PROGRAMACIÓN LINEAL

enero – junio 2011

Introducción al método simplex

Nota

La siguiente es una introducción breve al método simplex. El procedimiento que se presenta no es el método simplex per ce ya que su empleo es solamente útil para resolver programas lineales con un número pequeño de variables de decisión y de restricciones; sin embargo, la idea central del procedimiento forma la base para el algoritmo simplex.

Estas notas se han escrito para guiar a los alumnos al resolver algunos de los problemas de la tarea y como ayuda al estudiar el método simplex. No es una substitución de las clases en las cuales se han discutido con cuidado todos los conceptos que aquí no se mencionan o bien solo se tocan superficialmente.

1. PRELIMINARES

Considere el siguiente programa lineal escrito en forma estándar,

$$\min_x \phi(x) = c^t x \,,$$

tal que

$$\mathbf{A}x = b \,,$$
$$x \geq 0 \,,$$

en donde $x, c \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $r(\mathbf{A}) = m$[1]. ϕ se denomina función objetivo.

Recordemos que el poliedro $R := \{x \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}x = b,\ x \geq 0\}$ es la denominada región de factibilidad del programa lineal. Si $R = \emptyset$ entonces decimos que el programa lineal no es factible (o es infactible); si $R \neq \emptyset$, entonces cualquier punto $x \in R$ se denomina solución factible.

Supongamos que $\{A_{j(1)}, \dots A_{j(m)}\}$ es un subconjunto de m columnas de $\mathbf{A}$ la cuales forman una base para su espacio columna, note que la elección de estas columnas no es única. Sea

$$\mathbf{B} := \begin{bmatrix} A_{j(1)} \cdots A_{j(m)} \end{bmatrix} \,,$$

una submatriz de $\mathbf{A}$ formada por la base elegida del espacio columna de $\mathbf{A}$. Observe que $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ es invertible. Sea

$$x_B := [x_{j(1)} \dots x_{j(m)}]^t \,,$$

un subconjunto de las componentes de x cuyos índices corresponden a los índices de la base para el espacio columna de $\mathbf{A}$ y sea

$$x_N := [x_{k(1)} \dots x_{k(m-n)}]^t \,,$$

el resto de las componentes de x que no forman parte de x_B; es decir, si definimos los conjuntos de índices $J = \{j(1), \dots j(m)\}$, $K = \{k(1), \dots k(m-n)\}$, entonces $J \cup K = \mathbb{N}(n) := \{1, 2, \dots, n\}$ y $J \cap K = \emptyset$ (entonces $K = \mathbb{N}(n)/J$). Como ya hicimos notar arriba, si el programa lineal es factible entonces podría haber más de una forma de definir los conjuntos de índices J y K; sin embargo, hay a lo

---

Date: April 5, 2011.

[1] rango de $\mathbf{A}$, es decir, la dimensión del espacio columna de $\mathbf{A}$. Esta suposición no es necesaria y se ha tomado solamente por conveniencia en la claridad de la exposición

más $\left(\begin{array}{c} n \\ m \end{array} \right) = \frac{n!}{(n-m)!m!}$ formas distintas de definir tales juegos de índices. Las componentes del vector x_B se denominan variables básicas[2] y las componentes del vector x_N se denominan variables no básicas. En la siguiente sección, la siguiente matriz jugará un papel tan importante como el de $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{N} \, := \, \left[\mathbf{A_{k(1)}} \cdots \mathbf{A_{k(n-m)}} \right] \; ;$$

es decir, $\mathbf{N}$ está formada por el conjunto de columnas de $\mathbf{A}$ que no se utilizaron para formar a la matriz $\mathbf{B}$; $k(\ell) \in K$, $\ell = 1, \ldots n-m$.

Dado $b \in \mathbb{R}^m$ y un conjunto de índices J (correspondiente a una elección de una base para el espacio columna de $\mathbf{A}$), si el programa lineal es factible entonces existe un único $x_B = x_B^0$ definido como arriba, tal que $\mathbf{B}x_B = b$, en donde $\mathbf{B}$ es la matriz definida anteriormente. En tal caso llamamos al vector

$$x^0 \, = \, \left[\begin{array}{c} x_B^0 \\ 0 \end{array} \right]$$

solución factible básica; note que $0 \in \mathbb{R}^{n-m}$ y corresponde a tomar $x_N = 0$. Es importante observar que las componentes de x^0 no están ordenadas de la misma forma en la que lo están las componentes de x, en tal caso, existe una matriz de permutación P tal que el ordenamiento de las coordenadas de vector Px^0 sí corresponde con aquel que tienen las coordenadas del vector x, entonces $\mathbf{A}Px^0 = b$ [3]. Más aún, dado que hay a lo más $n!/(n-m)!m!$ formas distintas de definir el conjunto de índices J, el conjunto de soluciones factibles básicas también está acotado superiormente por este mismo número.

Supongamos que el programa lineal es factible, es decir, $R \neq \emptyset$. La siguiente es una lista de resultados demostrados en clase:

(*i*) Si R es acotada, entonces el programa lineal alcanza su mínimo (punto óptimo) en un vértice de R, dicho vértice corresponde a una solución factible básica. Recíprocamente, si x^0 es una solución factible básica del programa lineal, entonces esta corresponde a un vértice de la región de factibilidad R (el cual no es necesariamente un punto óptimo).

(*ii*) R no es acotada si y sólo si, dado cualquier punto p sobre R existe por lo menos una dirección $d \in \mathbb{R}^n$ tal que $x(t) = p + sd \in R$ para todo $s \geq 0$. d se denomina una dirección de R, d es tal que $\mathbf{A}d = 0$; es decir, d pertenece al núcleo de $\mathbf{A}$. En general, si R no es acotada el conjunto de todas sus direcciones linealmente independientes tiene cardinalidad igual o mayor que uno.

