Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
Área Académica de Matemáticas y Física

Análisis de Conjuntos Autosimilares

Sergio Arturo Hernández Álvarez

CIMA-LIMA

25 de mayo de 2011

Contenido

Contenido

Contenido

Contenido

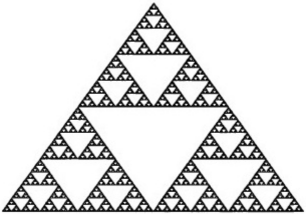
Planteamiento del Problema

Generalmente, estamos acostumbrados a hablar de ecuaciones diferenciales definidas sobre conjuntos que, a nuestro parecer, aparecen de forma natural...

- ¿Que pensaramos si quisiramos definirlas sobre conjuntos no tan usuales?, tales como:

- ¿Que pensaramos si quisiramos definirlas sobre conjuntos no tan usuales?, tales como:
  -

- ¿Que pensaramos si quisiramos definirlas sobre conjuntos no tan usuales?, tales como:

- 

Contracción

Sea $X = (X, d)$ un espacio métrico. Un mapeo $T : X \to X$ es llamada *contracción* en X si existe real positivo $\alpha < 1$ (llamada razón de contracción) tal que para todas $x, y \in X$

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y)$$

En el caso en que se de la igualdad, diremos que T es una contracción similar (similaridad).

Conjunto Autosimilar

Decimos que $A \subset X$ es un conjunto *autosimilar*, si existen similaridades T_i, con razónes de contracción α_i, $i = 1, ..n$ tales que

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} T_i(A)$$

Teorema del Punto Fijo de Banach

Sea (X,d) un espacio métrico completo y $T : X \to X$ una *contracción*. Entonces T tiene un único punto fijo.

Prueba

Sea $x_0 \in X$, vamos a considerar la sucesión (X_n), donde $X_n = T(X_{n-1})$, es decir,

$$x_1 = Tx_0, \quad x_2 = Tx_1 = T^2x_0, \ldots, x_n = Tx_{n-1} = T^nx_0, \ldots$$

Vamos a ver que (X_n) es de Cauchy.Primero observe que:

Prueba

Sea $x_0 \in X$, vamos a considerar la sucesión (X_n), donde $X_n = T(X_{n-1})$, es decir,

$$x_1 = Tx_0, \quad x_2 = Tx_1 = T^2 x_0, \ldots, x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0, \ldots$$

Vamos a ver que (X_n) es de Cauchy.Primero observe que:

$$d(x_{m+1}, x_m)$$

Prueba

Sea $x_0 \in X$, vamos a considerar la sucesión (X_n), donde $X_n = T(X_{n-1})$, es decir,

$$x_1 = Tx_0, \quad x_2 = Tx_1 = T^2x_0, \ldots, x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0, \ldots$$

Vamos a ver que (X_n) es de Cauchy.Primero observe que:

$$d(x_{m+1}, x_m) \quad = \quad d(Tx_m, Tx_{m-1})$$

Prueba

Sea $x_0 \in X$, vamos a considerar la sucesión (X_n), donde $X_n = T(X_{n-1})$, es decir,

$$x_1 = Tx_0, \quad x_2 = Tx_1 = T^2x_0, \ldots, x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0, \ldots$$

Vamos a ver que (X_n) es de Cauchy.Primero observe que:

$$\begin{aligned} d(x_{m+1}, x_m) &= d(Tx_m, Tx_{m-1}) \\ &\leq \alpha d(x_m, x_{m-1}) \end{aligned}$$

Prueba

Sea $x_0 \in X$, vamos a considerar la sucesión (X_n), donde $X_n = T(X_{n-1})$, es decir,

$$x_1 = Tx_0, \quad x_2 = Tx_1 = T^2x_0, \ldots, x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0, \ldots$$

Vamos a ver que (X_n) es de Cauchy.Primero observe que:

$$\begin{aligned} d(x_{m+1}, x_m) &= d(Tx_m, Tx_{m-1}) \\ &\leq \alpha d(x_m, x_{m-1}) = \alpha d(Tx_{m-1}, Tx_{m-2}) \end{aligned}$$

Prueba

Sea $x_0 \in X$, vamos a considerar la sucesión (X_n), donde $X_n = T(X_{n-1})$, es decir,

$$x_1 = Tx_0, \quad x_2 = Tx_1 = T^2x_0, \ldots, x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0, \ldots$$

Vamos a ver que (X_n) es de Cauchy.Primero observe que:

$$\begin{array}{rcl} d(x_{m+1}, x_m) & = & d(Tx_m, Tx_{m-1}) \\ & \leq & \alpha d(x_m, x_{m-1}) = \alpha d(Tx_{m-1}, Tx_{m-2}) \\ & \leq & \alpha^2 d(x_{m-1}, x_{m-2}) \end{array}$$

