = (c, d)$ y $P = (t, 0)$.
- 2 La ecuación de la recta que pasa por P y Q es

$$y - b = \frac{b}{a - t}(x - a).$$

- 3 La ecuación de L_1 es:

$$y - d = \frac{t - a}{b}(x - c) \quad (1)$$

$$= \frac{t - a}{b}(x - a - c + a) \quad (2)$$

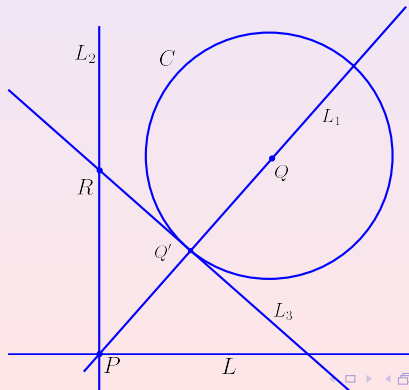
$$= \frac{(t - a)(x - a)}{b} + \frac{t - a}{b}(a - c). \quad (3)$$

- 4 $Q' \in (PQ) \Rightarrow d - b = \frac{b}{a - t}(c - a).$

- 5 Despejando $a - c$, sustituyendo en (3), haciendo $x = t$ y simplificando obtenemos $y - d = \frac{d}{b^2}(x - a)^2.$

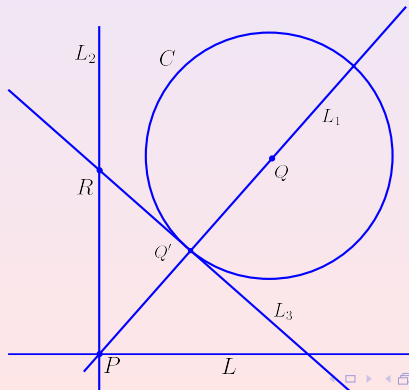
EXPLORANDO EL MECANISMO DE CABRI

- Dada una recta L , un punto $P \in L$, una circunferencia C de centro $Q \notin L$ y radio r , se trazan, la recta L_1 que pasa por P y Q ; la recta L_2 que pasa por P y es perpendicular a L . Sean $Q' \in L_1 \cap C$, L_3 la recta tangente a C en Q' , R el punto de intersección de L_2 y L_3 . ¿Qué lugar geométrico describe R al moverse P en L ?



EXPLORANDO EL MECANISMO DE CABRI

- Dada una recta L , un punto $P \in L$, una circunferencia C de centro $Q \notin L$ y radio r , se trazan, la recta L_1 que pasa por P y Q ; la recta L_2 que pasa por P y es perpendicular a L . Sean $Q' \in L_1 \cap C$, L_3 la recta tangente a C en Q' , R el punto de intersección de L_2 y L_3 . ¿Qué lugar geométrico describe R al moverse P en L ?



DISCUSIÓN

- Si $Q = (a, b)$ y $P = (t, 0)$, entonces las ecuaciones de L_1 y C son:

$$y - b = \frac{b}{a - t}(x - a) \quad (4)$$

$$r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 \quad (5)$$

- Resolviendo el sistema se tiene:

$$x_0 = a \pm \frac{r(a - t)}{\sqrt{(a - t)^2 + b^2}} \quad (6)$$

$$y_0 = b \left(1 \pm \frac{r}{\sqrt{(a - t)^2 + b^2}} \right) \quad (7)$$

DISCUSIÓN

- Si $Q = (a, b)$ y $P = (t, 0)$, entonces las ecuaciones de L_1 y C son:

$$y - b = \frac{b}{a - t}(x - a) \quad (4)$$

$$r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 \quad (5)$$

- Resolviendo el sistema se tiene:

$$x_0 = a \pm \frac{r(a - t)}{\sqrt{(a - t)^2 + b^2}} \quad (6)$$

$$y_0 = b \left(1 \pm \frac{r}{\sqrt{(a - t)^2 + b^2}} \right) \quad (7)$$

- Si $Q = (a, b)$ y $P = (t, 0)$, entonces las ecuaciones de L_1 y C son:

$$y - b = \frac{b}{a - t}(x - a) \quad (4)$$

$$r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 \quad (5)$$

- Resolviendo el sistema se tiene:

$$x_0 = a \pm \frac{r(a - t)}{\sqrt{(a - t)^2 + b^2}} \quad (6)$$

$$y_0 = b \left(1 \pm \frac{r}{\sqrt{(a - t)^2 + b^2}} \right) \quad (7)$$

- Como $Q' = (x_0, y_0)$ y L_3 es perpendicular a L_1 , entonces la ecuación de L_3 es:

$$y - y_0 = \frac{t - a}{b}(x - x_0). \quad (8)$$

- Sustituyendo los valores de $x_0, y_0, x = t$ y simplificando se tiene que las coordenadas de R son:

$$R = \left(t, \frac{1}{b} \left((t - a)^2 + b^2 \pm r \sqrt{(t - a)^2 + b^2} \right) \right). \quad (9)$$

- Como $Q' = (x_0, y_0)$ y L_3 es perpendicular a L_1 , entonces la ecuación de L_3 es:

$$y - y_0 = \frac{t - a}{b}(x - x_0). \quad (8)$$

- Sustituyendo los valores de $x_0, y_0, x = t$ y simplificando se tiene que las coordenadas de R son:

$$R = \left(t, \frac{1}{b} \left((t - a)^2 + b^2 \pm r \sqrt{(t - a)^2 + b^2} \right) \right). \quad (9)$$