(*iii*) Si ϕ no está acotada inferiormente sobre R, entonces R no es acotada y decimos que el óptimo se alcanza en infinito y que el "valor óptimo" de ϕ es menos infinito $(-\infty)$. En tal caso existe una solución factible básica x^0 y una dirección d tal que $g(s) := \phi(Px^0 + sd)$, en donde P es una matriz de permutación como se definió anteriormente, es estrictamente decreciente y no acotada inferiormente.

2. El mecanismo básico del método simplex

El algoritmo simplex se basa en el procedimiento detallado a continuación, el cual se discutió ampliamente en clase, aquí simplemente será expuesto y posteriormente discutiremos brevemente las condiciones que bajo las cuales tal procedimiento se detiene.

Supongamos que $x^0 = [x_B^t \; x_N^t]^t$, $x_N = 0 \in \mathbb{R}^{n-m}$, es una solución básica factible del programa lineal estándar definido al inicio de la sección anterior. Entonces existen matrices $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ y $\mathbf{N} \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$ tales que

$$\mathbf{B}x_B + \mathbf{N}x_N \, = \, b \, .$$

En la ecuación anterior, hemos decidido escribir explicitamente el vector x_N a pesar de ser un vector nulo ya que nuestro objetivo será el de construir otra solución factible básica x^1 a partir de x^0, mediante

---

[2] porque corresponden a una elección de columnas de $\mathbf{A}$ las cuales forman una base para su espacio columna o rango

[3] no hemos querido utilizar negritas para denotar a la matriz de permutación P ya que el papel que estas matrices de permutación juegan dentro del algoritmo simplex es prácticamente nulo

incrementar (desde cero) el valor de alguna de las componentes del vector x_N, de forma tal que el valor de la función objetivo disminuya. Por supuesto que este proceso requerirá de cambiar los valores de las coordenadas del vector x_B.

Sea entonces $x^1 = [x_B^t \; x_N^t]^t$, en donde ahora no todas las componentes de x_N son nulas. Resolviendo para x_B se tiene,

$$x_B = x_B(x_N) \; = \; \mathbf{B}^{-1}b - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}x_N \; ; \tag{1}$$

observe que fijando $x_N = 0$ en (1) se traduce en $x^1 = x^0$.

Definamos los vectores c_B y c_N a partir del vector de pesos c de la función objetivo de la siguiente manera,

$$c_B = \left[c_{j(1)}, \cdots c_{j(m)}\right]^t \; , \quad c_N = \left[c_{k(1)}, \cdots c_{k(n-m)}\right]^t \; ;$$

es decir, $c = P[c_B^t \; c_N^t]^t$ en donde P es la misma matriz de permutación que escribe las coordenadas de x^0 en su orden original (el orden del vector x); equivalentemente, $j(\ell) \in J$ y $k(\ell) \in K$. Entonces

$$\phi(Px^1) = c_B^t x_B + c_N^t x_N \; . \tag{2}$$

Substituyendo x_B de (1) en (2) y reordenando obtenemos

$$\phi(Px^1) = c_B^t \mathbf{B}^{-1}b - (c_B^t \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} - c_N^t)x_N \; .$$

Observe que $c_B^t \mathbf{B}^{-1}b = \phi(Px^0)$, entonces

$$\phi(Px^1) = \phi(Px^0) - (c_B^t \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} - c_N^t)x_N \; ,$$

entonces para lograr que x^1 resulte en una solución factible básica con un valor objetivo menor que el de x^0, es suficiente con modificar x_N de la siguiente manera:

(i) identifique la componente positiva más grande del vector renglón $c_B^t \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} - c_N^t$, observe que podría haber más de una tal componente (cuando dos componentes tienen el mismo valor), en tal caso escoja una; supongamos que la componente identificada se encuentra en la posición r. Si el vector no tuviese componentes positivas entonces la solución factible básica con la que se comenzó ya es la óptima.

(ii) haga $x_N^t = [0 \cdots 0\,1\,0 \ldots 0]x_{k(r)}$, en donde el número uno se encuentra en la posición r; es decir, $x_N = e_r x_{k(r)}$, en donde e_r representa al vector r de la base canónica para $\mathbb{R}^{n-m}$.

(iii) substituya $x_N = e_r x_{k(r)}$ en (1) e imponga la restricción técnica $x_B \geq 0$,

$$0 \leq x_B = x_B(x_N) \; = \; \mathbf{B}^{-1}b - \mathbf{B}^{-1}N_r x_{k(r)} \; ; \tag{3}$$

en donde N_r representa la columna r de N, es decir $N_r = A_{k(r)}$. Observe que $\mathbf{B}^{-1}b \geq 0$ por hipótesis (x^0 es una solución factible básica). Incremente el valor del parámetro $x_{k(r)}$ desde cero hasta que ocurra por primera vez que alguna de las componentes positivas de x_B se anule. Note que podría ser el caso que dos o más componentes se anulen simultaneamente, si eso sucede, escoja una, digamos $x_{j(s)}$. Observe que podemos calcular el valor exacto de $x_{k(r)}$ para el cual ocurre que se anule por vez primera alguna de las componentes de x_B. En efecto,

$$x_{k(r)} = \min\left\{ \frac{(\mathbf{B}^{-1}b)_\ell}{(\mathbf{B}^{-1}N_r)_\ell} \; : \; (\mathbf{B}^{-1}N_r)_\ell > 0 \right\} . \tag{4}$$

Supongamos que el mínimo de las cantidades del lado derecho de la ecuación anterior se alcanza cuando $\ell = s$, entonces la componente anulada de x_B es $x_{j(s)}$.