Prueba

Sea $x_0 \in X$, vamos a considerar la sucesión (X_n), donde $X_n = T(X_{n-1})$, es decir,

$$x_1 = Tx_0, \quad x_2 = Tx_1 = T^2 x_0, \ldots, x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0, \ldots$$

Vamos a ver que (X_n) es de Cauchy.Primero observe que:

$$\begin{aligned} d(x_{m+1}, x_m) &= d(Tx_m, Tx_{m-1}) \\ &\leq \alpha d(x_m, x_{m-1}) = \alpha d(Tx_{m-1}, Tx_{m-2}) \\ &\leq \alpha^2 d(x_{m-1}, x_{m-2}) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Prueba

Sea $x_0 \in X$, vamos a considerar la sucesión (X_n), donde $X_n = T(X_{n-1})$, es decir,

$$x_1 = Tx_0, \quad x_2 = Tx_1 = T^2 x_0, \ldots, x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0, \ldots$$

Vamos a ver que (X_n) es de Cauchy.Primero observe que:

$$\begin{aligned} d(x_{m+1}, x_m) &= d(Tx_m, Tx_{m-1}) \\ &\leq \alpha d(x_m, x_{m-1}) = \alpha d(Tx_{m-1}, Tx_{m-2}) \\ &\leq \alpha^2 d(x_{m-1}, x_{m-2}) \\ &\vdots \\ &\leq \alpha^m d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

Ahora, para $n > m$,

$$d(x_n, x_m)$$

Ahora, para $n > m$,

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \ldots + d(x_{n-1}, x_n)$$

Ahora, para $n > m$,

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \ldots + d(x_{n-1}, x_n) \\ &\leq \alpha^m d(x_1, x_0) + \alpha^{m+1} d(x_1, x_0) + \ldots \alpha^{n-1} d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

Ahora, para $n > m$,

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \ldots + d(x_{n-1}, x_n) \\ &\leq \alpha^m d(x_1, x_0) + \alpha^{m+1} d(x_1, x_0) + \ldots \alpha^{n-1} d(x_1, x_0) \\ &= (\alpha^m + \alpha^{m+1} + \ldots + \alpha^{n-1}) d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

Ahora, para $n > m$,

$$\begin{array}{rcl} d(x_n, x_m) & \leq & d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \ldots + d(x_{n-1}, x_n) \\ & \leq & \alpha^m d(x_1, x_0) + \alpha^{m+1} d(x_1, x_0) + \ldots \alpha^{n-1} d(x_1, x_0) \\ & = & (\alpha^m + \alpha^{m+1} + \ldots + \alpha^{n-1}) d(x_0, x_1) \\ & = & \alpha^m (1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^{n-m-1}) d(x_0, x_1) \end{array}$$

Ahora, para $n > m$,

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \ldots + d(x_{n-1}, x_n) \\ &\leq \alpha^m d(x_1, x_0) + \alpha^{m+1} d(x_1, x_0) + \ldots \alpha^{n-1} d(x_1, x_0) \\ &= (\alpha^m + \alpha^{m+1} + \ldots + \alpha^{n-1}) d(x_0, x_1) \\ &= \alpha^m (1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^{n-m-1}) d(x_0, x_1) \\ &= \alpha^m \left(\frac{1 - \alpha^{n-m}}{1 - \alpha} \right) d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

Ahora, para $n > m$,

$$\begin{aligned}
d(x_n, x_m) &\leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \ldots + d(x_{n-1}, x_n) \\
&\leq \alpha^m d(x_1, x_0) + \alpha^{m+1} d(x_1, x_0) + \ldots \alpha^{n-1} d(x_1, x_0) \\
&= (\alpha^m + \alpha^{m+1} + \ldots + \alpha^{n-1}) d(x_0, x_1) \\
&= \alpha^m (1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^{n-m-1}) d(x_0, x_1) \\
&= \alpha^m \left(\frac{1 - \alpha^{n-m}}{1 - \alpha} \right) d(x_1, x_0)
\end{aligned}$$

Luego, como $0 < \alpha < 1$ tenemos que $1 - \alpha^{n-m} < 1$. Por tanto,

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{\alpha^m}{1 - \alpha} d(x_0, x_1)$$

Por último, tomando m suficientemente grande podemos hacer el lado izquierdo de la desigualdad tan pequeo como queramos, es decir,

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

Por último, tomando m suficientemente grande podemos hacer el lado izquierdo de la desigualdad tan pequeo como queramos, es decir,

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

Concluimos entonces que (X_n) es de Cauchy, y como X es completo, tenemos que (X_n) converge, digamos a x.

