

1er curso CUF de Álgebra lineal y aplicaciones
UAEH, 2010

21 de junio al 2 de julio

Parte 2:
Ejemplos y aplicaciones

Expositor de la parte 2:

Jorge Viveros

CIMA-MF1-01 · jviveros@uaeh.edu.mx · CIMA · UAEH · MX



Nota

En las siguientes páginas se mencionan algunas aplicaciones del álgebra lineal, mismas que se presentaron dentro del marco del primer curso intersemestral del CUF sobre álgebra lineal y sus aplicaciones, del 21 de junio al 2 de julio del 2010 en la UAEH. La primera parte de este curso (del 21 al 25 de junio), fué impartida por el [Dr. Fernando Barrera Mora](#) del Centro de Investigación en Matemáticas ([CIMA](#)) de la UAEH. El presente documento no contiene el material de la primera parte y se enfoca únicamente en la segunda parte del curso (del 28 de junio al 2 de julio), la cual estuvo a mi cargo.

JV
Mineral de la Reforma, Julio 26 del 2010.

Contenido

1. Geometría de las transformaciones lineales
2. Grafos, digrafos y sus aplicaciones
3. Descomposición en valores singulares (DVS)
4. Tópicos para la siguiente edición de este curso.

1. Geometría de las transformaciones lineales

Objetivos:

1. detectar direcciones invariantes de las transformaciones lineales en el plano.
2. Adquirir una idea cualitativa de la deformación del espacio.

$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ **transformación lineal:** $\forall X, X_1, X_2 \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \mathbb{R}$ se tiene que,

1. $T(X_1 + X_2) = T(X_1) + T(X_2)$

2. $T(\alpha X) = \alpha T(X)$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = X \rightarrow T(X) = AX = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_2 + dx_2 \end{bmatrix} = Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Pregunta: ¿Cómo transforma T objetos geométricos básicos tales como líneas rectas que continenen al origen y círculos unitarios con centro también en el origen?

1 . Geometría de las transformaciones lineales

Regiones de interés en el espacio

Regiones invariantes: $S = \{ X : T(X) \in S \}$

Regiones que se “colapsan:” $K = \{ X : T(X) = 0 \}$ (núcleo o “kernel” de T)

Dentro de las regiones invariantes nos interesarán, en particular, aquellas tales que para cada $X \in S$, $T(X) = \lambda X$. Esto motiva las siguientes definiciones:

Definición 1: sea A una matriz cuadrada de tamaño n . X (vector n -dimensional) se dice un **eigenvector** de A con **eigenvalor** λ (escalar), si y sólo si $AX = \lambda X$. Un tal X también se denomina **vector propio** de A ; similarmente, λ suele denominarse con frecuencia **valor propio** de A .

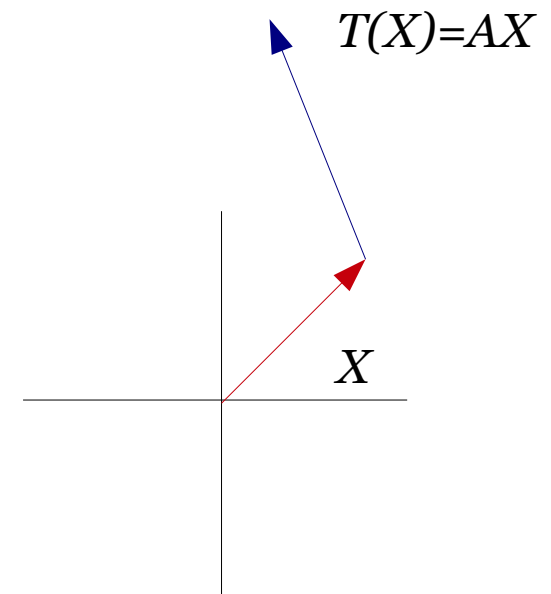
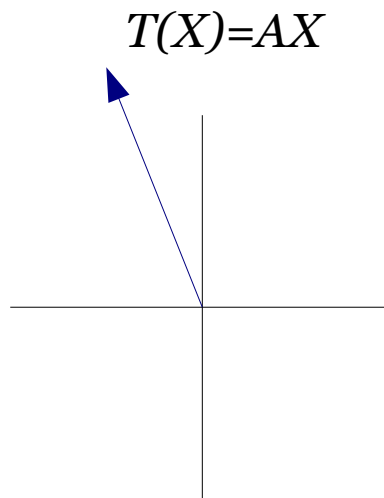
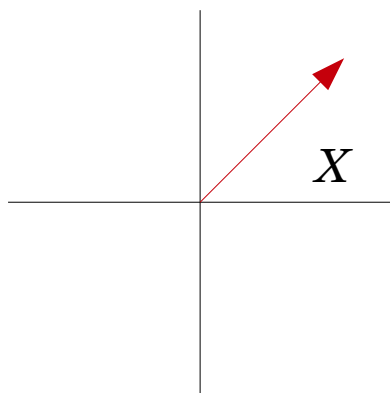
Definición 2: si $E(\lambda) := \{ X : AX = \lambda X \}$ es tal que el subespacio trivial $\{0\}$ es un subespacio propio de $E(\lambda)$, entonces a este último se le denomina **subespacio propio de λ** .

En las siguientes páginas, dada una matriz cuadrada de tamaño dos, A , ubicaremos visualmente sus subespacios propios.

1. Geometría de las transformaciones lineales

Procedimiento:

1. Dibujar un “ n -erizo unitario” (n rayos de longitud uno que emanan del origen)
2. Obtener las imágenes de cada uno de estos rayos bajo la transformación lineal T .
3. Concatenar “cabeza con cola” cada rayo unitario (espina del erizo) con su imagen (en ese orden). Cuando un rayo y su imagen se hallen alineados habremos encontrado una dirección invariante de T , es decir, un dirección propia.



1 . Geometría de las transformaciones lineales

Los ejemplos restantes de esta primera sección constan de dos partes.

En la *primera parte* se presenta la imagen (fig. 2) de un erizo unitario (fig. 1) bajo una transformación lineal T dada por una matriz A . La figura 3 representa la concatenación de $n=20$ rayos unitarios y sus correspondientes imágenes; es decir, se dibujaron, cabeza-con-cola, cada uno de los rayos del erizo unitario (en rojo) seguidos por sus imágenes (en azul). La figura 4 representa la circunferencia unitaria (en rojo) y su imagen bajo T (en azul). Todas las imágenes de esta primera parte fueron creadas con el programa `vlt.m` Mayor información sobre las figs. 3 y 4 se presenta después de las gráficas.

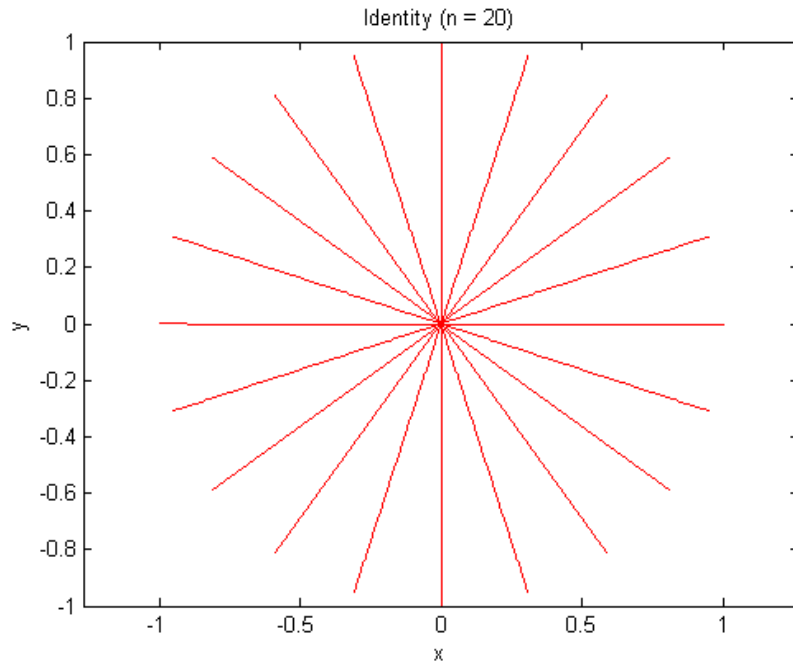
En la *segunda parte* se presenta una imagen `.jpg` (reloj) y su transformación bajo T . La imagen de la transformación fué creada utilizando el archivo `imtran.m`
El ejemplo 3 no tiene imagen asociada pues esta no es apreciable debido a las características particulares de la transformación T .

Las instrucciones de uso de los archivos `vlt.m` e `imtran.m` se encuentran dentro de los programas mismos (se debe emplear Matlab o bien **Octave** para ejecutarlos).

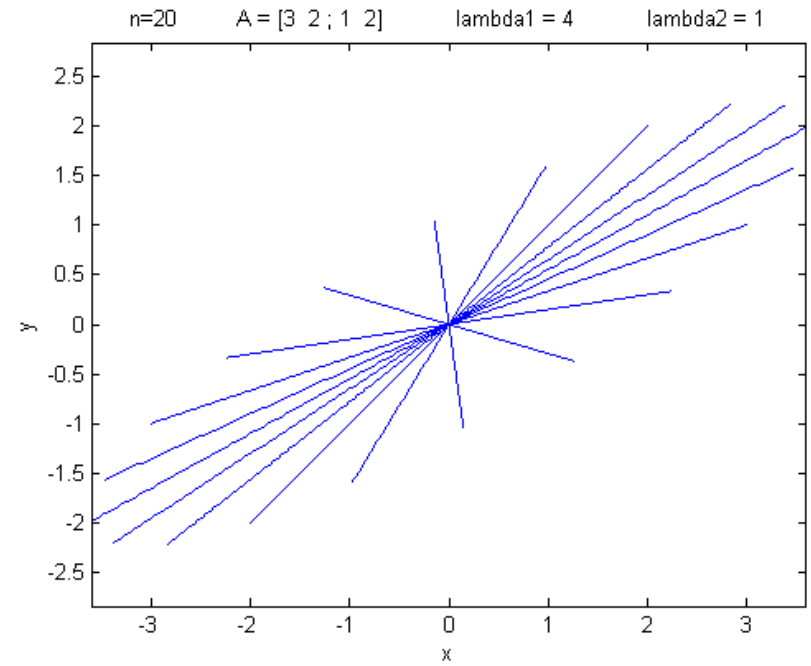
NOTA: *los programas parecen correr mas lentamente en Octave que en Matlab.*

Ejemplo 1. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$; $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 1$. En la fig. 4, P_1' (P_2') es la imagen de P_1 (P_2)

