# ÁLGEBRA LINEAL I
# NOTAS DE CLASE
# UNIDAD I

Abstract. Durante la primera semana y media de clases, el siguiente esquema resultó ser quizás el más natural para presentar el teorema de existencia y unicidad de sistemas de ecuaciones lineales (teorema 1.0)

## 1. Teorema de existencia y unicidad de sistemas de ecuaciones lineales

**Definición 0.0:** convendremos en llamar *ecuación trivial nula* o simplemente *ecuación nula* a la tautología $0 = 0$.

**Definición 0.1:** convendremos en suprimir de un sistema de ecuaciones lineales a la ecuación trivial nula; es decir, en estas notas la ecuación nula no forma parte de las ecuaciones que componen a un sistema de ecuaciones lineales dado.

**Definición 1.0:** sea $S$ un sistema de $m \geq 2$ ecuaciones lineales (no nulas) en $n$ variables. Decimos que $S$ está escrito en forma *estándar* si las siguientes condiciones se cumplen:
($i$) en cada ecuación del sistema, las variables aparecen del lado izquierdo y las constantes del lado derecho.
($ii$) el orden en el que aparecen escritas las variables en la primera ecuación se repite en cada una de las ecuaciones restantes del sistema.

**Nota 1.0:** las siguientes definiciones y resultados sobre sistemas de ecuaciones lineales suponen que éstos se encuentran escritos en forma estándar.

**Definición 1.1:** las siguientes son los tres tipos de *operaciones elementales* y que consideraremos como las únicas operaciones válidas que se pueden realizar cuando se intenta resolver un sistema de ecuaciones lineales:
($i$) *intercambio:* permutar dos ecuaciones cualesquiera del sistema.
($ii$) *escalamiento:* multiplicar una ecuación por un escalar distinto de cero.
($iii$) *substitución:* sumar a una ecuación un escalamiento de otra ecuación del sistema.

**Definición 1.2:** sean $S$ y $S'$ dos sistemas de ecuaciones lineales tales que al aplicar un número finito de operaciones elementales a $S$ se obtiene $S'$, en tal caso escribiremos $S \sim S'$ (léase "$S$ es similar a $S'$").

**Lema 1.1:** $\sim$ es una relación de equivalencia.

**Definición 1.3:** sea $E$ un sistema de ecuaciones lineales de tamaño $m \times n$ en donde $m > 1$ y $n > 1$. Entonces decimos que $E$ tiene forma *escalonada* (o bien $E$ es un sistema escalonado) si y solo si, para cualquier $i \geq 1$, si el primer coeficiente distinto de cero, $p_{i,j}$ , de la ecuación $i$-ésima, corresponde a la variable $j$-ésima, entonces el primer coeficiente distinto de cero de la ecuación $(i + 1)$-ésima, $p_{i+1,k}$ , corresponde a la variable $k$-ésima, en donde $k > j$. Si $m = 1$ entonces convenimos en decir que el sistema tiene forma escalonada. Si $m > 1$ y hay una o más ecuaciones cuyos lados izquierdos son idénticamente cero (es decir, todos sus coeficientes son cero), entonces convenimos en decir que el sistema tiene forma escalonada siempre y cuando tal grupo de ecuaciones sean adyacentes, ocupen los últimos lugares en

*Date*: February 4, 2010.

el sistema y el resto de las ecuaciones en la parte superior del sistema se encuentren escritas en forma escalonada.

**Definición 1.4:** a los coeficientes $p_{i,j}$ y $p_{i+1,k}$ de la definición 1.3 los llamaremos *coeficientes pivotales* $i$ e $i+1$, respectivamente, del sistema escalonado $E$. De manera similar, a las variables $j$ y $k$-ésimas del sistema las llamaremos *variables pivotales* o *variables dependientes del sistema.* A las variables no pivotales del sistema las llamaremos *parámetros o variables independientes del sistema.*

**Observación 1.0:** (trivial) si $E$ es un sistema de ecuaciones con forma escalonada y $p$ es el número de variables pivotales, entonces $p \leq m$ y $p \leq n$.

**Lema 1.2:** sea $S$ un sistema de ecuaciones lineales de tamaño $m \times n$, entonces $S \sim E$ en donde $E$ es un sistema escalonado de tamaño $m' \times n$ tal que $m \geq m'$.