- Como $Q' = (x_0, y_0)$ y L_3 es perpendicular a L_1 , entonces la ecuación de L_3 es:

$$y - y_0 = \frac{t - a}{b}(x - x_0). \quad (8)$$

- Sustituyendo los valores de $x_0, y_0, x = t$ y simplificando se tiene que las coordenadas de R son:

$$R = \left(t, \frac{1}{b} \left((t - a)^2 + b^2 \pm r \sqrt{(t - a)^2 + b^2} \right) \right). \quad (9)$$

COMPARANDO RESULTADOS

- En el problema inicial se encontró que la ecuación de la parábola es:

$$y = \frac{(x - a)^2}{b} + b \quad (10)$$

- En la extensión se encuentra una familia de parábolas con ecuación:

$$y - d = \frac{d}{b^2}(x - a)^2 + b \quad (11)$$

- En la discusión previa se estableció que la ecuación del lugar geométrico es:

$$y = \frac{1}{b} \left((x - a)^2 + b^2 \pm r \sqrt{(x - a)^2 + b^2} \right). \quad (12)$$

- Nótese que “tomando límite” en las ecuaciones 11 y 12 se obtiene (10).

COMPARANDO RESULTADOS

- En el problema inicial se encontró que la ecuación de la parábola es:

$$y = \frac{(x - a)^2}{b} + b \quad (10)$$

- En la extensión se encuentra una familia de parábolas con ecuación:

$$y - d = \frac{d}{b^2}(x - a)^2 + b \quad (11)$$

- En la discusión previa se estableció que la ecuación del lugar geométrico es:

$$y = \frac{1}{b} \left((x - a)^2 + b^2 \pm r \sqrt{(x - a)^2 + b^2} \right). \quad (12)$$

- Nótese que “tomando límite” en las ecuaciones 11 y 12 se obtiene (10).

COMPARANDO RESULTADOS

- En el problema inicial se encontró que la ecuación de la parábola es:

$$y = \frac{(x - a)^2}{b} + b \quad (10)$$

- En la extensión se encuentra una familia de parábolas con ecuación:

$$y - d = \frac{d}{b^2}(x - a)^2 + b \quad (11)$$

- En la discusión previa se estableció que la ecuación del lugar geométrico es:

$$y = \frac{1}{b} \left((x - a)^2 + b^2 \pm r \sqrt{(x - a)^2 + b^2} \right). \quad (12)$$

- Nótese que “tomando límite” en las ecuaciones 11 y 12 se obtiene (10).

COMPARANDO RESULTADOS

- En el problema inicial se encontró que la ecuación de la parábola es:

$$y = \frac{(x - a)^2}{b} + b \quad (10)$$

- En la extensión se encuentra una familia de parábolas con ecuación:

$$y - d = \frac{d}{b^2}(x - a)^2 + b \quad (11)$$

- En la discusión previa se estableció que la ecuación del lugar geométrico es:

$$y = \frac{1}{b} \left((x - a)^2 + b^2 \pm r \sqrt{(x - a)^2 + b^2} \right). \quad (12)$$

- Nótese que “tomando límite” en las ecuaciones 11 y 12 se obtiene (10).

COMPARANDO RESULTADOS

- En el problema inicial se encontró que la ecuación de la parábola es:

$$y = \frac{(x - a)^2}{b} + b \quad (10)$$

- En la extensión se encuentra una familia de parábolas con ecuación:

$$y - d = \frac{d}{b^2}(x - a)^2 + b \quad (11)$$

- En la discusión previa se estableció que la ecuación del lugar geométrico es:

$$y = \frac{1}{b} \left((x - a)^2 + b^2 \pm r \sqrt{(x - a)^2 + b^2} \right). \quad (12)$$

- Nótese que “tomando límite” en las ecuaciones 11 y 12 se obtiene (10).

CONCLUSIONES Y EPÍLOGO

- La exploración, a cierta profundidad, de problemas utilizando un sistema computacional aporta elementos para identificar la potencialidad y limitaciones de éste.
- Utilizar un sistema computacional para resolver problemas permite establecer conexiones relevantes entre diferentes contenidos matemáticos (propiedades de configuraciones geométricas y procesos al límite).
- Epílogo: "Las computadoras igualarán la inteligencia humana en 20 años", La Jornada, febrero 21 2008.

CONCLUSIONES Y EPÍLOGO

- 1 La exploración, a cierta profundidad, de problemas utilizando un sistema computacional aporta elementos para identificar la potencialidad y limitaciones de éste.
- 2 Utilizar un sistema computacional para resolver problemas permite establecer conexiones relevantes entre diferentes contenidos matemáticos (propiedades de configuraciones geométricas y procesos al límite).
- 3 Epílogo: “Las computadoras igualarán la inteligencia humana en 20 años”, La Jornada, febrero 21 2008.

CONCLUSIONES Y EPÍLOGO

- 1 La exploración, a cierta profundidad, de problemas utilizando un sistema computacional aporta elementos para identificar la potencialidad y limitaciones de éste.
- 2 Utilizar un sistema computacional para resolver problemas permite establecer conexiones relevantes entre diferentes contenidos matemáticos (propiedades de configuraciones geométricas y procesos al límite).
- 3 Epílogo: “Las computadoras igualarán la inteligencia humana en 20 años”, La Jornada, febrero 21 2008.

CONCLUSIONES Y EPÍLOGO

- 1 La exploración, a cierta profundidad, de problemas utilizando un sistema computacional aporta elementos para identificar la potencialidad y limitaciones de éste.
- 2 Utilizar un sistema computacional para resolver problemas permite establecer conexiones relevantes entre diferentes contenidos matemáticos (propiedades de configuraciones geométricas y procesos al límite).
- 3 **Epílogo: “Las computadoras igualarán la inteligencia humana en 20 años”, La Jornada, febrero 21 2008.**