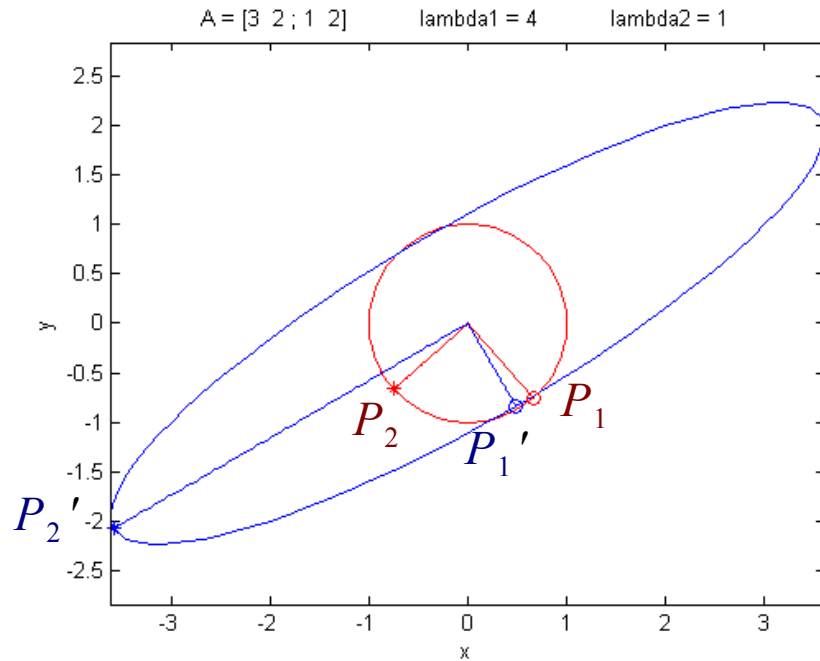
1



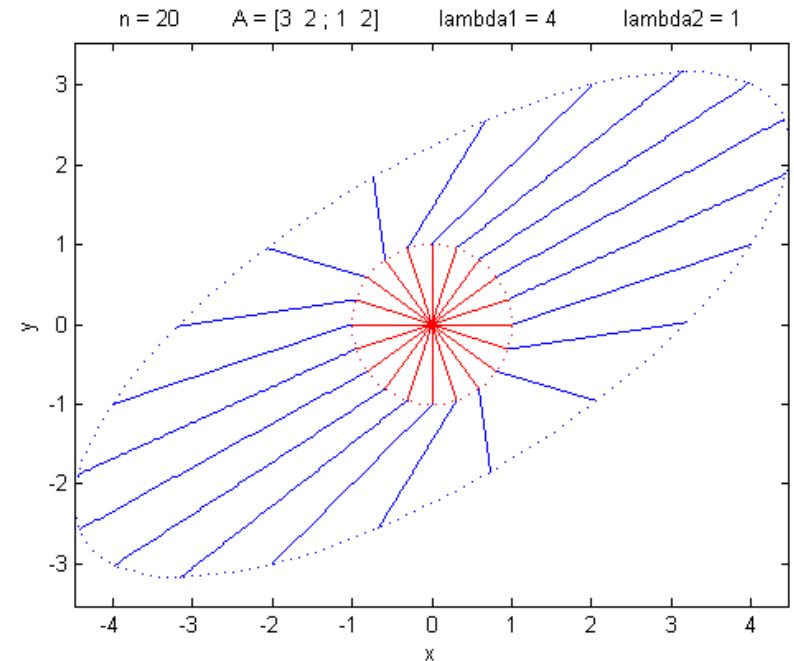
2



4



3

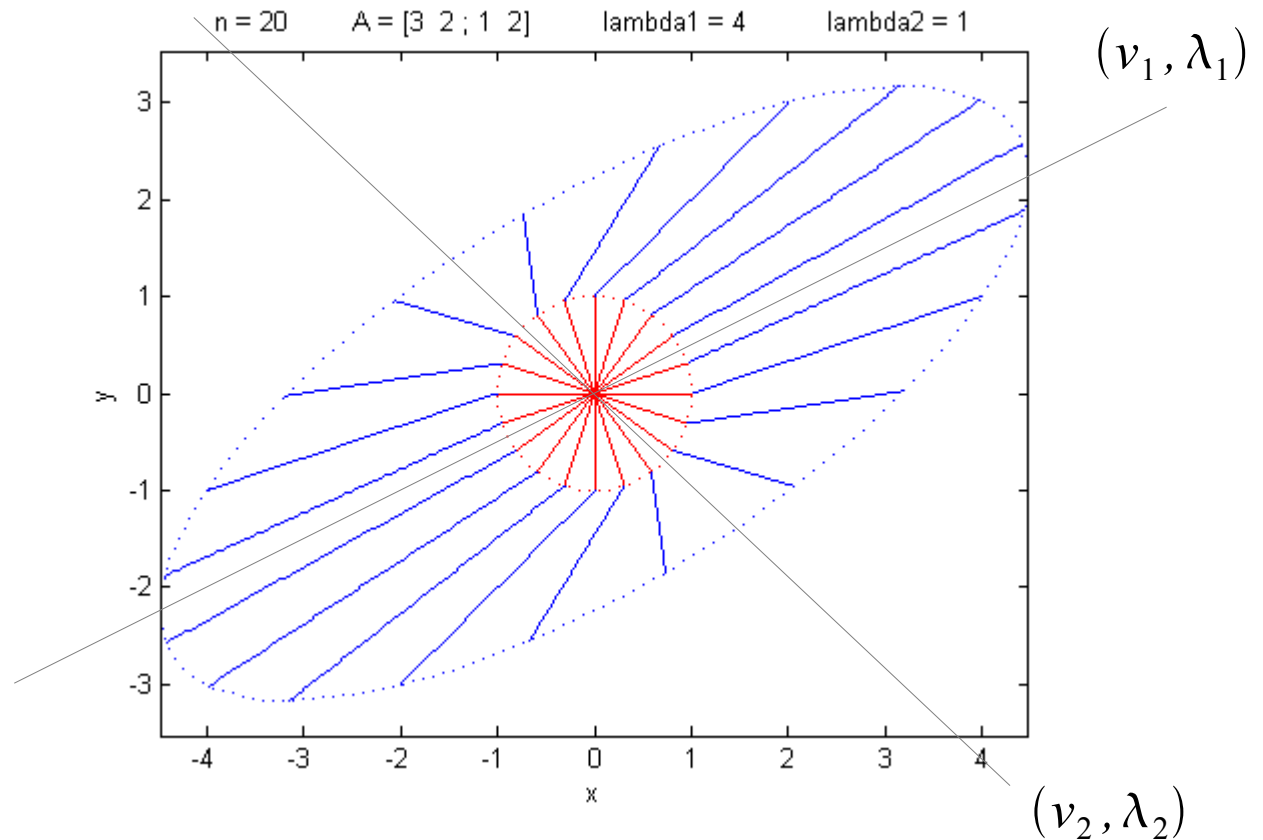


Ejemplo 1. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$; $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 1$

Eigenvectores:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\lambda_1 = 4)$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (\lambda_2 = 1)$$



Note que las direcciones propias de A (líneas en gris) no tienen por qué coincidir con los semiejes de la imagen del círculo unitario bajo A (fig. 4, páginas siguientes), los cuales son siempre perpendiculares y son las direcciones propias asociadas con $A^t A$; de hecho, A podría no tener direcciones propias asociadas, como lo es en el caso de eigenvalores con parte imaginaria distinta de cero (ejemplo 2).

Ejemplo 1. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; \lambda_1 = 4, \lambda_2 = 1$

Ahora demostramos que la imagen del círculo unitario, C , es una elipse, C' , y calculamos los tamaños de los semiejes mayor y menor. Usaremos un sistema de coordenadas adecuado.

Observemos que A es invertible y que de hecho $A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

Círculo unitario: $C = \{X = [x_1 \ x_2]^t : X^t X = x_1^2 + x_2^2 = 1\}$

Imagen del círculo unitario: $C' = \{Y = [y_1 \ y_2]^t : Y = AX \text{ y } X \in C\}$

Ahora, si $Y = AX$ entonces $X = A^{-1}Y$, luego $1 = X^t X = (A^{-1}Y)^t (A^{-1}Y) = Y^t (A^{-t} A^{-1}) Y$ (*)

Un cálculo sencillo muestra que:

$A^{-t} A^{-1} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -7 & 13 \end{bmatrix}$, cuyos eigenvalores son: $\mu_1 = 9 + \sqrt{65}$, $\mu_2 = 9 - \sqrt{65}$

y eigenvectores unitarios: $w_1 = \frac{1}{\sqrt{130 - 8\sqrt{65}}} \begin{bmatrix} -4 + \sqrt{65} \\ -7 \end{bmatrix}$, $w_2 = \frac{1}{\sqrt{130 - 8\sqrt{65}}} \begin{bmatrix} -7 \\ 4 - \sqrt{65} \end{bmatrix}$

Ejemplo 1. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; \lambda_1 = 4, \lambda_2 = 1$

El cambio de variables $Y = QZ$ en donde $Q = [w_1 \ w_2]$ y $Z = [z_1 \ z_2]^t$ da como resultado, substituyendo en (*):

$$1 = Y^t (A^{-t} A^{-1}) Y = Z^t Q^t (A^{-t} A^{-1}) Q Z = \mu_1 z_1^2 + \mu_2 z_2^2 = \frac{z_1^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{\mu_1}}\right)^2} + \frac{z_2^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{\mu_2}}\right)^2}$$

la cual es la ecuación de una elipse en forma canónica en la base $\{w_1, w_2\}$

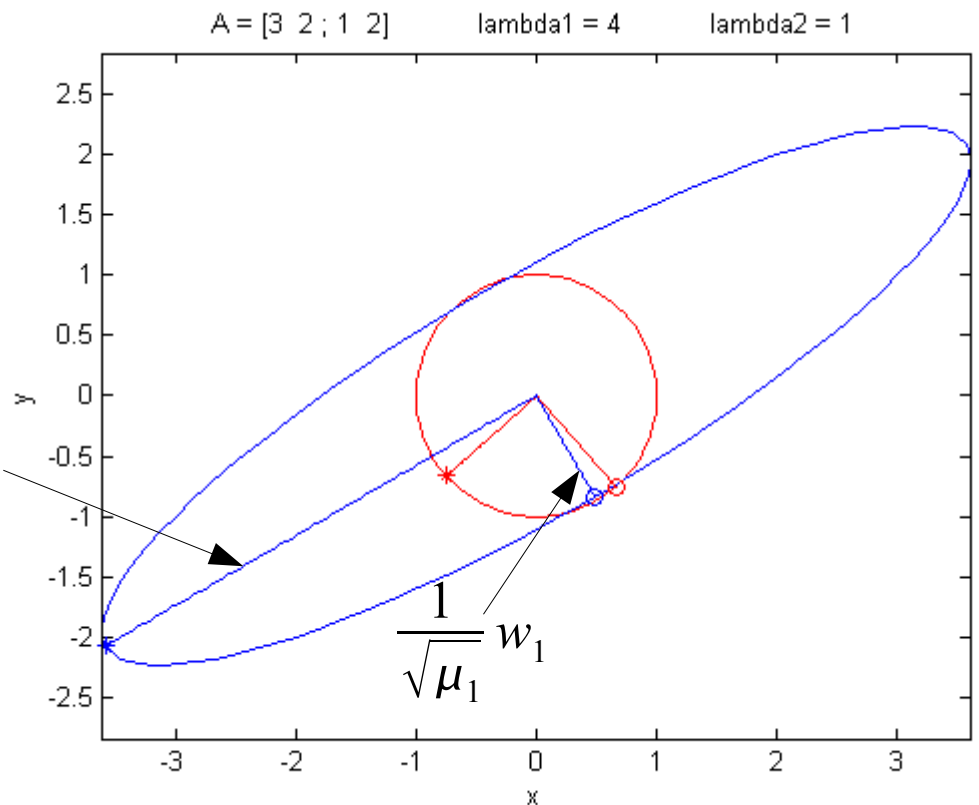
con semiejes mayor $\frac{1}{\sqrt{\mu_1}} \approx 0.968$

y menor $\frac{1}{\sqrt{\mu_2}} \approx 4.131$

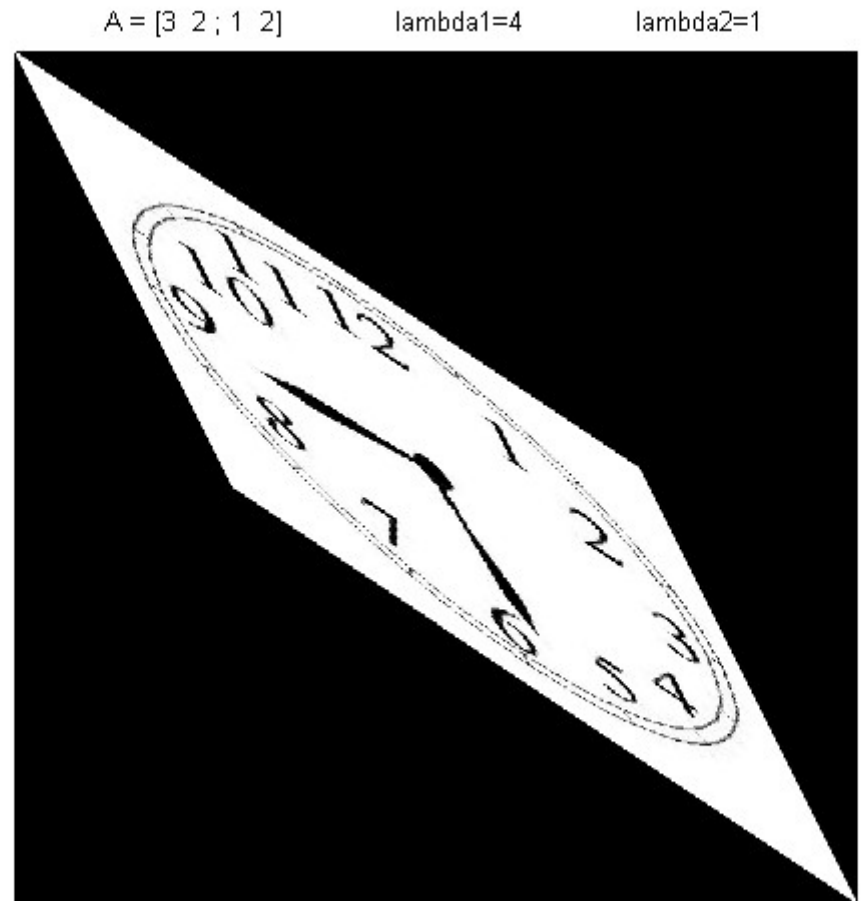
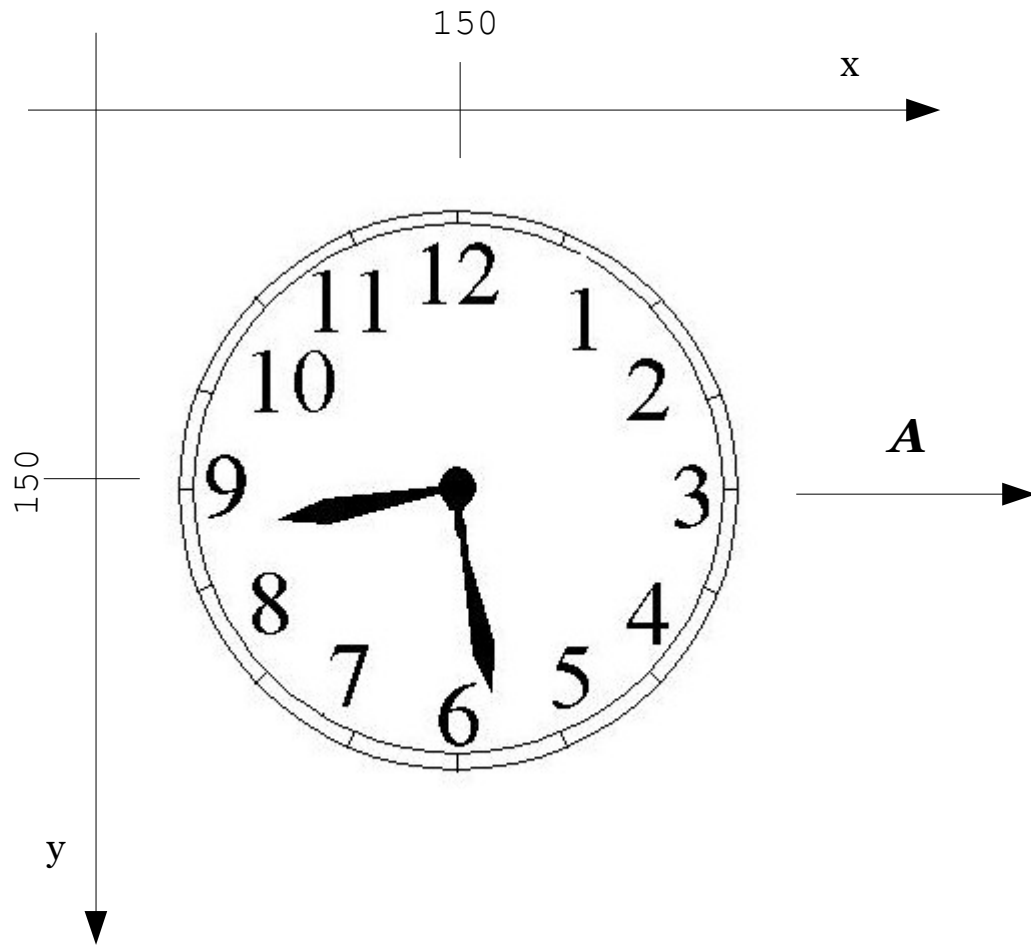
$$\frac{1}{\sqrt{\mu_2}} w_2$$