(iv) El proceso anterior construye una nueva solución factible básica, $x^1 = [(x_B^1)^t \; (x_N^1 = 0)^t]^t$, en donde

$$x_B^1 = [x_{j(1)}^1 \cdots x_{j(s-1)}^1 \;\; x_{k(r)} \;\; x_{j(s+1)}^1 \cdots x_{j(m)}^1]^t \; ,$$

es tal que $x_{k(r)}$ está dado por (4) y el resto de las componentes han sido actualizadas de acuerdo con la ecuación (3). Notemos que en efecto, podemos pensar que las variables $x_{k(r)}$ (no básica) y $x_{j(s)}$ (básica) han intercambiado papeles.

Los pasos descritos anteriormente corresponden a una iteración del algoritmo simplex. Este proceso se repite (siguiente iteración) tomando a x^1 como solución básica inicial. Nótese que las matrices $\mathbf{B}$ y $\mathbf{N}$ así como los vectores c_B y c_N también deben de actualizarse de acuerdo con el nuevo juego de índices, $J^1 = \{j(1), \ldots, j(s-1), k(r), j(s+1), \ldots, j(m)\}$ y $K^1 = \{k(1), \ldots, k(r-1), j(s), k(r+1), \ldots, k(n-m)\}$. El proceso se detiene cuando todas las componentes del vector $c_B^t \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} - c_N^t$ son negativas (el punto óptimo ya ha sido alcanzado y es único), o bien cuando todas las componentes del vector $\mathbf{B}^{-1}N_r$ son negativas (el punto óptimo se encuentra en infinito, es decir, R no es acotada, y ϕ no es acotada inferiormente). Observe que si todas las componentes de $c_B^t \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} - c_N^t$ son negativas salvo alguna que es cero, esto quiere decir que podemos intercambiar la variable no básica correspondiente con alguna básica[4] sin modificar el valor de la función objetivo, en tal caso el punto óptimo no es único.

Los casos degenerados, por ejemplo, condiciones estructurales redundantes o el caso de ciclicidad, serán discutidos en otra parte.

Con este preámbulo el alumno puede comenzar a tratar los primeros ejercicios del problemario 2 (cf. ejercicios de muestra en la página web).

PREGUNTAS: JORGE VIVEROS. CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO. HGO, MÉXICO.

E-mail address: `jviveros@uaeh.edu.mx`

---

[4] esto se tiene que demostrar y se deja como ejercicio para el lector

Ejemplo 3.6, p. 103 (Bazaraa-Jarvis)

Solución óptima única

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{min} & -3x_1 + x_2 & & \\
\text{tal que} & x_1 + 2x_2 + x_3 & & = 4 \\
 & -x_1 + \ \ x_2 & + x_4 & = 1 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 & &
\end{array}
$$

```
>> A=[1 2 1 0 ; -1 1 0 1], b=[4 ; 1], c=[-3 1 0 0]

A =

     1     2     1     0
    -1     1     0     1


b =

     4
     1


c =

    -3     1     0     0

>> J=[1 2]; K=[3 4];
```

← escoge índices básicos y no básicos

```
>> B=A(:,J); iB=inv(B); y=iB*b

y =

    0.6667
    1.6667
```

← Sí se produce solución factible básica $(x_1,x_2,x_3,x_4) = (0.6667,1.6667,0,0)$

```
>> xB=y; N=A(:,K); cB=c(J); cN=c(K); phival=cB*xB

phival =

   -0.3333
```

← valor de la función objetivo en la solución factible básica actual

```
>> cB*iB*N-cN

ans =

   -0.6667    2.3333

>> r=2;
```

← identifica x_4 como variable “entrante” (se convertirá en básica)

```
>> chxkr=(iB*b)./(iB*N(:,r))

chxkr =

   -1.0000
    5.0000
```

`>> s=2;` ← identifica x_2 como variable “saliente” (se convertirá en no básica)

```
>> xkr=chxkr(s)

xkr =
```

`     5` ← x_4 incrementa su valor desde cero hasta cinco.

```
>> xB=iB*(b-N(:,r)*xkr)

xB =

     4
     0
```

`>> xB(s)=xkr; xB` ← actualiza el vector de variables básicas y sus valores

```
xB =
```

`     4` $= x_1$

`     5` $= x_4$

`>> Jn=K(r); Kn=J(s); J(s)=Jn; K(r)=Kn;` ← actualiza vectores de índices básicos y no básicos

```
>> J, K

J =

     1     4


K =

     3     2

>> cB=c(J); cN=c(K);
>> phival=cB*xB

phival =
```

`   -12` ← valor de función objetivo en nuevo punto extremo (4,0,0,5)

```
>> B=A(:,J); N=A(:,K);
>> iB=inv(B);
>> cB*iB*N-cN

ans =

    -3     -7
```

← las variables no básicas (x_2,x_3) deben permanecer en cero o de otra forma el valor de la función objetivo aumentaría. Se ha alcanzado el óptimo.

__Solución óptima no única__

$$
\begin{array}{ll}
\text{min} & -2x_1 - 4x_2 \\
\text{tal que} & x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\
 & -x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{array}
$$

```
>> A=[1 2 1 0 ; -1 1 0 1], b=[4 ; 1], c=[-2 -4 0 0]

A =

     1     2     1     0
    -1     1     0     1


b =

     4
     1


c =

    -2    -4     0     0

>> J=[1 2]; K=[3 4];
```

← escoge índices básicos y no básicos

```
>> B=A(:,J); iB=inv(B); y=iB*b

y =

    0.6667
    1.6667
```

0.6667 $= x_1$ la elección de variables básicas sí produjo una solución facible básica

1.6667 $= x_2$

```
>> xB=y; N=A(:,K); cB=c(J); cN=c(K);
>> phival=cB*xB

phival =

    -8
```

← valor de la función objetivo en actual punto factible básico,

$(x_1,x_2,x_3,x_4)=(0.6667,1.6667,0,0)$

```
>> cB*iB*N-cN

ans =

    -2         0
```

← En este paso nos damos cuenta de que el punto es óptimo, ya que solamente podríamos incrementar el valor de la variable x_4 desde cero y en el proceso el valor de la función objetivo permanecerá igual. Por la misma razón, el punto óptimo no es único.

