Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
Área Académica de Matemáticas y Física

Línea de investigación: Física Matemática y Análisis Funcional
Programa educativo: Licenciatura en Matemáticas Aplicadas
Nombre de la asignatura: Ecuaciones Diferenciales Parciales
Tema: Vibraciones en polígonos
Profesor: Federico Menéndez - Conde Lara

Membranas Vibrantes

>qué forma debe tener la membrana de un tambor para ser capaz de producir el tono más bajo posible?

Membranas Vibrantes

>qué forma debe tener la membrana de un tambor para ser capaz de producir el tono más bajo posible?

circular, desde luego (golpeando en el centro...

Membranas Vibrantes

>qué forma debe tener la membrana de un tambor para ser capaz de producir el tono más bajo posible?

circular, desde luego (golpeando en el centro...

...y el tamaño importa)

Membranas Vibrantes

>qué forma debe tener la membrana de un tambor para ser capaz de producir el tono más bajo posible?

circular, desde luego (golpeando en el centro...

...y el tamaño importa)

El caso de los Tambores Poligonales

Si T es un tambor en forma de polígono de n lados, qué forma debe tener para ser capaz de producir el tono más bajo posible.

El caso de los Tambores Poligonales

Si T es un tambor en forma de polígono de n lados, qué forma debe tener para ser capaz de producir el tono más bajo posible.

En 1945 G. Polya y G. Szego conjeturan que T debe ser un polígono regular, y prueban su afirmación para cuando $n = 3, 4$.

Si T es un tambor en forma de polígono de n lados, qué forma debe tener para ser capaz de producir el tono más bajo posible.

En 1945 G. Polya y G. Szego conjeturan que T debe ser un polígono regular, y prueban su afirmación para cuando $n = 3, 4$. (*Inequalities for the Capacity of a Condenser*, American Journal of Math., Vol. 67, No. 1 (1945), pp. 1-32)

El caso de los Tambores Poligonales

Si T es un tambor en forma de polígono de n lados, qué forma debe tener para ser capaz de producir el tono más bajo posible.

En 1945 G. Polya y G. Szego conjeturan que T debe ser un polígono regular, y prueban su afirmación para cuando $n = 3, 4$. (*Inequalities for the Capacity of a Condenser*, American Journal of Math., Vol. 67, No. 1 (1945), pp. 1-32)

La conjetura permanece abierta en todos los casos restantes.

Si T es un tambor en forma de polígono de n lados, qué forma debe tener para ser capaz de producir el tono más bajo posible.

En 1945 G. Polya y G. Szego conjeturan que T debe ser un polígono regular, y prueban su afirmación para cuando $n = 3, 4$. (*Inequalities for the Capacity of a Condenser*, American Journal of Math., Vol. 67, No. 1 (1945), pp. 1-32)

La conjetura permanece abierta en todos los casos restantes.

Existe evidencia física, geométrica y numérica de que la conjetura es cierta.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ abierto, acotado, conexo, con frontera suave a trozos.

Consideramos el problema dado por la ecuación de Helmholtz sujeta a condiciones de Dirichlet:

$$(1) \qquad \begin{cases} -\Delta u = \lambda_j \; u_j & \text{in } \Omega \\ u_j = 0 & \text{in } \partial\Omega \end{cases}$$

El Laplaciano

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

La Membrana Vibrante. Formulación Matemática.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ abierto, acotado, conexo, con frontera suave a trozos.

Consideramos el problema dado por la ecuación de Helmholtz sujeta a condiciones de Dirichlet:

$$(1) \qquad \begin{cases} -\Delta u = \lambda_j \; u_j & \text{in } \Omega \\ u_j = 0 & \text{in } \partial\Omega \end{cases}$$

El Laplaciano

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Solución para eigenvalores de multiplicidad finita
$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots \to +\infty$

Puede elegirse una colección de *eigenfunciones* u_j con eigenvalores λ_j $(j = 1, 2\ldots)$ que forma una base ortonormal del espacio de Hilbert $L^2(\Omega)$.

Propiedades de las Eigenfunciones

– Las $u_j's$ representan la forma de las vibraciones periódicas (armónicas) de la membrana, siendo $\sqrt{\lambda_j}$ sus frecuencias de vibración.

– Las $u_j's$ tienen derivadas de todos los órdenes en el interior de Ω.

– Las eigenfunciones que corresponden al primer eigenvalor λ_1 no cambian de signo en Ω. Típicamente u_1 se toma positivo.

– Se sigue que λ_1 es de orden 1 y que las eigenfunciones para eigenvalores mayores necesariamente cambian signo en Ω.

– Continuación única: las $u_j's$ no se anulan en subconjuntos abiertos de Ω.