Nota: Una forma alternativa (quizás incluso mas natural) de encontrar la orientación de la elipse en azul así como los tamaños de sus semiejes, se discute en el archivo

vlt.m



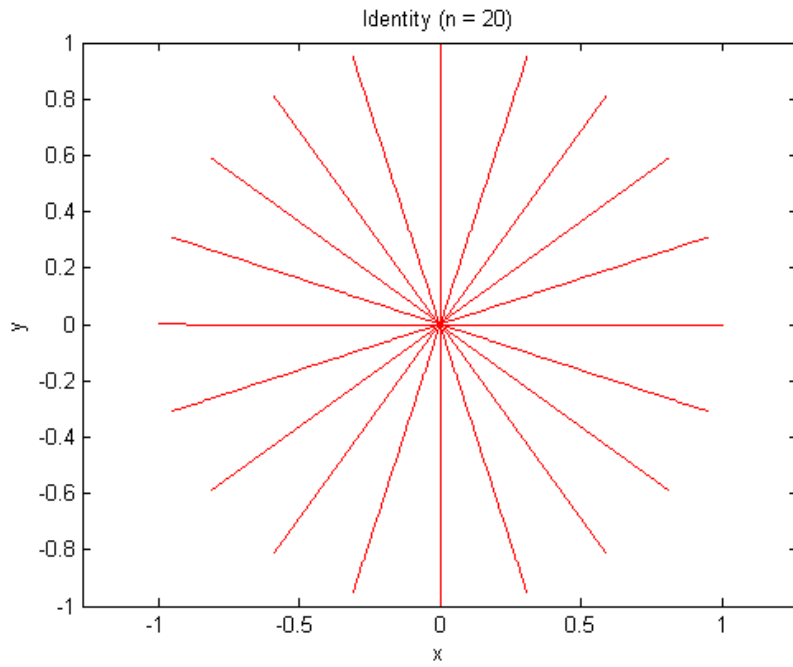
Ejemplo 1. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; \lambda_1 = 4, \lambda_2 = 1$



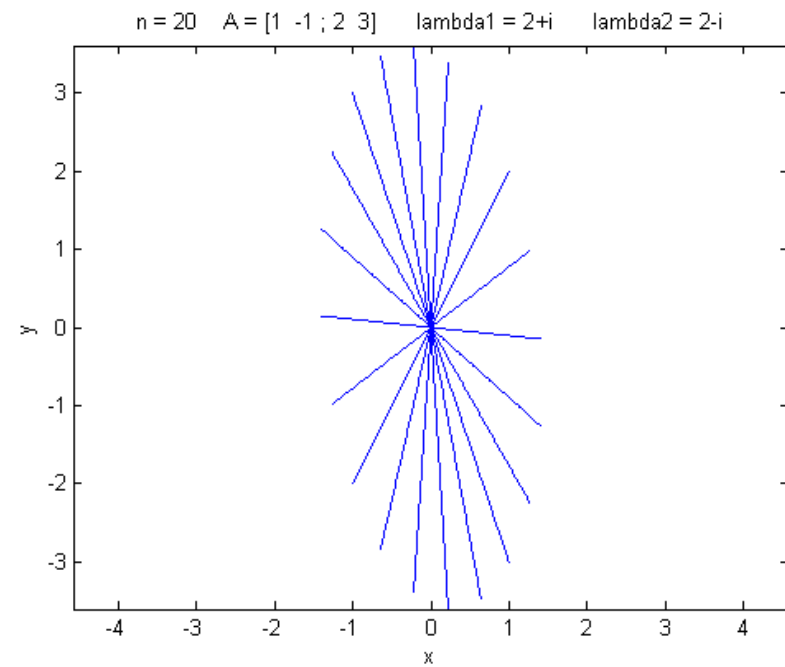
Note: image has been scaled down to 67% of its original size

Ejemplo 2. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}; \lambda_1 = 2+i, \lambda_2 = 2-i$

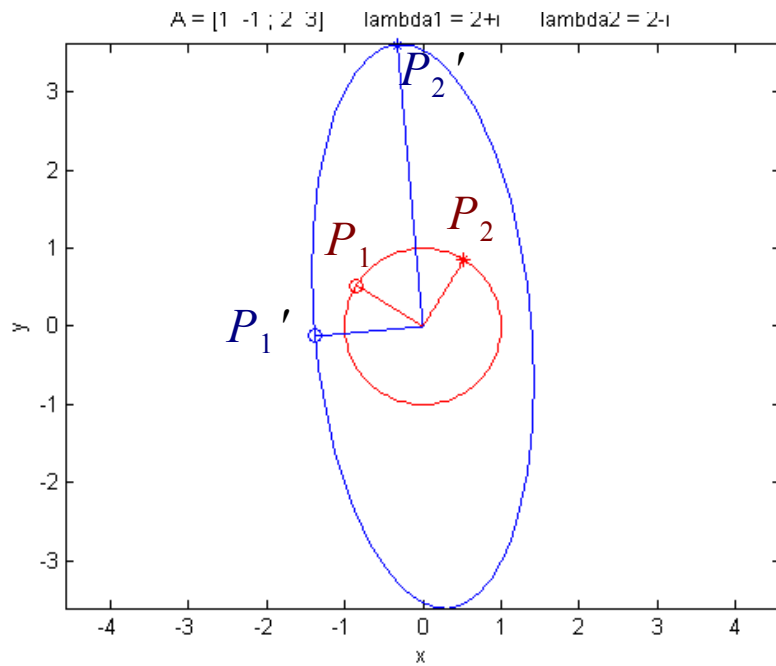
1



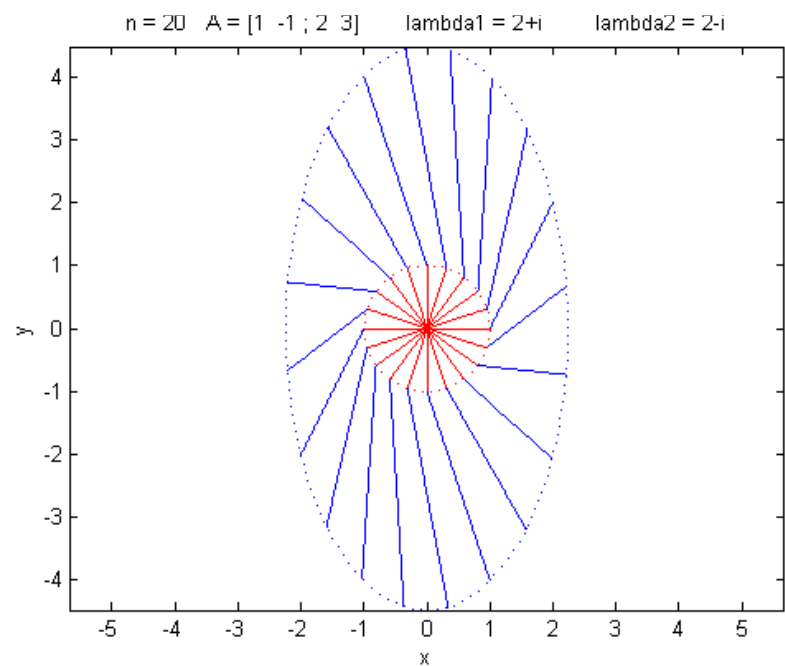
2



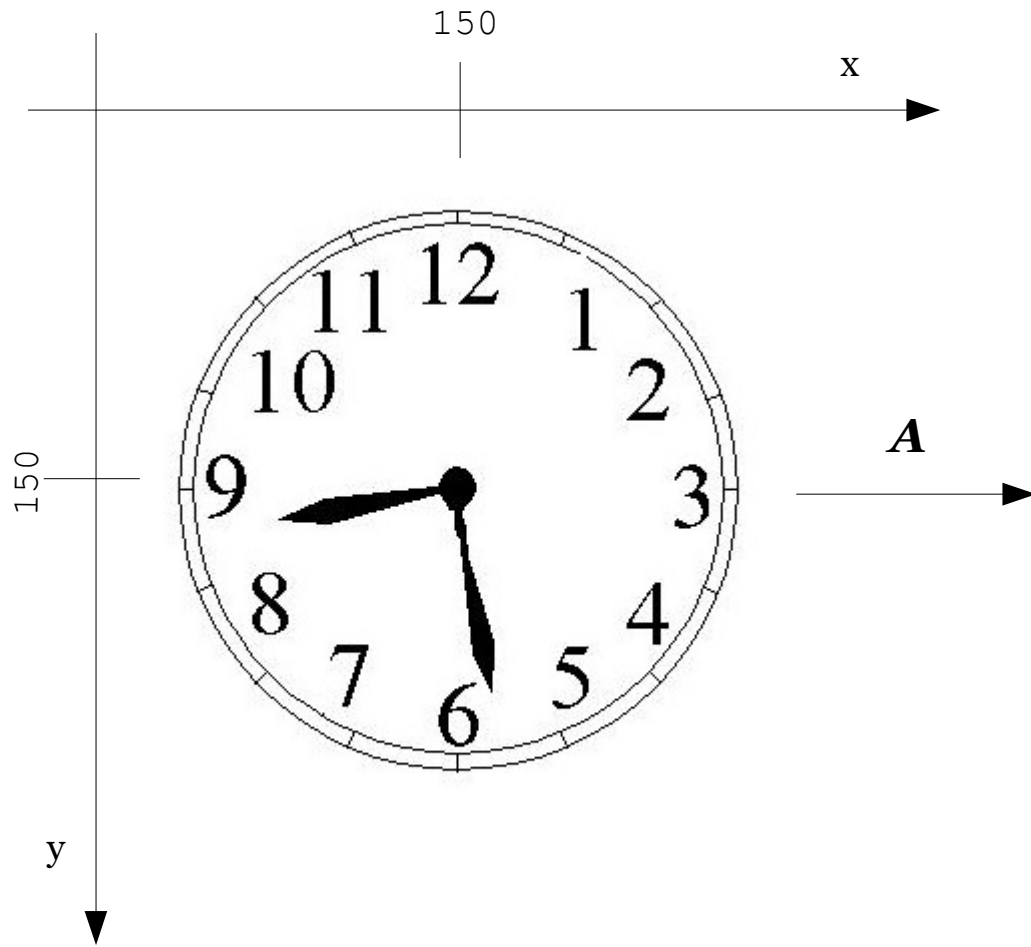
4



3



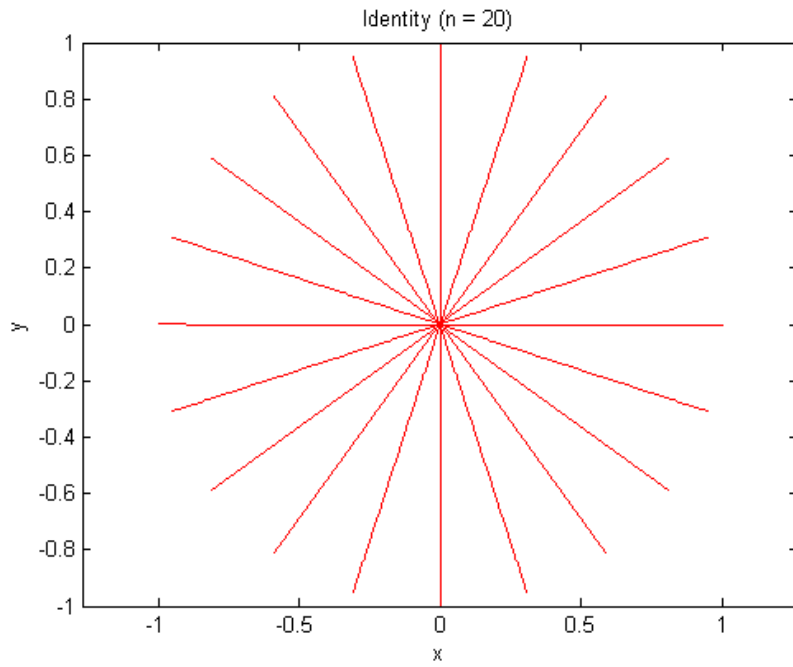
Ejemplo 2. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$; $\lambda_1 = 2+i$, $\lambda_2 = 2-i$



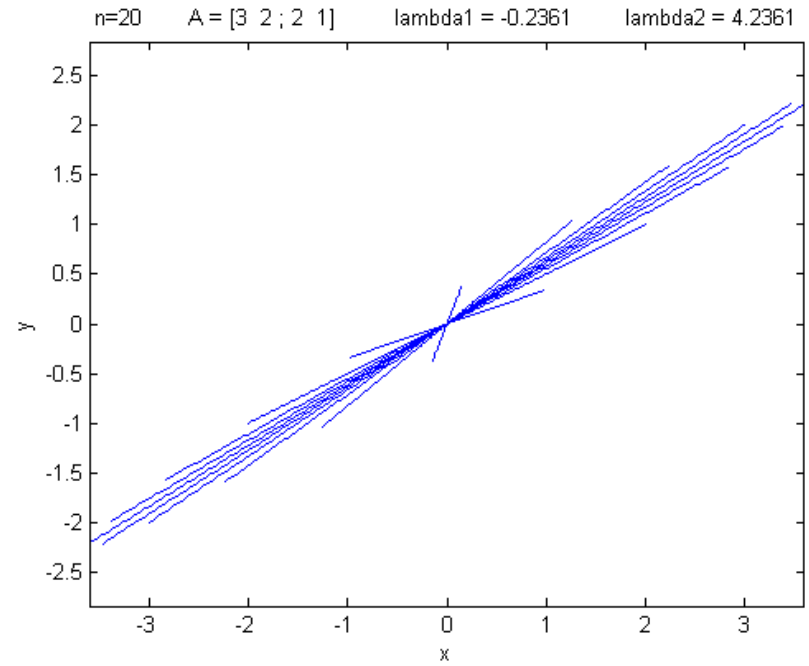
NOTA: debido a su tamaño, la imagen transformada aparece al 67% de sus dimensiones originales