Ahora encontraremos otro punto incrementando el valor de x_4:

```
>> r=2;
>> chxkr=(iB*b)./(iB*N(:,r))

chxkr =

   -1.0000
    5.0000
```

← detecta variable "saliente" (básica a convertirse en no básica, x_2)

```
>> s=2;
>> xkr=chxkr(s); xB=iB*(b-N(:,r)*xkr)

xB =

     4
     0

>> xB(s)=xkr; xB
```

← actualiza el vector de variables básicas

```
xB =

     4
     5
```

4 = x_1
5 = x_4

```
>> Jn=K(r); Kn=J(s); J(s)=Jn; K(r)=Kn;
```

← actualiza vectores de índices básicos y no básicos

```
>> J, K

J =

     1     4


K =

     3     2
```

```
>> cB=c(J); cN=c(K);
>> phival=cB*xB

phival =

    -8
```

← valor de la función objetivo en el actual punto factible básico $(x_1,x_2,x_3,x_4)=(4,0,0,5)$. Note que este valor es el mismo que el valor en el punto inicial, como se habia anticipado arriba.

¿Qué pasaria si siguiéramos aplicando el algoritmo?
En tal caso produciríamos más puntos extremos y en algún momento estos comenzarían a repetirse ya que la región de factibilidad (poliédrica) tiene un número finito de vértices.

```
>> B=A(:,J); N=A(:,K); iB=inv(B);
>> cB*iB*N-cN

ans =

    -2     0

>> r=2;
```

← identifica la segunda variable no básica (x_2) como “entrante,” al igual que antes, el valor de la función objetivo permanecerá inalterado.

```
>> chxkr=(iB*b)./(iB*N(:,r))

chxkr =

    2.0000
    1.6667
```

← componente positiva más pequeña

```
>> s=2;
```

← identifica la segunda componente de xB (x_4) como “saliente”.

En este punto, ya nos damos cuenta de que vamos a repetir la solución que se obutvo al principio pues el nuevo vector de variables básicas sería $xB=(x_1,x_3)$ y las soluciones básicas factibles son únicas.

```
>> xkr=chxkr(s); xB=iB*(b-N(:,r)*xkr); xB(s)=xkr; xB
```

← actualiza vector de variables básicas

```
xB =

    0.6667
    1.6667

>>
```

$0.6667 = x_1$
$1.6667 = x_2$

Nota: en general, cuando todos los puntos sobre una cara de la región poliédrica son puntos extremos, el método anterior encuentra todos los vértices sobre esa cara.

Preguntas: `jviveros@uaeh.edu.mx`

Ejemplo 3.7, p.106 (Bazaraa-Jarvis)

Solución no acotada

Programa lineal original

mín $-x_1 - 3x_2$

tal que $x_1 - 2x_2 \leq 4$

$-x_1 + x_2 \leq 3$

$x_1, x_2 \geq 0$

Programa lineal equivalente

mín $-x_1 - 3x_2 + 0x_3 + 0x_4$

tal que $x_1 - 2x_2 + x_3 = 4$

$-x_1 + x_2 + x_4 = 3$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

```
>> A=[1 -2 1 0 ; -1 1 0 1], b=[4 ; 3], c=[-1 -3 0 0]

A =

     1    -2     1     0
    -1     1     0     1


b =

     4
     3


c =

    -1    -3     0     0

>> J=[1 2]; K=[3 4]; B=A(:,J); iB=inv(B); y=iB*b

y =

   -10
    -7
```

← La elección de x_1 y x_2 como variables básicas no produce una solución factible.

←

```
>> J=[1 3]; K=[2 4]; B=A(:,J); iB=inv(B); y=iB*b

y =

    -3
     7
```

← La elección de x_1 y x_3 como variables básicas no produce una solución factible.

```
>> J=[1 4]; K=[2 3]; B=A(:,J); iB=inv(B); y=iB*b

y =

     4
     7
```

La elección de x_1 y x_4 como variables básicas **sí** produce una solución factible

(Este es nuestro punto de partida)

```
>> xB=y; cB=c(J); cN=c(K); N=A(:,K);
>> phival=cB*xB

phival =

    -4   ← valor de la función objetivo en el punto extremo (4,0,0,7)

>> cB*iB*N-cN

ans =

     5    -1

>> r=1;   ← determina que la primera variable de xN=(x2,x3) es "entrante"
>> chxkr=(iB*b)./(iB*N(:,r))

chxkr =

    -2    ← No puede determinar variable saliente (iB*N(:,r)<0)
    -7    ←

>> iB*N(:,r)      ← verifica que este vector efectivamente es negativo

ans =

    -2
    -1
```

De lo anterior se desprende que la variable x_2 puede ser incrementada desde cero de manera indefinida sin jamás violar la restricción de no negatividad de las variables. A medida que x_2 incrementa su valor, la función objetivo decrece de manera monótona y sin cota inferior.

Por lo tanto el programa lineal es no acotado (i.e., la función objetivo no está acotada dentro la región de factibilidad la cual no es acotada. "Valor objetivo es menos infinito y este se alcanza en infinito").

Nota: el rayo con vértice en (4,0,0,7) y dirección d=`[2 1 0 1]'` yace dentro de la región de factibilidad. d es un vector en el núcleo de `A` y por lo tanto una dirección de la región de factibilidad (de hecho, esta dirección es extrema).