Por último, tomando m suficientemente grande podemos hacer el lado izquierdo de la desigualdad tan pequeo como queramos, es decir,

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

Concluimos entonces que (X_n) es de Cauchy, y como X es completo, tenemos que (X_n) converge, digamos a x.
Veremos ahora que x es un punto fijo para T:

Por último, tomando m suficientemente grande podemos hacer el lado izquierdo de la desigualdad tan pequeo como queramos, es decir,

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

Concluimos entonces que (X_n) es de Cauchy, y como X es completo, tenemos que (X_n) converge, digamos a x.
Veremos ahora que x es un punto fijo para T:

$$d(x, Tx)$$

Por último, tomando m suficientemente grande podemos hacer el lado izquierdo de la desigualdad tan pequeo como queramos, es decir,

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

Concluimos entonces que (X_n) es de Cauchy, y como X es completo, tenemos que (X_n) converge, digamos a x.
Veremos ahora que x es un punto fijo para T:

$$d(x, Tx) \leq d(x, x_m) + d(x_m, Tx)$$

Por último, tomando m suficientemente grande podemos hacer el lado izquierdo de la desigualdad tan pequeo como queramos, es decir,

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

Concluimos entonces que (X_n) es de Cauchy, y como X es completo, tenemos que (X_n) converge, digamos a x.
Veremos ahora que x es un punto fijo para T:

$$d(x, Tx) \leq d(x, x_m) + d(x_m, Tx) \leq d(x, x_m) + \alpha d(x_{m-1}, x)$$

Por último, tomando m suficientemente grande podemos hacer el lado izquierdo de la desigualdad tan pequeo como queramos, es decir,

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

Concluimos entonces que (X_n) es de Cauchy, y como X es completo, tenemos que (X_n) converge, digamos a x.
Veremos ahora que x es un punto fijo para T:

$$d(x, Tx) \leq d(x, x_m) + d(x_m, Tx) \leq d(x, x_m) + \alpha d(x_{m-1}, x)$$

Pero, como $X_n \to x$ tenemos que $d(x, Tx) \to 0$. entonces tenemos que x es un punto fijo para T.

Por último, tomando m suficientemente grande podemos hacer el lado izquierdo de la desigualdad tan pequeo como queramos, es decir,

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

Concluimos entonces que (X_n) es de Cauchy, y como X es completo, tenemos que (X_n) converge, digamos a x.
Veremos ahora que x es un punto fijo para T:

$$d(x, Tx) \leq d(x, x_m) + d(x_m, Tx) \leq d(x, x_m) + \alpha d(x_{m-1}, x)$$

Pero, como $X_n \to x$ tenemos que $d(x, Tx) \to 0$. entonces tenemos que x es un punto fijo para T.
Para ver que el punto fijo es único, supongamos que $\exists \tilde{x}$ tal que $T\tilde{x} = \tilde{x}$. Tomemos:

$$d(x, \tilde{x})$$

Por último, tomando m suficientemente grande podemos hacer el lado izquierdo de la desigualdad tan pequeo como queramos, es decir,

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

Concluimos entonces que (X_n) es de Cauchy, y como X es completo, tenemos que (X_n) converge, digamos a x.
Veremos ahora que x es un punto fijo para T:

$$d(x, Tx) \leq d(x, x_m) + d(x_m, Tx) \leq d(x, x_m) + \alpha d(x_{m-1}, x)$$

Pero, como $X_n \rightarrow x$ tenemos que $d(x, Tx) \rightarrow 0$. entonces tenemos que x es un punto fijo para T.
Para ver que el punto fijo es único, supongamos que $\exists \tilde{x}$ tal que $T\tilde{x} = \tilde{x}$. Tomemos:

$$d(x, \tilde{x}) = d(Tx, T\tilde{x})$$

Por último, tomando m suficientemente grande podemos hacer el lado izquierdo de la desigualdad tan pequeo como queramos, es decir,

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

Concluimos entonces que (X_n) es de Cauchy, y como X es completo, tenemos que (X_n) converge, digamos a x.
Veremos ahora que x es un punto fijo para T:

$$d(x, Tx) \leq d(x, x_m) + d(x_m, Tx) \leq d(x, x_m) + \alpha d(x_{m-1}, x)$$

Pero, como $X_n \to x$ tenemos que $d(x, Tx) \to 0$. entonces tenemos que x es un punto fijo para T.
Para ver que el punto fijo es único, supongamos que $\exists \tilde{x}$ tal que $T\tilde{x} = \tilde{x}$. Tomemos:

$$d(x, \tilde{x}) = d(Tx, T\tilde{x}) \leq \alpha d(x, \tilde{x}) \leq \ldots \to 0$$

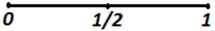
pues $\alpha < 1$ por tanto, $x = \tilde{x}$ $\square$

Análisis del Intervalo Unitario (I)

Considere las *similaridades* $F_0 x = \frac{1}{2}x$ y $F_1 x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$, que mandan a I a su mitad izquierda y derecha respectivamente.