Ejemplo 3. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$; $\lambda_1 = -0.2361$, $\lambda_2 = 4.2361$

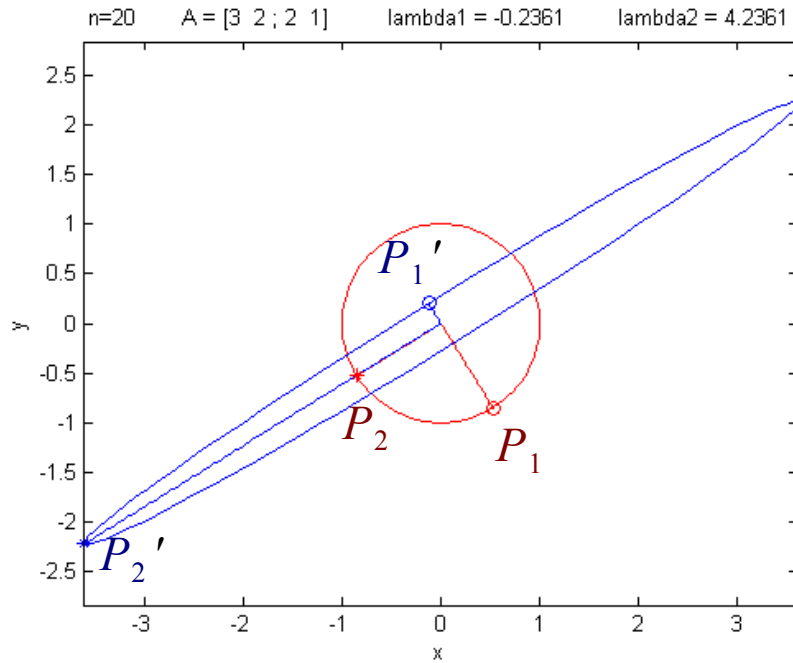
1



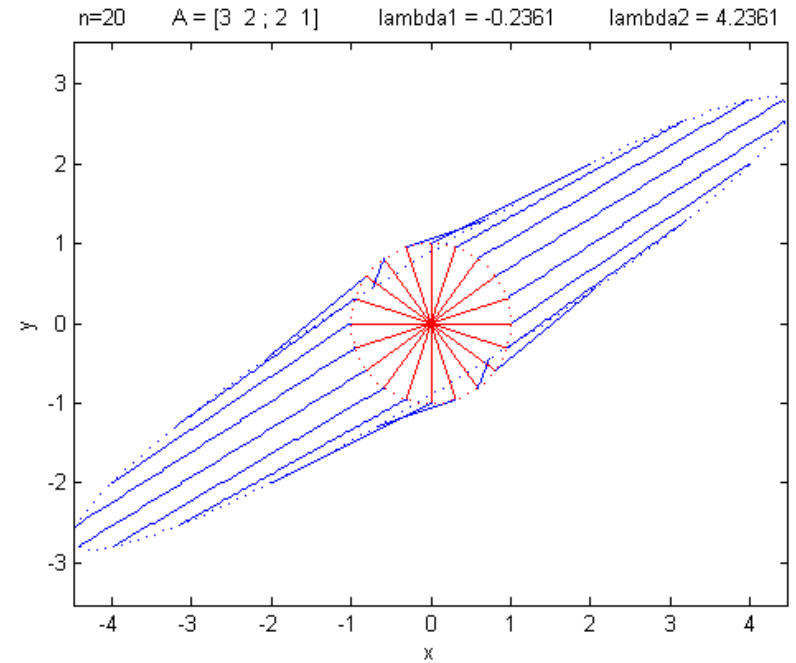
2



4

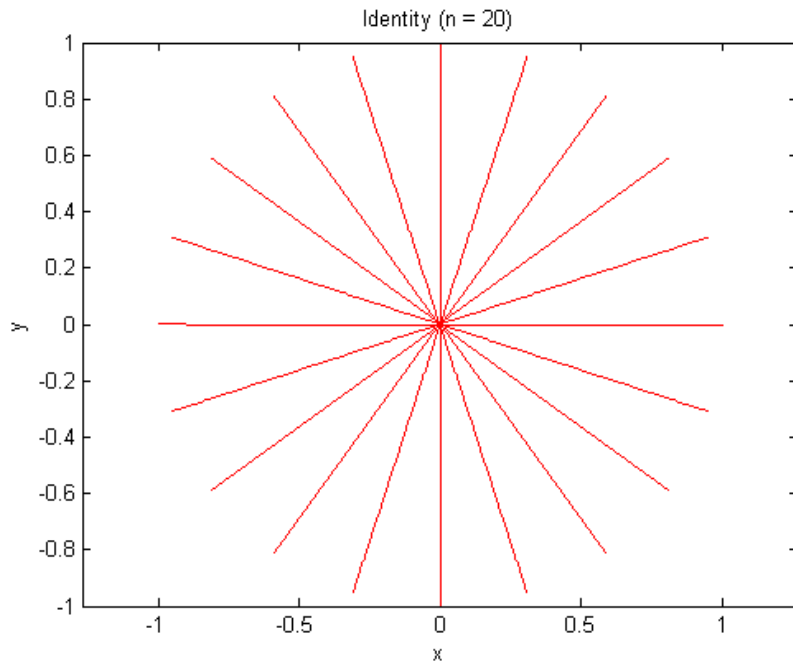


3

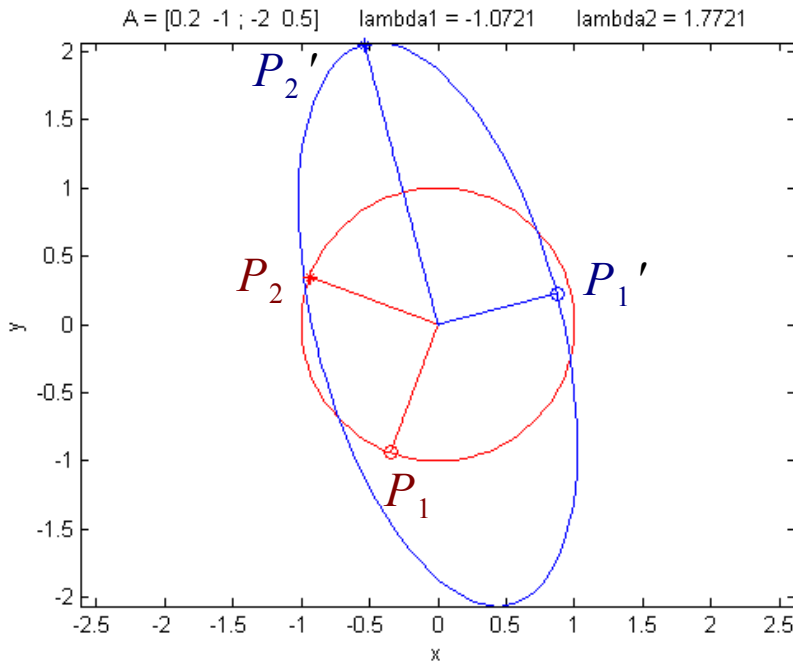
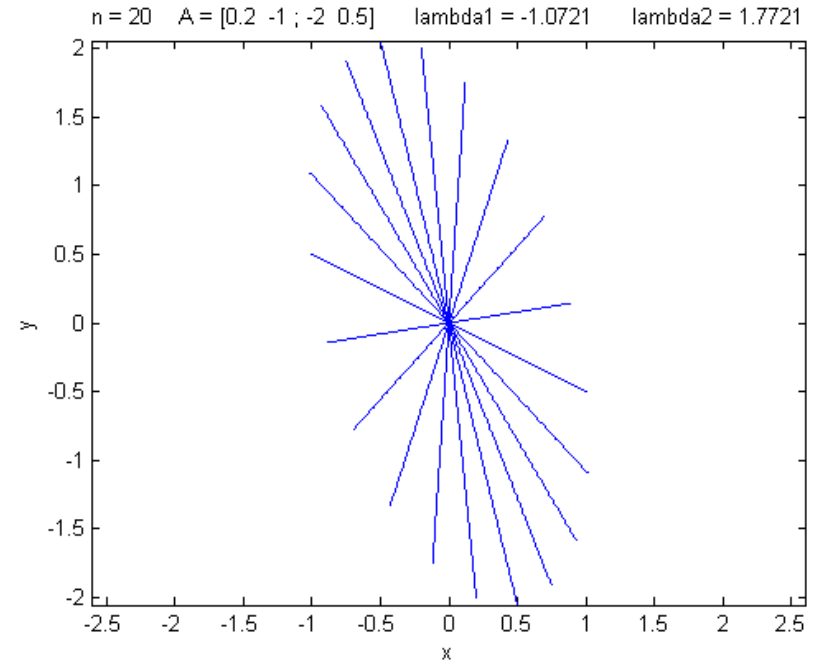


Ejemplo 4. $A = \begin{bmatrix} 0.2 & -1 \\ -2 & 0.5 \end{bmatrix}$; $\lambda_1 = -1.0721$, $\lambda_2 = 1.7721$

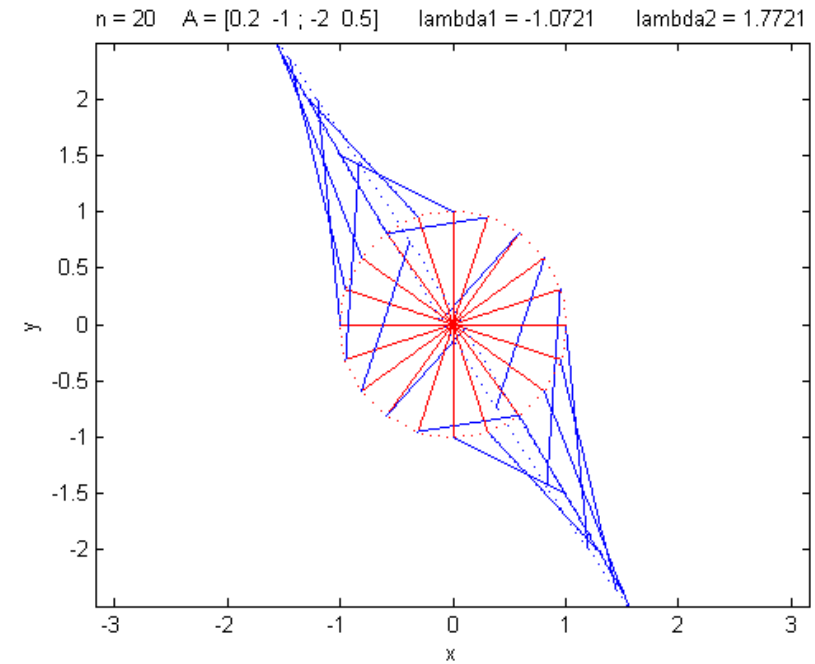
1



2

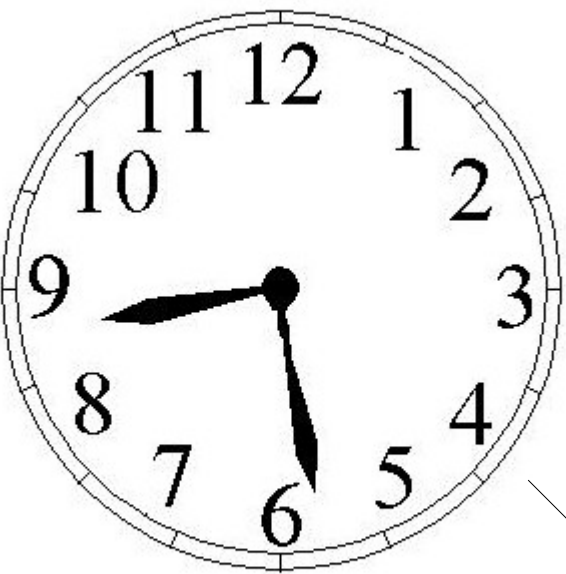


3



Ejemplo 4.

$$A = \begin{bmatrix} 0.2 & -1 \\ -2 & 0.5 \end{bmatrix}; \lambda_1 = -1.0721, \lambda_2 = 1.7721$$