Problema 3.4, p.125. Bazaraa & Jarvis

Nota: a continuación se resuelve este ejercicio de nuestro libro de texto siguiendo las instrucciones específicas; es decir, encontrando primero todos los puntos extremos de la región de factibilidad y evaluando la función objetivo en cada punto.

El argumento anterior para encontrar el punto óptimo si es válido en este caso porque *la región de factibilidad, R, es acotada.* Un argumento sencillo para verificar esto es el siguiente:

si *R* no fuese acotada, podemos encontrar puntos en *R* cuyas coordenadas son arbitrariamente grandes; es decir, para cualquier número entero positivo N, existe un punto en *R* de la forma (x_1,x_2,x_3) para el cual se verifica que
$\max\{x_1,x_2,x_3\} > N$.
Por otra parte, la primera condición estructural del programa lineal es
$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 6$.
Supongamos entonces que *R* no es acotada y tomemos N=7, entonces, dado que
x_1, x_2 y x_3 no son negativas, existe un punto en *R* cuyas coordenadas
satisfacen lo siguiente:
$x_1 + x_2 + 2x_3 \geq x_1 + x_2 + x_3 \geq \max\{x_1,x_2,x_3\} > 7 > 6$; es decir, existe un punto
en *R* para el cual se tiene que
$x_1 + x_2 + 2x_3 > 6$
lo cual viola la primera condición estructural, entonces *R* es acotada.

Ahora encontramos todos los puntos extremos de *R* con ayuda de Matlab. A continución todas las lineas en color azul fueron obtenidas directamente con Matlab.

```
>> A = [1 1 2 1 0 ; 1 4 -1 0 1], b=[6 ; 4], c=[2 1 -1 0 0]

A =

     1     1     2     1     0
     1     4    -1     0     1


b =

     6
     4


c =

     2     1    -1     0     0

>> J1=[1 2]; B=A(:,J1); iB=inv(B); y1=iB*b

y1 =
```

`6.6667`
`-0.6667` ← negativo, entonces `y1` no está asociado con un punto en *R*

```
>> J2=[1 3]; B=A(:,J2); iB=inv(B); y2=iB*b

y2 =
```

`4.6667` $= x_1$
`0.6667` $= x_3$ → punto extremo asociado en *R*: $(x_1,x_2,x_3)=(4.6667, 0, 0.6667)$

```
>> J3=[1 4]; B=A(:,J3); iB=inv(B); y3=iB*b

y3 =
```

`4` $= x_1$
`2` $= x_4$ → punto extremo asociado en *R*: $(x_1,x_2,x_3)=(4,0,0)$

```
>> J4=[1 5]; B=A(:,J4); iB=inv(B); y4=iB*b

y4 =
```

`6`
`-2` ← negativo, entonces `y4` no está asociado con un punto en *R*

```
>> J5=[2 3]; B=A(:,J5); iB=inv(B); y5=iB*b

y5 =
```

`1.5556` $= x_2$
`2.2222` $= x_3$ → punto extremo asociado en *R*: $(x_1,x_2,x_3)=(0, 1.5556, 2.2222)$

```
>> J6=[2 4]; B=A(:,J6); iB=inv(B); y6=iB*b

y6 =
```

`1` $= x_2$
`5` $= x_4$ → punto extremo asociado en *R*: $(x_1,x_2,x_3)=(0,1,0)$

```
>> J7=[2 5]; B=A(:,J7); iB=inv(B); y7=iB*b

y7 =
```

`6`
`-20` ← negativo, entonces `y7` no está asociado con un punto en *R*

```
>> J8=[3 4]; B=A(:,J8); iB=inv(B); y8=iB*b
```

```
y8 =

   -4   ← negativo, entonces y8 no está asociado con un punto en R
   14

>> J9=[3 5]; B=A(:,J9); iB=inv(B); y9=iB*b

y9 =

     3  = x3
     7  = x5  → punto extremo asociado en R: (x1,x2,x3)=(0, 0, 3)

>> J10=[4 5]; B=A(:,J10); iB=inv(B); y10=iB*b

y10 =

     6  = x4
     4  = x5  → punto extremo asociado en R: (x1,x2,x3)=(0, 0, 0)

>> Phi=[c(J2)*y2 c(J3)*y3 c(J5)*y5 c(J6)*y6 c(J9)*y9 c(J10)*y10]
```

la linea anterior calcula el valor de la función objetivo en cada uno de los puntos extremos de *R*.

```
Phi =

    8.6667    8.0000   -0.6667    1.0000   -3.0000         0
```

La componente más grande es la primera, entonces la función objetivo alcanza su *valor máximo* en *R* en el punto extremo asociado con `y2`, es decir, $(x_1,x_2,x_3)=(4.6667, 0, 0.6667)$

La componente más pequeña es la penúltima, entonces la función objetivo alcanza su valor mínimo en *R* en el punto extremo asociado con `y9`, es decir, $(x_1,x_2,x_3)=(0, 0, 3)$.

Observe que las dos últimas afirmaciones son compatibles con los resultados reportados en el ejercicio de muestra anterior.

Si ahora la primera restricción estructural fuese reemplazada por $x_1+x_2 - 2x_3 \leq 6$ entonces nuestra demostración de que *R* no es acotada ya no se aplica y por lo tanto ya no podemos garantizar que si utilizamos el método anterior para encontrar todos los puntos extremos de *R*, entre estos se encuentren los puntos óptimos que dan un máximo y un mínimo para la función objetivo.

Este documento fué creado utilizando Open Office writer. Software tipo Microsoft Office es, en general, tortuoso para escribir matemáticas.