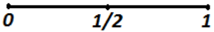
Análisis del Intervalo Unitario (I)

Considere las *similaridades* $F_0 x = \frac{1}{2}x$ y $F_1 x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$, que mandan a I a su mitad izquierda y derecha respectivamente.



Análisis del Intervalo Unitario (I)

Considere las *similaridades* $F_0 x = \frac{1}{2}x$ y $F_1 x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$, que mandan a I a su mitad izquierda y derecha respectivamente.



Luego, la *identidad autosimilar* de I es:

$$I = \bigcup_{i=0}^{1} F_i(I)$$

Pero no son las únicas similaridades que podemos tener para hacer que I sea un conjunto autosimilar, están por ejemplo $G_0x = \frac{1}{3}x$, $G_1x = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$, $G_2x = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ y obtenemos la identidad autosimilar:

$$I = \bigcup_{i=0}^{2} G_i(I)$$

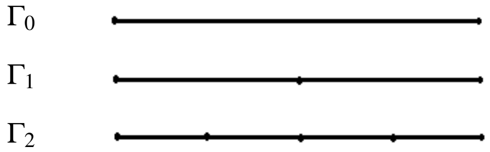
Pero no son las únicas similaridades que podemos tener para hacer que I sea un conjunto autosimilar, están por ejemplo $G_0x = \frac{1}{3}x$, $G_1x = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$, $G_2x = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ y obtenemos la identidad autosimilar:

$$I = \bigcup_{i=0}^{2} G_i(I)$$

Para este trabajo consideraremos las primeras similaridades mostradas.
Llamaremos vértices a los puntos obtenidos al aplicarle las similaridades a I. Por ejemplo, $V_0 = \{0,1\}, V_1 = \{0, \frac{1}{2}, 1\}, \ldots,$ inductivamente obtenemos que

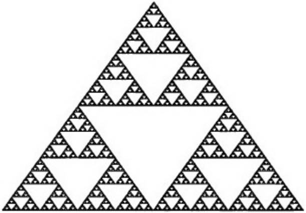
$$V_m = \bigcup_{i=0}^{1} F_i(V_{m-1})$$

Y si tenemos vértices, pues ahora podemos definir Γ_m, una gráfica con vértices V_m, por ejemplo:



Triángulo de Sierpinski SG

Ahora consideremos las tres similaridades $F_i x = \frac{1}{2}(x - q_i) + q_i, \quad i = 0, 1, 2$ y donde $\{q_i\}$ son los vértices del triángulo:



Luego, tenemos que:

$$SG = \bigcup_{i=0}^{2} F_i(SG),$$

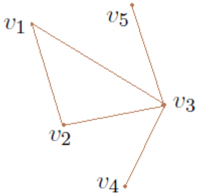
es decir, el Triángulo de Sierpinski es un conjunto autosimilar. Análogamente, llamaremos vértices a los puntos obtenidos al aplicarle las similaridades al SG, iniciando con $V_0 = \{tres\ \ vertices\ \ del\ \ triangulo\}$, y asi sucesivamente. De igual forma se cumple la igualdad

$$V_m = \bigcup_{i=0}^{1} F_i(V_{m-1})$$

Gráfica de Energías

Dada una gráfica G finita, conexa y una función real u en sus vértices, definimos la *gráfica de energías* como

$$E_G(u) = \sum_{x \sim y} (u(x) - u(y))^2$$



Ahora, suponga $G \subseteq G'$ y u una función en los vértices de G.

Entonces existen varias extensiones de u a los vértices de G'.

El problema ahora es encontrar una extensión u' de u tal que se minimice la energía. A tal función se le llamará *extensión armónica.*

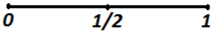
Energía en I

Consideremos primero la gráfica Γ_0 que solo consiste de los vértices $\{0,1\}$ y u una función definida en ellos:

asi que la energía queda expresada como

$$E_0(u) = (u(1) - u(0))^2$$

Pero ahora tomemos Γ_1



claramente $\Gamma_0 \subseteq \Gamma_1$ y tenemos que

$$E_1(u') = (u'(1) - u'(\frac{1}{2}))^2 + (u'(\frac{1}{2}) - u'(0))^2$$

pero si tomamos a u' como una extensión de u, entonces tenemos que $u'(1) = u(1)$ y $u'(0) = u(0)$, pero nos falta ver quien es $u'(\frac{1}{2})$ para hacer que $E_1(u')$ sea mínima.
Para este caso basta tomar $u'(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}(u(1) + u(0))$, es decir,

$$E_1(u') = \frac{1}{2}E_0(u)$$

- Robert S. Strichartz, Differential Equations on Fractals A Tutorial, Princeton University Press, *Princeton and Oxford*.
- Erwin Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*, University of Windsor, USA.