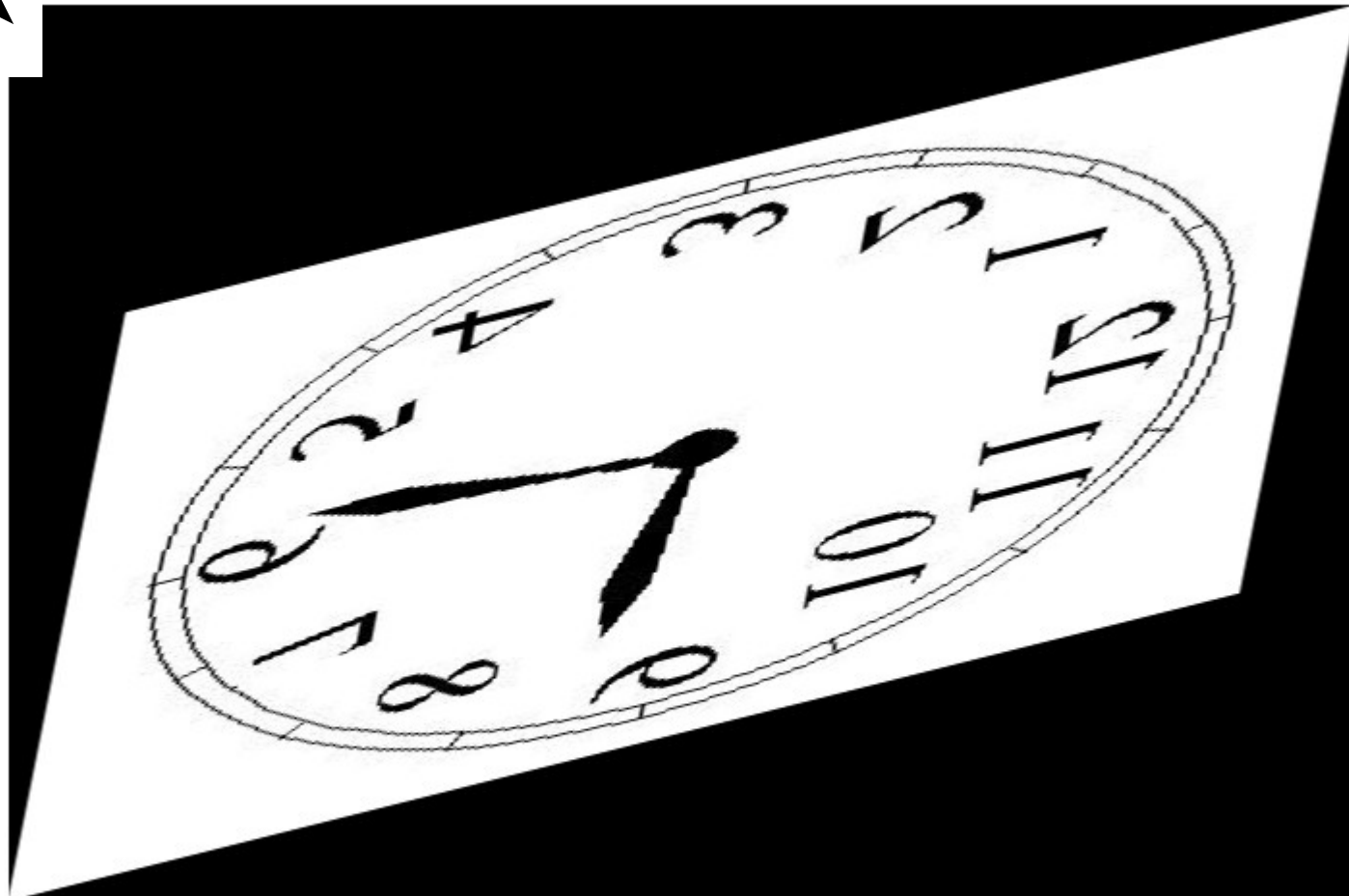
A

$$A = [0.2 \ -1; -2 \ 0.5]$$

$$\text{lambd}a1 = -1.0721$$

$$\text{lambd}a2 = 1.7721$$

y



1. Geometría de las transformaciones lineales

Ejercicios: utilizando el programal `vlt.m` disponible en la página web, obtener figuras similares a las anteriores para cada una de las siguientes matrices:

1. reflexión c.r. al eje y

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. reflexión c.r. a línea $y=x$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3. proyección sobre eje x

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. proyección sobre línea $y=3^{1/2}x$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

5. rotación de 60 grados en sentido horario.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

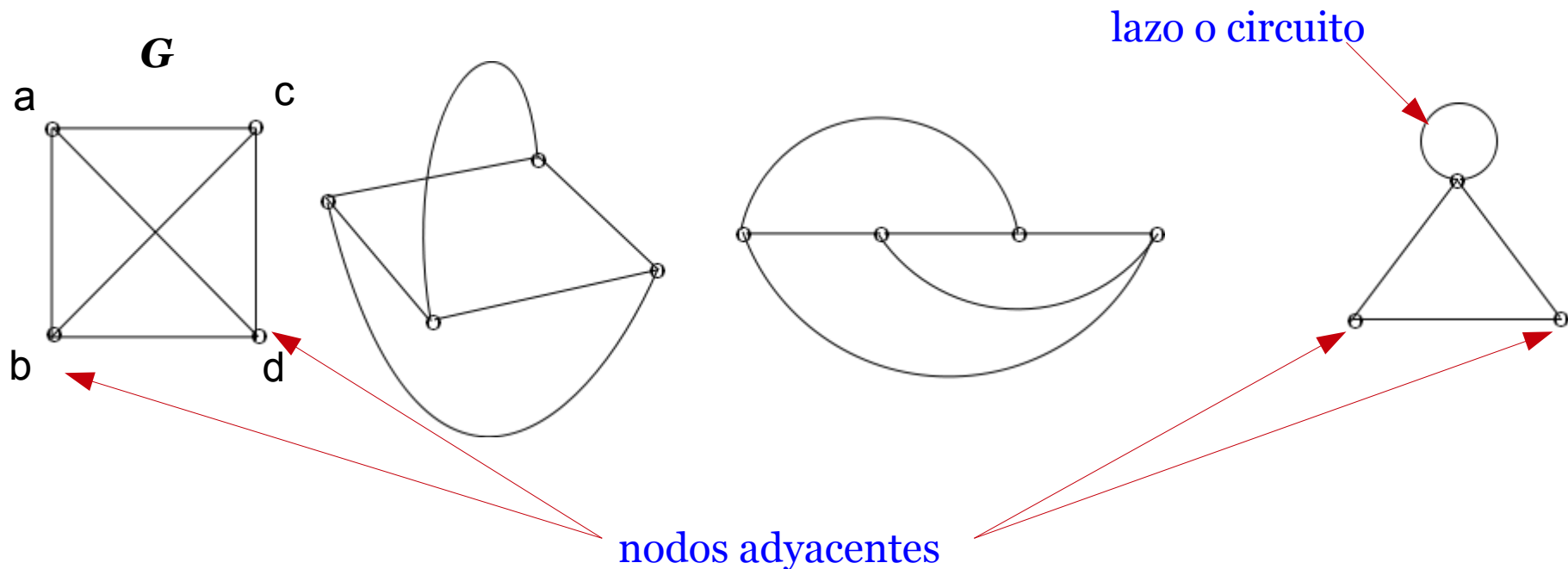
7. Describa un algoritmo para encontrar las direcciones de máxima y mínima deformación del círculo unitario bajo la transformación $X \rightarrow AX$

8. Haga un análisis para las figuras 4 (deformación del círculo unitario) de los ejemplos 2, 3 y 4, similar al del ejemplo 1. También para cada uno de estos ejemplos calcule las direcciones propias y verifique que sus respuestas están de acuerdo con la figura 3.

2. Grafos, digrafos y sus aplicaciones

Grafos son objetos usados muy frecuentemente para describir las relaciones entre los elementos de un conjunto finito. Por ejemplo, enlaces entre los nodos de una red de telecomunicaciones, dinámica entre dos o más tipos de poblaciones (modelos presa-depredador), conexiones en una red de profesionistas, descripción de los resultados de una competencia (torneos), etc.

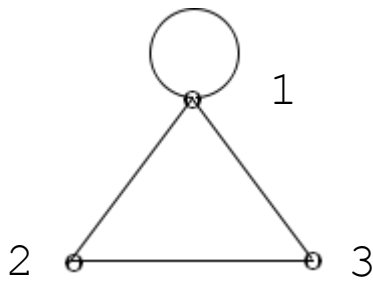
Def.: Grafo G : conjunto formado por un número finito de puntos, llamados **nodos o vértices**, y líneas que unen pares de nodos (o bien a un mismo nodo) llamadas **aristas**.



2. Grafos, digrafos y sus aplicaciones

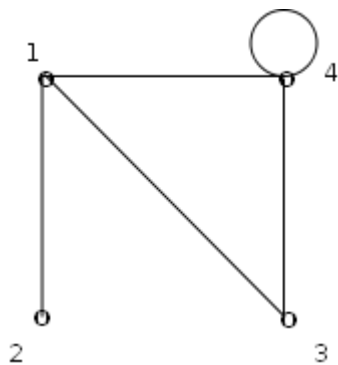
Def. sea G un grafo con n nodos, entonces su matriz de adyacencia, $A(G) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se define como:

$$(A(G))_{ij} = a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si nodos } i, j \text{ son adyacentes} \\ 0 & \text{si nodos } i, j \text{ no son adyacentes} \end{cases}$$



$$A(G) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Obs: las matrices de adyacencia de grafos son simétricas.



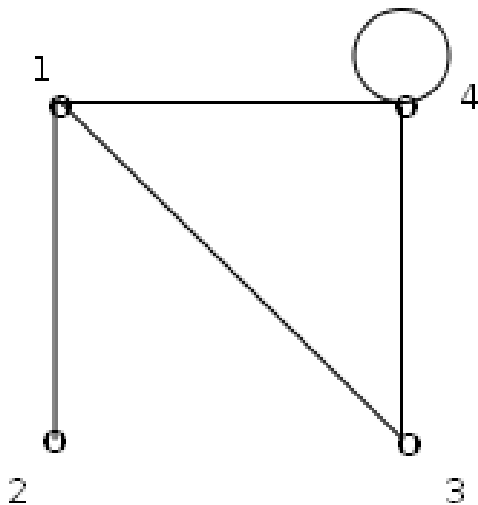
$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Una permutación de los renglones de $A(G)$ corresponde a una permutación o renombramiento de los nodos de G .

2. Grafos, digrafos y sus aplicaciones

Defs.:

1. **Trayectoria:** sucesión de aristas en un grafo que permiten viajar de un nodo a otro de manera continua.
2. **Longitud de una trayectoria:** número de aristas que contiene una trayectoria (las aristas pueden repetirse). **k -trayectoria** = trayectoria con k aristas.
3. **Trayectoria simple:** una arista no se recorre más de una sola vez
4. **Trayectoria cerrada:** la trayectoria comienza y termina en el mismo nodo.



1341 es una 3-trayectoria simple cerrada.
13441 es una 4-trayectoria simple cerrada.

214413 es una 5-trayectoria (la arista entre los nodos 1 y 4 se cuenta dos veces).

2. Grafos, digrafos y sus aplicaciones

Pregunta: dados dos nodos de un grafo G , ¿cómo podemos saber el número de k -trayectorias entre esos dos nodos?

(Respuesta)

Lema 1: sea G un grafo y $A(G)$ su matriz de adyacencia. Entonces el número de k -trayectorias entre los nodos i y j es igual al valor de $(A^k)_{ij}$

Ejercicio 1: probar el lema 1. A continuación solo ilustraremos el lema 1 para el caso $k=2$ (2-trayectorias), cuando G tiene solamente cuatro vértices y estamos interesados en determinar el número de 2-trayectorias entre los vértices 3 y 2 de G .

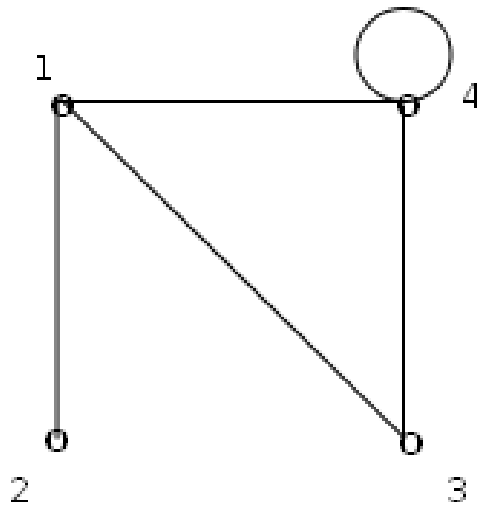
Observe que $(A^2)_{32} = a_{31}a_{12} + a_{32}a_{22} + a_{33}a_{32} + a_{34}a_{42}$

Entonces $(A^2)_{32} \neq 0$ si y sólo si alguno de los sumandos es distinto de cero (de hecho, igual a uno). Supongamos, por ejemplo, que $a_{31}a_{12} = 1$, entonces $a_{31} = 1$ y $a_{12} = 1$, por lo tanto existe una arista entre los vértices 3 y 1, y otra entre los vértices 1 y 2, por lo tanto existe una 2-trayectoria entre los vértices 3 y 2. Así, el número de sumandos distintos de cero, es decir, el valor de $(A^2)_{32}$ es el número de 2-trayectorias entre los vértices 3 y 2 del grafo G .

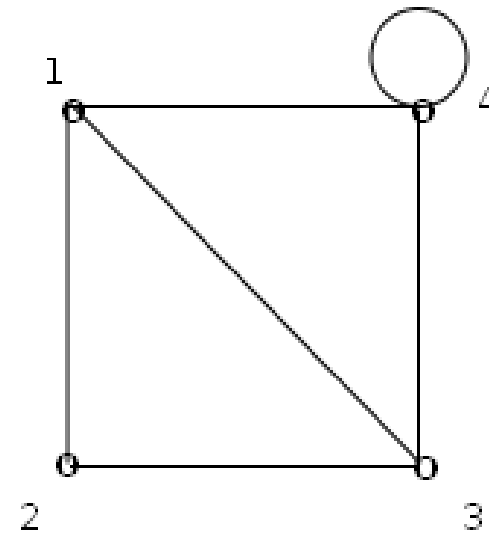
2. Grafos, digrafos y sus aplicaciones

Hint para la demostración del lema 1: utilice inducción sobre k para calcular el número de k -trayectorias entre los vértices i y j de G .

Ejercicio 2: calcule el número de 3 y 4-trayectorias entre los vértices 1 y 4 de cada uno de los grafos abajo incluidos. ¿Puede enlistarlas todas?