Preguntas: Jorge Viveros. `jviveros@uaeh.edu.mx`

Ejemplo 3.35, p.132 (Bazaraa & Jarvis)

$$\max \quad 11x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + 4x_5 + x_6$$

tal que

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
5x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 + x_5 & & & = & 12 \\
-14x_1 & - & 3x_2 & + & 3x_3 & - & 5x_4 & & + x_6 & = & 2 \\
2x_1 & + & \frac{1}{2}x_2 & - & \frac{1}{2}x_3 & + & \frac{1}{2}x_4 & & & \leq & \frac{5}{2} \\
3x_1 & + & \frac{1}{2}x_2 & + & \frac{1}{2}x_3 & + & \frac{3}{2}x_4 & & & \leq & 3 \\
 & & & & & & \multicolumn{3}{r}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6} & \geq & 0
\end{array}$$

Programa lineal de minimización equivalente:

$$\min \quad -11x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 - 4x_5 - x_6$$

tal que

$$\begin{array}{rcrcrcrcccl}
5x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 + x_5 & & & = & 12 \\
-14x_1 & - & 3x_2 & + & 3x_3 & - & 5x_4 & + x_6 & & = & 2 \\
2x_1 & + & \frac{1}{2}x_2 & - & \frac{1}{2}x_3 & + & \frac{1}{2}x_4 & + x_7 & & = & \frac{5}{2} \\
3x_1 & + & \frac{1}{2}x_2 & + & \frac{1}{2}x_3 & + & \frac{3}{2}x_4 & & + x_8 & = & 3 \\
 & & & & & & \multicolumn{3}{r}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8} & \geq & 0
\end{array}$$

```
>> r1=[5 1 -1 2 1 0 0 0]; r2=[-14 -3 3 -5 0 1 0 0]; r3=[2 1/2 -1/2 1/2 0 0 1 0];
>> r4=[3 1/2 1/2 3/2 0 0 0 1];
>> A=[r1;r2;r3;r4], b=[12 2 5/2 3]', c=[-11 -2 1 -3 -4 -1 0 0]

A =

    5.0000    1.0000   -1.0000    2.0000    1.0000         0         0         0
  -14.0000   -3.0000    3.0000   -5.0000         0    1.0000         0         0
    2.0000    0.5000   -0.5000    0.5000         0         0    1.0000         0
    3.0000    0.5000    0.5000    1.5000         0         0         0    1.0000
```

(Note que el rango de A es igual a cuatro)

```
b =

   12.0000
    2.0000
    2.5000
    3.0000


c =

   -11    -2     1    -3    -4    -1     0     0
```

```
>> J=[5 6 7 8]; K=[1 2 3 4]; B=A(:,J); iB=inv(B); y=iB*b
```

← define etiquetas básicas y no básicas y verifica si el vector y puede ser tomado como solución factible básica inicial

```
y =
```

`   12.0000` $= x_5$
`    2.0000` $= x_6$
`    2.5000` $= x_7$
`    3.0000` $= x_8$ ← todas las componentes de `y` son mayores o iguales a cero, entonces puede ser tomado como solución factible básica inicial `(xB=y)`. Nos encontramos en el punto con coordenadas (0 , 0, 0, 0, 12, 2, 2.5, 3) en el "espacio extendido;" es decir, el espacio de las variables de decisión y de holgura.

Comienza la primera iteración:

```
>> xB=y;
>> N=A(:,K); cB=c(J), cN=c(K)

cB =
```

`    -4     -1      0      0` ← componente básica del vector de costos `c`

```
cN =
```

`   -11     -2      1     -3` ← componente no básica del vector de costos `c`

`>> phival=cB*xB` ← evalua la función objetivo en punto inicial,

```
phival =
```

`   -50` ← valor objetivo inicial (trataremos de producir nuevas soluciones factibes básicas cuyos valores objetivos sean estrictamente menores que este.

```
>> cB*iB*N-cN

ans =
```

`     5      1      0      0` ← la presencia de ceros indica que es posible encontrar otros vértices de la región de factibilidad cuyos valores objetivos son los mismos que los de la solución factible básica inicial, pero la presencia de coeficientes positivos indica que es posible encontrar vértices los cuales tendrán valores objetivos estrictamente menores que los de la solución factible inicial, así que nos daremos a la tarea de encontrar por lo menos un tal vértice.

`>> r=1;` ← escoge la primera variable no básica, x_1, como entrante ya que incrementando esta desde cero obtendremos un decrecimiento mayor de la función objetivo que si incrementáramos la segunda variable no básica (x_2).

```
>> chxkr=(iB*b)./(iB*N(:,r))

chxkr =

    2.4000
   -0.1429
```

```
    1.2500
    1.0000
```

```
>> s=4;
```

← escoge a la cuarta variable básica, x_8, como saliente, esta variable también funge como variable de bloqueo en este paso (será reemplazada por x_1. Esta parte corresponde a la prueba de los cocientes).

```
>> xkr=chxkr(s)

xkr =

     1
```

← este es el valor al cual incrementaremos desde cero a x_1, el cual corresponde al valor para el cual x_8 se anula.

```
>> xB=iB*(b-N(:,r)*xkr)
```

← actualiza los valores del vector de variables básicas

```
xB =

    7.0000
   16.0000
    0.5000
         0
```

```
>> xB(s)=xkr; xB
```

← redefine al vector de variables básicas y sus valores.

```
xB =

    7.0000
   16.0000
    0.5000
    1.0000
```

7.0000 $= x_5$
16.0000 $= x_6$
0.5000 $= x_7$
1.0000 $= x_1$

```
>> Jn=K(r); Kn=J(s); J(s)=Jn; K(r)=Kn;
```

← actualiza los índices básicos y no básicos

```
>> J, K

J =

     5     6     7     1


K =

     8     2     3     4
```

```
>> cB=c(J); cN=c(K);
```

← actualiza las partes básicas y no básicas del vector de costos

```
>> phival=cB*xB
```

← calcula el nuevo valor objetivo

```
phival =

   -55
```

← efectivamente el punto encontrado corresponde a un valor objetivo menor que el anterior (**Fin de la primera iteración**)