**Lema 1.3:** supongamos que $E'$ y $E'$ son dos sistemas escalonados de dimensiones $m' \times n'$ y $m'' \times n''$, respectivamente, y cuyas variables pivotales (escritas en orden) son $x'_{i_1}, \ldots, x'_{i_p}$ y $x''_{i_1}, \ldots, x''_{i_q}$, respectivamente. Si $E' \sim E''$ entonces $p = q$ y $x'_{i_\alpha} = x''_{i_\alpha}$ para $\alpha = 1, \ldots, p$.

**Corolario 1.3:** sean $E$ y $E'$ sistemas lineales con forma escalonada. Si $E \sim E'$ entonces tienen los mismos parámetros.

**Definición 1.5:** sean $S$ y $E$ sistemas de ecuaciones lineales tales que $S \sim E$ y $E$ está escrito en forma escalonada. Entonces decimos que $x_k$ es una variables pivotal de $S$ si y solamente si $x_k$ es una variable pivotal del sistema $E$. Análogamente, decimos que $x_\ell$ es un parámetro del sistema $S$, si y solamente si $x_\ell$ es un parámetro del sistema $E$.

**Lema 1.4:** sean $E$ y $E'$ sistemas escalonados de tamaño $m \times n$ y $m' \times n'$, respectivamente. Si $E \sim E'$, entonces $m = m'$ y $n = n'$.

**Lema 1.5:** si $S$ y $S'$ son sistemas equivalentes de ecuaciones lineales, entonces son del mismo tamaño y tienen el mismo conjunto solución.

**Lema 1.6:** supongamos que $E$ es un sistema de ecuaciones lineales de tamaño $m \times n$ tal que está escrito en forma escalonada y sea $p$ el número de variables pivotales. Entonces una y solamente una de las siguientes posibilidades se presenta:
$(i)$ si $n > p$ entonces el sistema tiene un número infinito de soluciones.
$(ii)$ si $m = n = p$ entonces el sistema tiene solución única.
$(iii)$ si $m > p$ entonces el sistema no tiene solución.

**Definición 1.5:** en los casos $(i)$ y $(ii)$ del lema 1.4, decimos que el sistema es *consistente* y en el caso $(iii)$ decimos que el sistema es inconsistente.

**Teorema 1.1:** (*teorema de existencia y unicidad de sistemas de ecuaciones lineales*)
sea $S$ un sistema de ecuaciones lineales, entonces una y solamente una de las siguientes posibilidades se presenta:
$(i)$ el sistema es consistente y tiene un número infinito de soluciones.
$(ii)$ el sistema es consistente y tiene una solución única.
$(iii)$ el sistema es inconsistente.

**Definición 1.6:** sea $H$ un sistema de ecuaciones lineales (escrito en forma estándar) cuyos lados derechos son todos cero. A un sistema de este tipo se le denomina *sistema homogéneo.*

**Lema 1.7:** sea $H$ un sistema de ecuaciones lineales (no triviales) homogéneo de tamaño $m \times n$. Si $m < n$ entonces $H$ tiene un número infinito de soluciones. Si $m \geq n$ entonces el sistema tiene solución única o tiene un número infinito de soluciones.

**Corolario 1.7:** un sistema de ecuaciones lineales homogéneas siempre tiene solución.

**Definición 1.7:** sea $S$ un sistema de ecuaciones lineales y sea $S_H$ el sistema que se obtiene de $S$ al substituir cada unos de sus lados derechos por cero. $S_H$ se denomina *sistema homogéno asociado a S.*

**Lema 1.8:** sea $S$ un sistema de ecuaciones lineales cuyo conjunto solución es de cardinalidad infinita. Sean $x$ y $x'$ dos soluciones de $S$ tales que $x \neq x'$. Entonces $x' = x + y$ tal que $y$ es solución del sistema homogéneo asociado, $S_H$.

**Corolario 1.8:** sea $S$ un sistema consistente de ecuaciones lineales cuya solución es única. Entonces $S_H$ también es consistente y su única solución es la trivial, $x = 0$.

**Nota 1.1:** todos los resultados y definiciones arriba mencionados se traducen verbatim, casi en su totalidad, al caso de matrices (salvo que ...)

Jorge Viveros. Centro de Investigación en Matemáticas, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo. Hgo, México.

*E-mail address*: `jviveros@uaeh.edu.mx`