G



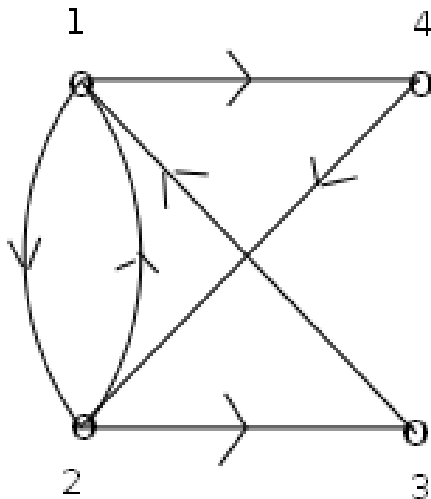
H

Ejercicio 3: demuestre o de un contraejemplo del siguiente enunciado: es posible que un grafo G tenga una k -trayectoria entre los vértices i y j , pero que no tenga una $(k+1)$ -trayectoria entre esos mismos vértices.

2. Grafos, digrafos y sus aplicaciones

Ejercicio 4: sea G un grafo con n nodos. Dados cualesquier nodos, i, j , encuentre una cota superior para el número de k -trayectorias entre tales nodos.

Def.: un **digrafo** (“grafo dirigido”) es un grafo cuyas aristas poseen orientación.



D

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz de adyacencia de D

Las matrices de adyacencia para los digrafos se definen de la misma forma que para los grafos, con la diferencia de que las primeras no son necesariamente simétricas.

2. Grafos, digrafos y sus aplicaciones

Ejercicio 5: dado un digrafo D con n nodos, ¿cuándo será $A(D)$ simétrica?

Para distinguir entre las trayectorias de un grafo y un digrafo, nos referiremos a k -trayectorias dirigidas en el caso de digrafos.

Nota importante: las aristas de una k -trayectoria dirigida solo pueden recorrerse en una dirección (este no era el caso de los grafos).

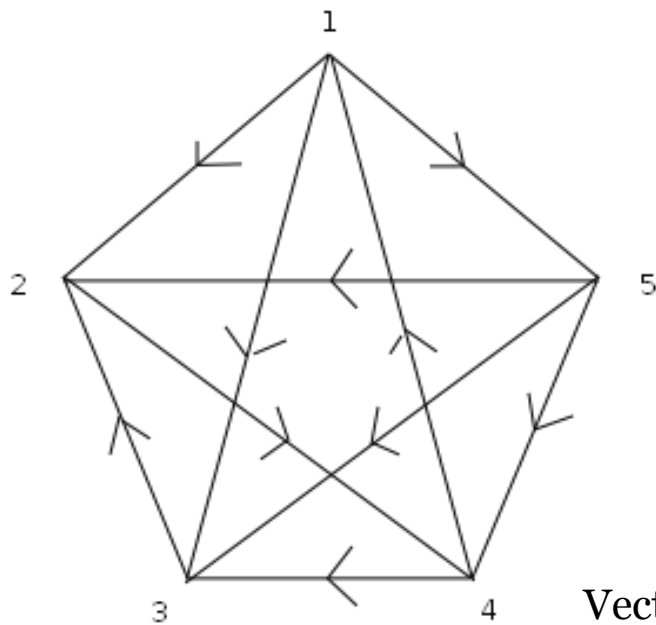
Ejercicio 6: ¿cómo cambia su respuesta al ejercicio 3 en el caso de digrafos?

Ejercicio 7: ¿existe un lema análogo al lema 1 en el caso de digrafos?

2. Grafos, digrafos y sus aplicaciones

Aplicaciones en torneos.

Escenario: cinco jugadores de tenis se enfrentan en un torneo “round-robin” (todos contra todos). Los resultados de los torneos (*isin tomar en cuenta los marcadores!*) se pueden representar en un digrafo. Una arista dirigida del nodo i al j significa que el jugador i se enfrentó y venció al jugador j .



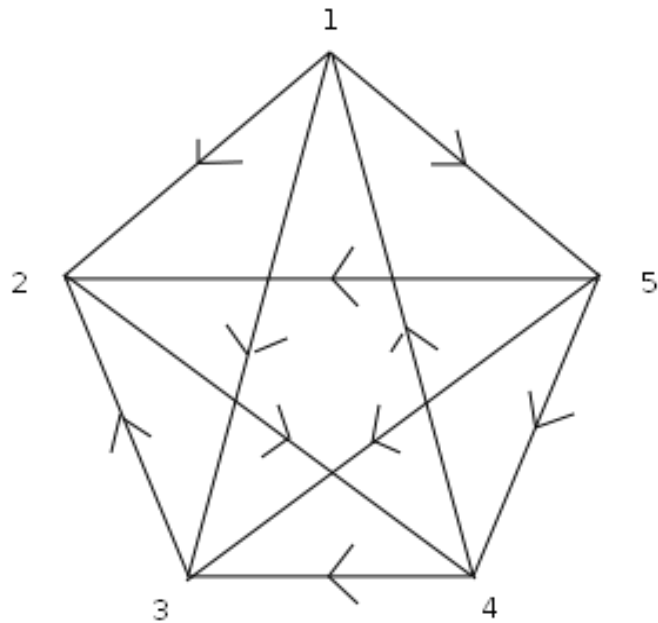
$$A(D) = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

1er lugar
← 3er lugar
← 3er lugar
← 2do lugar
1er lugar

Vector de # partidos ganados = $A(D) \mathbf{1}_5 = A(D) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

Pregunta: ¿qué tan justa es esta evaluación?

2. Grafos, digrafos y sus aplicaciones



Los jugadores 1 y 5 han quedado en primer lugar, pero 1 podría argumentar que merece el primer lugar dado que venció a 5.

Similarmente, el jugador 3 puede argumentar que, dado que venció a 2, debería de quedar a un nivel mas alto que este último. Sin embargo, 2 podría decir que tiene *dos* victorias indirectas pues derrotó a 4 quien a su vez derrotó a 3 y a 1 quien fuera declarado campeón; además, 3 tiene solamente *una* victoria indirecta.

Una forma de intentar solucionar el empate es considerando la *suma de las victorias directas e indirectas*.

Una victoria indirecta = 2-trayectoria sobre el digrafo. (Necesitamos ver $A^2(D)$.)

$$A^2(D) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Significa que 1 tiene dos victorias indirectas sobre 4

2. Grafos, digrafos y sus aplicaciones

$$\begin{array}{l} \text{victorias directas} \\ + \\ \text{victorias indirectas} \end{array} = (A(D) + A^2(D)) \mathbf{1}_5 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ 2 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$$

1er lugar (1)
4to lugar
5to lugar
3er lugar (4)
2do lugar (5)

Obs:

1. las victorias indirectas resuelven los empates en este caso, pero no siempre lo harán.
2. Las matrices de adyacencia no toman en cuenta los marcadores, lo cual no siempre es “justo.”

Proyecto 1:

(a) obtenga matrices de torneo para los grupos A – H del mundial de fútbol 2010.

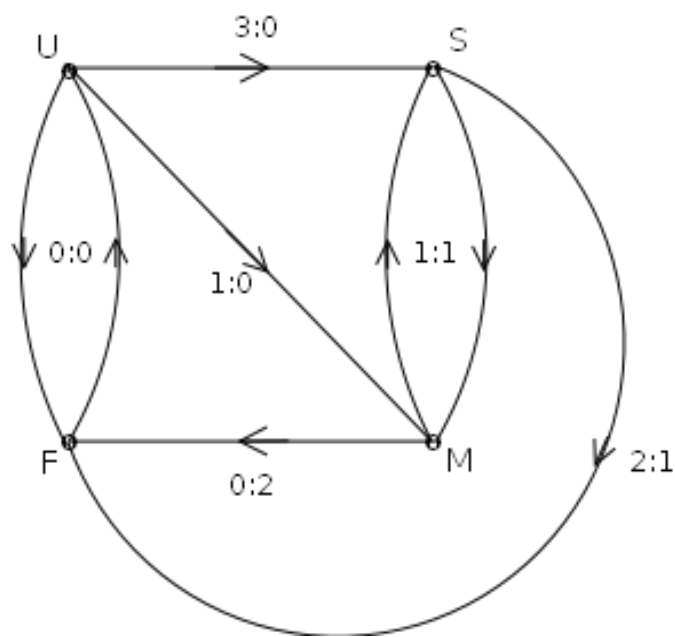
¿Coincide su clasificación con la oficial?

(b) En el caso de los líderes de grupo definidos por diferencia de goles, idee una forma de definir matrices de adyacencia pesadas (en lugar de asignar un 1 o un 0, asigne otro número que dependa del número de goles anotados. Por ejemplo, un marcador 4:1 correspondería a una arista con peso de $4^2 - 1^2 = 15$ (o algún otro peso que usted crea sea más justo). Vuelva a hacer la clasificación. ¿Obtiene el mismo resultado?

2. Grafos, digrafos y sus aplicaciones

Ejemplo: consideremos los resultados del Grupo A (Francia, México, Sudáfrica y Uruguay), recordemos que México pasó en vez de Sudáfrica, por diferencia de goles. Aquí trataremos de dar un algoritmo que permita clasificar los equipos de manera más “económica” (menos pasos) a la vez que mas “justa,” en donde los goles (y no los partidos ganados) sean la base del criterio de clasificación.

Utilizaremos aristas “pesadas.” En caso de empate dibujaremos un par de aristas con direcciones opuestas entre los nodos de los equipos correspondientes, el peso de dichas aristas será igual al número de goles anotados. En caso de triunfo, se dibuja una arista del nodo del equipo campeón al nodo del equipo derrotado y se le asigna un peso igual a la diferencia (positiva) de los cuadrados de los goles anotados por los equipos:



$$A(D) = \begin{array}{c|cccc} & U & F & M & S \\ \hline U & 0 & 0 & 1^2 - 0^2 & 3^2 - 0^2 \\ F & 0 & 0 & 0 & 0 \\ M & 0 & 2^2 - 0^2 & 0 & 1 \\ S & 0 & 2^2 - 1^2 & 1 & 0 \end{array} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Grafos, digrafos y sus aplicaciones

Entonces,

$$A(D)1_5 = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ y por lo tanto Uruguay y México pasan.}$$

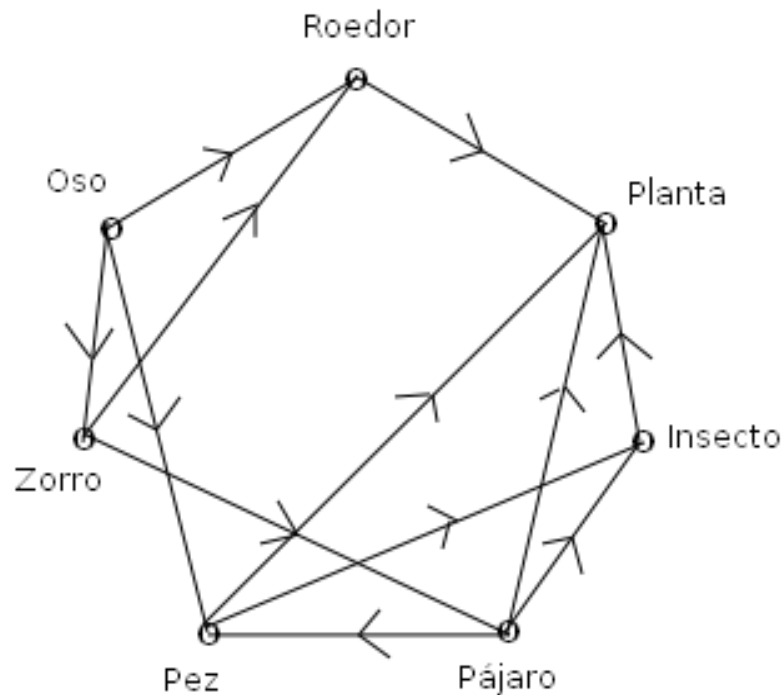
La idea de estos métodos de clasificación es que puedan automatizarse a la vez que consideren el desempeño de los equipos. El criterio para asignar pesos a las aristas visto previamente, no toma en cuenta el que un equipo pierda por una diferencia de goles considerable (las derrotas siempre se consideran como ceros).

Evidentemente hay muchos criterios de clasificación. Durante la clase se presentó un método de clasificación para el mismo ejemplo, distinto al de arriba.

2. Grafos, digrafos y sus aplicaciones

Aplicaciones en ecosistemas (sistemas biológicos)

Proyecto 2: considere el siguiente digrafo de un pequeño ecosistema simulado.



Una flecha dirigida del nodo a al nodo b significa que la especie del nodo a tiene como fuente de alimento a la especie del nodo b .

Construya la matriz de adyacencia A de este ecosistema y conteste las siguientes preguntas:

(a) ¿Qué especie tiene más fuentes directas de alimento?

(b) ¿Qué especie es la fuente de alimento directa para la mayoría de las otras especies?

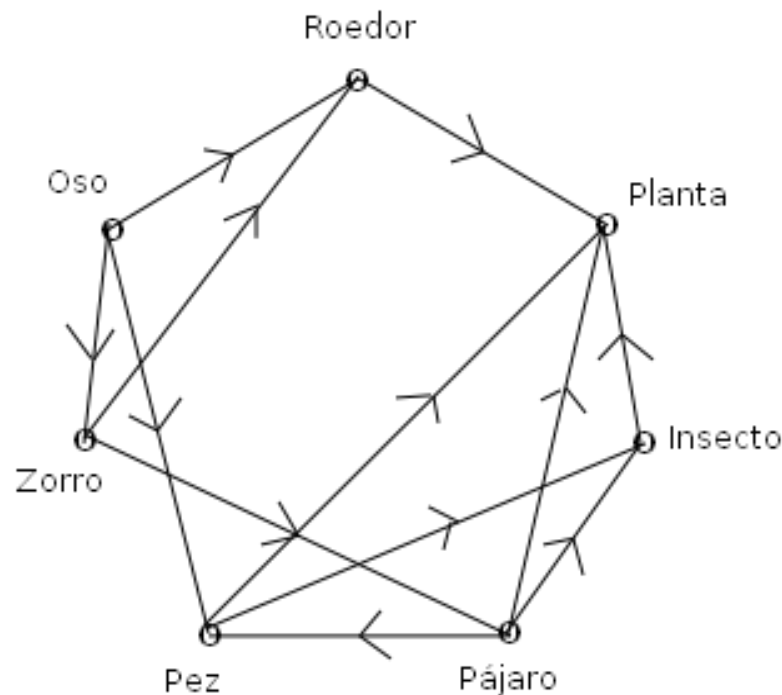
(c) Si c es una fuente de alimento de b y b es una fuente de alimento de a , decimos que c es una **fente indirecta de alimento** de a . Determine la especie o especies que tienen mas fuentes indirectas de alimentos. Ahora determine la especie o especies que tienen mas fuentes directas e indirectas de alimentos combinadas.