Comienza segunda iteración redefiniendo las matrices `B` y `N` y determinando si acaso es posible encontrar otra solución factible básica cuyo valor objetivo sea menor que el de la solución actual.

```
>> B=A(:,J); N=A(:,K); iB=inv(B);
>> cB*iB*N-cN

ans =

   -1.6667    0.1667   -0.8333   -2.5000
```

← la presencia de una componente positiva indica que es posible encontrar otra punto extremo cuyo valor objetivo sea menor que el anterior. Tal punto extremo se obtendrá incrementando desde cero la segunda variable no básica, x_2

```
>> r=2;
```

← indentifica como variable entrante a la segunda variable no básica, $x_{2,}$

```
>> chxkr=(iB*b)./(iB*N(:,r))

chxkr =

   42.0000
  -24.0000
    3.0000
    6.0000

>> s=3;
```

← identifica a la tercera variable básica, x_7, como variable saliente (variable de bloqueo en la segunda iteración)

```
>> xkr=chxkr(s)

xkr =

    3.0000
```

← este es el valor al cual incrementará desde cero la variable saliente, x_2.

```
>> xB=iB*(b-N(:,r)*xkr)
```

← actualiza los valores de las variables básicas de la primera iteración.

```
xB =

    6.5000
   18.0000
    0.0000
    0.5000

>> xB(s)=xkr; xB
```

← redefine al vector de variables básicas y sus valores

```
xB =
```

`6.5000` = x_5

`18.0000` = x_6

`3.0000` = x_2

`0.5000` = x_1

```
>> Jn=K(r); Kn=J(s); J(s)=Jn; K(r)=Kn;
>> J, K
```

```
J =

     5     6     2     1


K =

     8     7     3     4

>> cB=c(J); cN=c(K); ← redefine las partes básicas y no básicas del vector de costos  c
>> phival=cB*xB       ← calcula el valor objetivo en el punto actual

phival =

   -55.5000 ← verifica que efectivamente se ha logrado disminuir el valor de la función objetivo
              (Fin de la segunda iteración)

>> B=A(:,J); N=A(:,K); iB=inv(B);
>> cB*iB*N-cN

ans =

    -1    -1     0    -2  ← no hay componentes positivas, se ha alcanzado el óptimo.
                             Finalizar algoritmo tipo simplex. Note que el tercer valor de este
                                                       vector es cero (ver discusión siguiente).
```

El valor óptimo del programa lineal original (programa de maximización) es entonces;

$\Phi_{max} = 55.5$
$x_{max} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0.5, 3, 0, 0, 6.5, 18)$

Discusión: el hecho de que la tercera componente del vector `cB*iB*N-cN` evaluado en el punto óptimo es cero, significa que es posible utilizar la tercera componente no básica actual, x_3, como parámetro, incrementando su valor desde cero y moviéndose en la dirección del vector `iB*N(:,r)` (en el espacio de las variables básicas actuales: x_1, x_2, x_6, x_5) sin alterar el valor de la función objetivo, hasta anular alguna de las variables básicas actuales.

Para obtener una solución factible óptima no básica haremos entonces lo siguiente: **(1)** *produciremos otro punto extremo óptimo y* **(2)** *tomaremos una combinación lineal convexa de este nuevo punto con el anterior, por ejemplo (el promedio de estos dos), dado que la función objetivo es lineal, la región de factibilidad es convexa y los puntos son óptimos, el nuevo punto promedio será también óptimo, pero no corresponderá a una solución básica ya que tendrá cinco variables distintas de cero, en lugar de cuatro (cuatro es el rango de la matriz* `A` *definida al inicio en el "espacio aumentado").*

(1) Obtención de otra solución factible básica óptima **(tercera iteración)**

```
>> r=3;    ← escoge la tercera variable no básica, x3, como entrante
```

```
>> chxkr=(iB*b)./(iB*N(:,r))

chxkr =

   -6.5000
    9.0000
   -0.6000
    0.5000

>> s=4; ← escoge la cuarta variable básica, x_1, como saliente
>> xkr=chxkr(s)

xkr =

    0.5000   ← valor de la variable entrante

>> xB=iB*(b-N(:,r)*xkr)  ← actualiza valores de las variables básicas del inicio de la tercera iteración

xB =

    7.0000
   17.0000
    5.5000
         0

>> xB(s)=xkr; xB ← determina el nuevo vector de variables básicas y sus valores

xB =

    7.0000 = x_5
   17.0000 = x_6
    5.5000 = x_2
    0.5000 = x_3

>> Jn=K(r); Kn=J(s); J(s)=Jn; K(r)=Kn; ← actualiza vectores de etiquetas basicas y no básicas
>> J, K

J =

     5     6     2     3


K =

     8     7     1     4

>> cB=c(J); cN=c(K);  ← actualiza partes básica y no básica del vector de costos
>> phival=cB*xB      ← calcula valor objetivo en el punto extremo actual

phival =
```

```
  -55.5000
```

← verifica que el nuevo punto extremo efectivamente tiene un valor (óptimo) objetivo igual al del punto anterior.