2. Grafos, digrafos y sus aplicaciones

(d) Se ha detectado que ciertos contaminantes están acabando rápidamente con las plantas del ecosistema. Para prever el efecto que esto tendrá sobre las demás especies, construya una nueva matriz de adyacencia B a partir de A , borrando la columna y renglón correspondientes a las plantas, ahora repita los incisos (a) a (c). ¿Cuáles son las especies más afectadas por la falta de plantas? ¿Cuáles son las especies menos afectadas?

(e) ¿Cómo podría ver el efecto sobre el ecosistema a largo plazo de la ausencia de plantas?

Respuestas: (el modelo no considera que las plantas obtienen su energía y nutrientes del sol y del subsuelo)



$$A(D) = \begin{array}{c|ccccccc} & R & O & Z & Pz & Pj & I & Pl \\ \hline R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ O & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ Z & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ Pz & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ Pj & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ Pl & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

2. Grafos, digrafos y sus aplicaciones

(a) se refiere al nodo o nodos con el mayor número de aristas salientes, dado que

$A(D)1_7 = [1 \ 3 \ 2 \ 2 \ 3 \ 1 \ 0]^t$, entonces *osos y pájaros* son las especies con el mayor número de fuentes directas de alimento, seguidos por los zorros y peces, los roedores y los insectos y finalmente las plantas.

(b) se refiere al nodo o nodos con el mayor número de aristas entrantes. Por inspección de $A(D)$, esta especie son las *plantas* (3), seguida de insectos, peces y roedores (2), zorros y pájaros (1) y finalmente osos (0). (Nótese que esta lista no se obtiene de la lista en (a).)

(c) la primera parte de este inciso se refiere al nodo o nodos con el mayor número de 2-trayectorias.

$A^2 1_7 = [0 \ 5 \ 4 \ 1 \ 3 \ 0 \ 0]^t$, por lo tanto los osos son la especie con el mayor número de “fuentes indirectas” de alimento (seguido por los zorros (4), pájaros (3), peces (1) y finalmente roedores, insectos y plantas (0)).

La segunda parte de este inciso se refiere a la suma: $(A + A^2)1_7 = [1 \ 8 \ 6 \ 3 \ 6 \ 1 \ 0]^t$

Los osos tienen entonces el mayor número de fuentes directas e indirectas de alimento (8). Observe cómo los zorros, a pesar de tener el mismo número de fuentes directas que los peces, al considerar el número de fuentes indirectas, esta especie parece tener más posibilidades de sobrevivir que los peces.

2. Grafos, digrafos y sus aplicaciones

(d) Eliminando las plantas del ecosistema se obtiene la siguiente matriz de adyacencias:

$$B = \begin{array}{c|cccccc} & R & O & Z & Pz & Pj & I \\ \hline R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ O & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ Z & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ Pz & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ Pj & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Los roedores e insectos no tienen fuentes de alimento, entonces estas especies están en peligro de extinción.

El resto de este inciso se deja al lector para su discusión.

(e) Desapareciendo roedores e insectos, se tiene la siguiente matriz de adyacencias para el ecosistema restante:

$$C = \begin{array}{c|cccc} & O & Z & Pz & Pj \\ \hline O & 0 & 1 & 1 & 0 \\ Z & 0 & 0 & 0 & 1 \\ Pz & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Pj & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Sin fuente de alimento, los peces están próximos a desaparecer del ecosistema, seguidos por los pájaros, zorros y finalmente los osos. Los detalles y discusión se dejan como ejercicio para el lector.

2. Grafos, digrafos y sus aplicaciones

Aplicaciones en redes (propagación de noticias)

Proyecto 3: la tabla de la derecha muestra la forma en que un grupo de cinco personas están conectadas vía “instant messenger.” La columna del lado izquierdo contiene los emisores de noticias y la del lado derecho los receptores del correspondiente emisor.

| emisor | receptor(es) |
|--------|--------------|
| 1 | 3, 5 |
| 2 | 3, 4 |
| 3 | 5 |
| 4 | 1, 3 |
| 5 | 2 |

(a) Encuentre un digrafo que modele esta red de información y calcule su matriz de adyacencias.

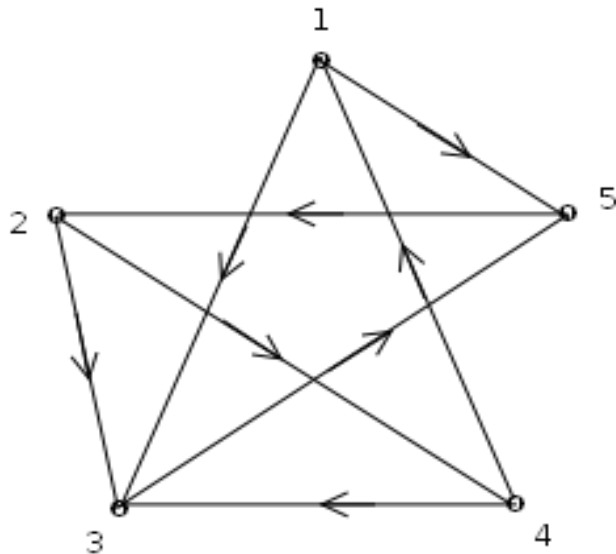
(b) si definimos como un paso al tiempo que le toma a un emisor enviar la información a su receptor o receptores, calcule el número de pasos que le tomaría a todos los miembros de la red enterarse de una noticia si el portador inicial de la misma es el nodo **2**. (e.g., la información llega a los nodos 3 y 5 simultáneamente del nodo 1 en un paso.)

(c) Repita el inciso (b) si ahora el nodo 1 es el portador inicial de la noticia. ¿Cómo podría encontrar a los nodos más efectivos de disseminación de la información? ¿Y a los menos efectivos?

(d) Sea A la matriz de adyacencia de un digrafo con n nodos. Determine una forma para saber si el nodo i se encuentra conectado al nodo j por alguna trayectoria (de cualquier longitud).

2. Grafos, digrafos y sus aplicaciones

(a)



$$A = \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Para contestar los inciso (b) y (c) solamente hace falta calcular las potencias de A y sumarlas. Hacemos esto ahora:

$$A + A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

En dos pasos el nodo 2 ha logrado contaminar a toda la red, pero no ha recibido retroalimentación

$$A + A^2 + A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A pesar de que el nodo 2 contamina la red entera un paso antes que el nodo 5, ambos nodos han contaminado la red y recibido retroalimentación en 3 pasos.

2. Grafos, digrafos y sus aplicaciones

En un paso, el nodo 1 “contamina” a los nodos 3 y 5. De los cálculos anteriores se sigue que en dos pasos el nodo 1 ha contaminado al 2, mientras que tres pasos son necesarios para contaminar al nodo 4. Por lo tanto, el nodo 1 necesita de 3 pasos para contaminar a toda la red. Nótese, sin embargo, que en tres pasos la información enviada por el nodo 1 aún no ha regresado a su fuente de origen.

Por otra parte, los nodos 2 y 5 han contaminado a toda la red y recibido retroalimentación en tres pasos, no obstante, el nodo 2 contamina la red entera en dos pasos, mientras que el nodo 5 necesita de tres pasos para lograrlo. Por esta razón, diremos que el **nodo 2** es el **más efectivo** como transmisor de noticias de entre todos los nodos de la red.

En tres pasos el **nodo 3**, a pesar de haber recibido retroalimentación, no ha logrado contaminar el nodo 1, por esta razón llamaremos a este nodo el **menos efectivo de la red**. Los nodos 4 y 1 han contaminado a toda la red en tres pasos, pero aún no han sido retroalimentados. El detalle de estas discusiones se deja al lector como **ejercicio**.

Este tipo de problemas también pueden considerarse en ataques cibernéticos. Por ejemplo, el atacante tiene acceso a varios nodos de una red y le gustaría saber cuál es el nodo más efectivo para que un virus se propage, o bien, le gustaría saber en qué nodo liberar un virus de manera que este tarde más en llegar a su verdadero destino, haciendo más difícil su rastreo.

2. Grafos, digrafos y sus aplicaciones

Nota: la noción de conexión entre nodos del ejercicio anterior, ha sido explotada numerosas veces en distintos campos de la ciencia y del entretenimiento.

La idea de los “*seis grados de separación*” o la “*red humana*,” sostiene que cualesquier dos personas en el mundo son los extremos de una cadena de personas de longitud menor o igual a seis. Por ejemplo, cualquier alumno que yo haya tenido es parte de una cadena de personas de longitud máxima de cuatro entre ellos y el ganador de la quinta temporada del concurso American Idol; es decir, hay tres grados de separación entre cualquier alumno mio (o persona que me conozca) y Taylor Hicks.

El *número de Erdős* de un matemático X es igual al número de personas en una cadena entre X y el matemático Paul Erdős, en donde la conexión entre dos nodos de la cadena es establecida cuando estos nodos corresponden a matemáticos que han escrito y publicado un artículo juntos. Por ejemplo, el matemático **Béla Bollobás** tiene número de Erdős igual a uno pues tiene publicaciones conjuntas con Paul Erdős.

En el mundo del cine se define el *número de Bacon* de un actor Z como el número de personas en una cadena entre Z y el actor Kevin Bacon, en donde la conexión entre dos nodos de la cadena es establecida cuando estos corresponden a actores que han participado en una misma película.

3. Descomposición en valores singulares

Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ matriz de una transformación lineal $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

En 1. nos preguntamos cómo deforma f a la esfera unitaria, es decir, estudiamos la función $f(X) = \|AX\|^2$ con dominio definido por la condición $\|X\|^2 = 1$

También entonces observamos que $0 \leq f(X) = (AX)^t(AX) = X^t(A^t A)X \Rightarrow A^t A \geq 0$

y por lo tanto $A^t A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tiene una *base ortonormal* de eigenvectores v_1, v_2, \dots, v_n

y eigenvalores no negativos $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$

Así que $(A^t A)V = V \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$

en donde $V := [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz ortogonal.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que los eigenvalores están etiquetados en orden decreciente, considerando la posibilidad de tener eigenvalores nulos.

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r > 0, \lambda_{r+1} = \lambda_{r+2} = \dots = \lambda_n = 0$$

Def.: los **valores singulares de A** se definen de acuerdo con la expresión anterior como sigue:

$$\sigma_1 := \sqrt{\lambda_1} \geq \sigma_2 := \sqrt{\lambda_2} \geq \dots \geq \sigma_r := \sqrt{\lambda_r} > 0, \sigma_{r+1} = \sigma_{r+2} = \dots = \sigma_n = 0$$

3. Descomposición en valores singulares

Observaciones.:

1. la demostración de que $r = \text{rango}(A)$ se bosqueja más adelante.
2. un argumento de multiplicadores de Lagrange muestra que el máximo de la función $f(x) = \|X\|^2$ sobre la esfera unitaria ($\|X\| = 1$), se alcanza precisamente en aquellos puntos X que satisfacen que $A^t A X = \lambda X$, más precisamente, *los valores singulares de A son las magnitudes de los semiejes del elipsoide imagen de la esfera unitaria*. Esta es la conexión con la aplicación 1 (las deformaciones de la esfera unitaria son del tamaño de los valores singulares de A).

Lema: sean $u_i := \frac{1}{\sigma_i} A v_i$ $i = 1, \dots, r$, entonces $\mathcal{Y} = \{u_1, \dots, u_r\}$ es un conjunto ortonormal.

Prueba:

$$u_i^t u_j = \left(\frac{1}{\sigma_i} A v_i\right)^t \left(\frac{1}{\sigma_j} A v_j\right) = \frac{1}{\sigma_i \sigma_j} v_i^t (A^t A) v_j = \frac{\lambda_j}{\sigma_i \sigma_j} v_i^t v_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

3. Descomposición en valores singulares

Observaciones.:

1. $r = \text{rango}(A)$. Esto es una consecuencia del siguiente resultado: si B y C son matrices invertibles, entonces $\text{rango}(BA) = \text{rango}(A) = \text{rango}(AC)$ (siempre que los productos estén bien definidos), entonces

$$\text{rango}(U \Sigma V^t) = \text{rango}(\Sigma V^t) = \text{rango}(\Sigma) = r$$

2. Enunciamos los siguientes resultados sin demostración, estas pueden encontrarse en [2] o bien se le dejan al lector como **ejercicios**:

- (i) $\gamma = \{u_1, \dots, u_r\}$ es una base ortonormal para el espacio columna de A .
- (ii) $\{u_{r+1}, \dots, u_m\}$ es una base ortonormal para el espacio nulo de A^t .
- (iii) $\{v_1, \dots, v_r\}$ es una base ortonormal para el espacio renglón de A .
- (iv) $\{v_{r+1}, \dots, v_n\}$ es una base ortonormal para el espacio nulo de A .

3. Las matrices U y V no están determinadas de manera única.

3. Descomposición en valores singulares

Def.: las columnas de V son los llamados **vectores singulares por la derecha**, mientras que las columnas de U son los llamados **vectores singulares por la izquierda**.

Def.: para cualquier matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ definimos su **pseudoinversa** o **inversa de Moore-Penrose** como

$$A^+ := V \Sigma^+ U^t$$

En donde $\Sigma^+ :=$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \sigma_1^{-1} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \sigma_r^{-1} & & & \\ \hline & & & 0_{r \times (m-r)} & & \\ \hline & 0_{(n-r) \times r} & & & 0_{(n-r) \times (m-r)} & \end{array} \right] \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Aplicaciones

(1) Mínimos cuadrados: referimos al lector a [2] para la demostración del siguiente

Lema: para cualquier matriz A y vector b , el sistema $AX=b$ tiene una única solución de longitud mínima, obtenida por el método de mínimos cuadrados, la cual está dada por

$$X_{svd} = A^+ b$$

3. Descomposición en valores singulares

(2) *Compresión de imágenes.*

La descomposición de valores singulares de A, **(DVS)** presentada anteriormente, tiene además una forma la cual permite su fácil aplicación en el problema de compresión de imágenes:

$$A = \sigma_1 u_1 v_1^t + \dots + \sigma_r u_r v_r^t \quad \text{—————} \quad \mathbf{(DVS')}$$

Se le deja al lector como **ejercicio** el verificar que **(DVS')** y **(DVS)** son la misma ecuación.

Para ilustrar la utilidad de (DVS') consideremos la imagen 'Penrose_at_blackboard-framed' (ver mas adelante) de (418 x 339) pixeles. Cada pixel tiene asociado un valor en una escala de grises de 0 a 255, lo cual significa que para almacenar dicha imagen se requiere de guardar en la memoria de la computadora 141,702 números en una matriz cuyas dimensiones corresponden al tamaño de la representación digital de dicha imagen y cuyas entradas son números enteros entre 0 y 255. Esto no parecería representar un gran gasto de memoria, pero pensemos en el caso de un satélite que envia fotografías a la Tierra de una región particular del universo con una cierta frecuencia y durante un periodo prolongado de tiempo. En tal situación se requiere de una manera rápida y económica para enviar la información de forma tal que esta pueda ser interpretada correctamente como una imagen por una computadora en la Tierra.

3. SVD: ejemplos de compresión de imágenes

Una manera de hacer lo anterior consiste en transmitir solamente una parte de la suma en (DVS'), digamos los primeros k sumandos, en donde $k \ll r$.

$$A = \underbrace{\sigma_1 u_1 v_1^t + \dots + \sigma_k u_k v_k^t}_{= A_k} + \dots + \sigma_r u_r v_r^t \quad \text{-----} \quad k\text{DVS}'$$

Describamos este procedimiento a continuación:

Roger Penrose



- 1.** Cargar imagen y guardarla en la memoria de Matlab. De ser necesario, la imagen se transfiere a una escala de grises, esto con el objeto de agilizar el proceso de descomposición en valores singulares (imágenes a color requerirán de mayor espacio de almacenamiento y por lo tanto mayor tiempo de computación).
- 2** A partir de la imagen se obtiene una matriz de datos, A , que la representa. La fotografía original puede recuperarse íntegramente a partir de A , sobre la cual obtendremos su descomposición en valores singulares, es decir, se aplicarán las fórmulas DVS' y $k\text{DVS}'$
- 3.** Se obtiene la descomposición en valores singulares de A (fórmula DVS') y luego su k -ésima suma parcial, es decir, la matriz A_k en $k\text{DVS}'$, para un valor predeterminado de k .
- 4.** A_k se reinterpreta como una imagen y se despliega junto con la fotografía original para su comparación.

3. SVD: ejemplos de compresión de imágenes

La descomposición en valores singulares así como la generación de las imágenes se realizó utilizando el archivo `sivade.m`; las instrucciones de uso de este archivo están dentro del mismo.

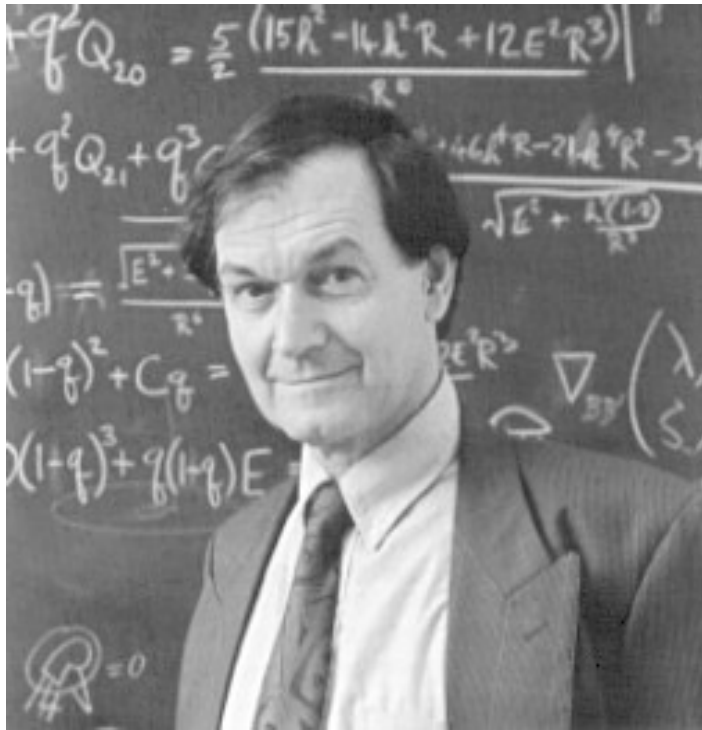
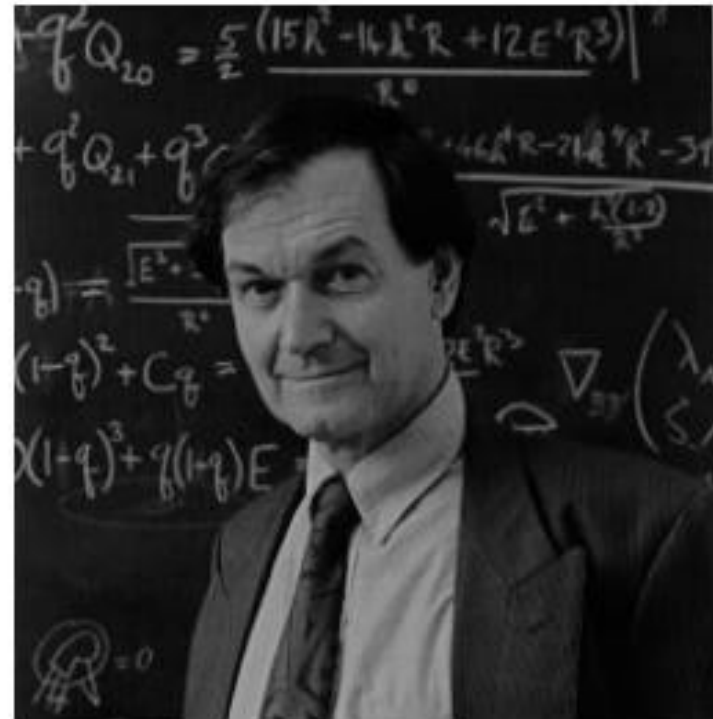


Imagen original (55KB)

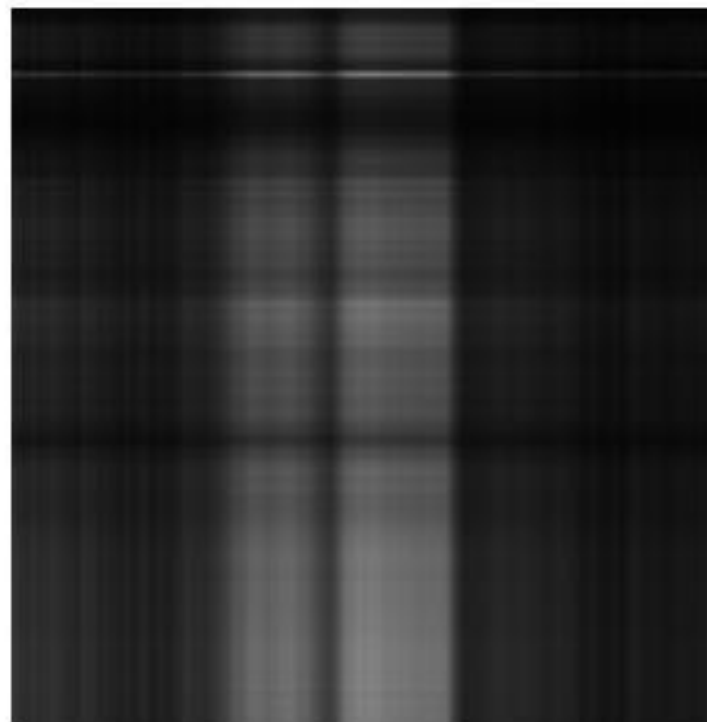
`Imgdouble=im2double(Img)`



Interpretación de Matlab de la figura (14.4KB)

Debe tomarse en cuenta de que la interpretación de Matlab de la fotografía original es ya de por sí comprimida, por ejemplo, en un primer paso, la figura original (izq.) se convierte a una escala de grises. La descomposición en valores singulares se hará sobre la figura de la derecha.

SVD kth partial spectral sum of im2doubled



k=1

SVD kth partial spectral sum of im2doubled



k=2

SVD kth partial spectral sum of im2doubled



k=3

SVD kth partial spectral sum of im2doubled



k=4

SVD kth partial spectral sum of im2doubled



k=5

SVD kth partial spectral sum of im2doubled



k=6

SVD kth partial spectral sum of im2doubled



k=7

SVD kth partial spectral sum of im2doubled



k=8

SVD kth partial spectral sum of im2doubled



k=9

SVD kth partial spectral sum of im2doubled



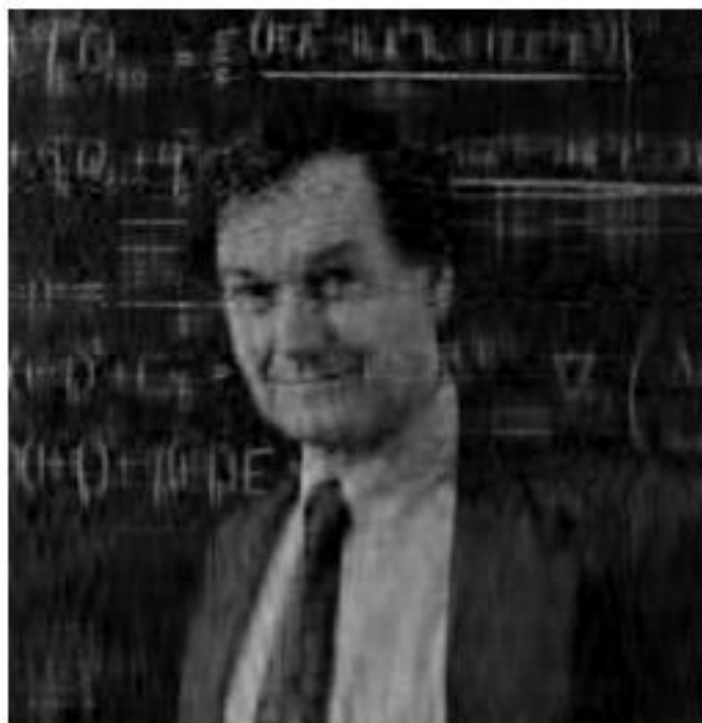
k=10

SVD kth partial spectral sum of im2doubled



k=15

SVD kth partial spectral sum of im2doubled



k=20

3. SVD: ejemplos de compresión de imágenes

Ejercicio:

(a) obtener la descomposición en valores singulares para la imagen de la figura al inicio de esta sección ([ver liga](#)) y hacer la comparación con la figura original y las figuras anteriores.

(b) Suponga que ahora tiene dos fotografías de un mismo objeto, pero con diferentes fondos. un fondo contiene muchas mas figuras y detalles que el otro. ¿Cómo cree que esto afectaría la descomposición en valores singulares de ambas figuras, más específicamente, cree que se necesitaría un valor más alto de k para distinguir al objeto en la figura que tiene el fondo con más detalles? Haga la prueba con dos fotografías de su elección.

4. Tópicos para la siguiente edición de este curso

Por falta de tiempo y el día cancelado debido a los exámenes de admisión a la UAEH, algunas aplicaciones no fueron discutidas en esta ocasión. Nos gustaría incluir tales aplicaciones en la siguiente edición de este curso, a continuación mencionamos algunas de ellas.

A propósito de la aplicación de la descomposición en valores singulares en la compresión de imágenes, un problema relacionado también muy importante es el de la **reconstrucción o recuperación de información** enviada de manera digital. En el caso de compresión de imágenes esto corresponde, básicamente, a inferir la matriz A dado que se tiene A_k .

Por otra parte, la aplicación del álgebra lineal en el estudio de los campos vectoriales asociados con **ecuaciones diferenciales**, alrededor de puntos críticos, es de gran ayuda pedagógica para comprender el comportamiento local de las soluciones de dichas ecuaciones, así como problemas relacionados con la unicidad de problemas con valores iniciales, tiempos de existencia de soluciones y estabilidad.

Otra aplicación que deseamos incluir es la del **análisis lineal de componentes principales** (“linear principal component analysis”) en el procesamiento y análisis de datos, así como en su clasificación. Dicho método es la base del método no lineal (“kernel-principal component analysis”). Lo anterior forma parte de un campo de la bioinformática muy fértil y de gran importancia en la ingeniería biomédica.

Por último pero no menos importante, otra aplicación del álgebra lineal muy interesante es en la elaboración de **códigos** para la transmisión integral y segura de información (cf. [2]).

Bibliografía:

- [1] Barrera Mora, F. *Álgebra lineal*, 1a. Edición. Grupo Editorial Patria. 2007.
ISBN: 978-970-817-079-6
- [2] Poole, David. *Linear Algebra: A Modern Introduction*. 3rd ed. Brooks Cole, 2010.
ISBN-10: 0538735457, ISBN-13: 978-0538735452
- [3] Schonefeld, S. Eigenpictures: picturing the eigenvector problem.
The College Mathematic Journal, 26 (1996) pp. 316-319

140 AÑOS DE HISTORIA Y TRADICIÓN