Nuevo punto extremo (en el espacio de las variables de decisión):

$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0, 5.5, 0.5, 0, 7, 17)$

```
>> p1=[0.5 3 0 0 6.5 18]';
```

← punto óptimo obtenido al final de la segunda iteración

```
>> c(1:6)*p1

ans =

  -55.5000
```

← obtiene directamente el valor objetivo del punto óptimo (este paso no es necesario)

```
>> p2=[0 5.5 0.5 0 7 17]';
```

← punto óptimo obtenido al final de la tercera iteración

```
>> c(1:6)*p1

ans =

  -55.5000
```

← obtiene directamente el valor objetivo del punto óptimo (este paso no es necesario)

```
>> p=(p1+p2)./2
```

← define un nuevo punto, promedio de los dos puntos óptimos anteriores

```
p =

    0.2500 ←
    4.2500 ←
    0.2500 ←
         0
    6.7500 ←
   17.5000 ←
```

Note que p tiene cinco componentes no cero, por lo tanto no puede corresponder a una solución básica del programa lineal de minimización obtenido arriba (el segundo programa lineal).

```
>> c(1:6)*p

ans =

  -55.5000
```

← verifica que efectivamente el punto promedio `p` corresponde a un punto (factible) con el mismo valor objetivo que los puntos extremos encontrados al final de las iteraciones dos y tres; por lo tanto, `p` también es un punto óptimo (pero no es básico en el sentido en el que `p1` y `p2` lo son para el problema de minimización).

Resumiendo:
$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0.25, 4.25, 0.25, 0, 6.75, 17.5)$ *es un punto óptimo del programa lineal original, pero no corresponde a una solución factible básica del programa lineal equivalente (segundo programa lineal de la página 1).*

```
Problema 3.4, p.125. Bazaraa & Jarvis
====================================

>> A=[1 1 2 1 0; 1 4 -1 0 1], b=[6 ; 4], c=[2 1 -1 0 0]

A =

     1     1     2     1     0
     1     4    -1     0     1


b =

     6
     4


c =

     2     1    -1     0     0

>> J=[1 2]; K=[3 4 5];
>> B=A(:,J), N=A(:,K)

B =

     1     1
     1     4


N =

     2     1     0
    -1     0     1

>> iB=inv(B);
>> xB=iB*b

xB =

    6.6667
   -0.6667

>> J=[1 3]; K=[2 4 5];
>> B=A(:,J), N=A(:,K)

B =

     1     2
     1    -1


N =

     1     1     0
     4     0     1

>> iB=inv(B);
>> xB=iB*b

xB =

    4.6667
```

```
    0.6667

>> cB=c(J), cN=c(K)

cB =

     2    -1


cN =

     1     0     0

>> cB*iB*N-cN

ans =

    6.0000    0.3333    1.6667

>> r=1;
>> chxkr=(iB*b)./(iB*N(:,r))

chxkr =

    1.5556
   -0.6667

>> s=1;
>> xkr=chxkr(s)

xkr =

    1.5556

>> xB=iB*(b-N(:,r)*xkr)

xB =

    0.0000
    2.2222

>> xN=[xkr 0 0]'

xN =

    1.5556
         0
         0

>> xB=[xN(1) xB(2)]'; xN=zeros(3,1)

xN =

     0
     0
     0

>> xB

xB =

    1.5556
    2.2222
```

```
>> Jn=K(r); Kn=J(s); J(s)=Jn; K(r)=Kn;
>> J, K

J =

     2     3


K =

     1     4     5

>> B=A(:,J), N=A(:,K)

B =

     1     2
     4    -1


N =

     1     1     0
     1     0     1

>> iB=inv(B);
>> iB*b

ans =

    1.5556
    2.2222

>> cB=c(J), cN=c(K)

cB =

     1    -1


cN =

     2     0     0

>> cB*iB*N-cN

ans =

   -2.0000   -0.3333    0.3333

>> r=3;
>> chxkr=(iB*b)./(iB*N(:,r))

chxkr =

    7.0000
  -20.0000

>> s=1;
>> xkr=chxkr(s)

xkr =
```

```
    7.0000

>> xB=iB*(b-N(:,r)*xkr)

xB =

    0.0000
    3.0000

>> xN=[0 0 xkr]'

xN =

         0
         0
    7.0000

>> xB=[xN(r) xB(2)]', xN=zeros(3,1)

xB =

    7.0000
    3.0000


xN =

     0
     0
     0

>> Jn=K(r); Kn=J(s); J(s)=Jn; K(r)=Kn;
>> J, K

J =

     5     3


K =

     1     4     2

>> B=A(:,J), N=A(:,K)

B =

     0     2
     1    -1


N =

     1     1     1
     1     0     4

>> iB=inv(B); iB*b

ans =

     7
     3
```

```
>> cB=c(J), cN=c(K)

cB =

     0    -1


cN =

     2     0     1

>> cB*iB*N-cN

ans =

   -2.5000   -0.5000   -1.5000
```

```
Problema 3.4, p.125. Bazaraa & Jarvis
====================================

>> A=[1 1 2 1 0 ; 1 4 -1 0 1], b=[6 ; 4], c=[-2 -1 1 0 0]

A =

     1     1     2     1     0
     1     4    -1     0     1


b =

     6
     4


c =

    -2    -1     1     0     0

>> J=[1 4]; K=[2 3 5];
>> B=A(:,J), N=A(:,K)

B =

     1     1
     1     0


N =

     1     2     0
     4    -1     1

>> iB=inv(B);
>> xB=iB*b

xB =

     4
     2

>> cB=c(J), cN=c(K)

cB =

    -2     0


cN =

    -1     1     0

>> cB*iB*N-cN

ans =

    -7     1    -2

>> r=2;
>> chxkr=(iB*b)./(iB*N(:,r))
```

```
chxkr =

   -4.0000
    0.6667

>> s=2;
>> xkr=chxkr(s)

xkr =

    0.6667

>> xB=iB*(b-N(:,r)*xkr)

xB =

    4.6667
         0

>> xB(s)=xkr; xB

xB =

    4.6667
    0.6667

>> xN=zeros(3,1)

xN =

     0
     0
     0

>> Jn=K(r); Kn=J(s); J(s)=Jn; K(r)=Kn;
>> J, K

J =

     1     3


K =

     2     4     5

>> B=A(:,J), N=A(:,K)

B =

     1     2
     1    -1


N =

     1     1     0
     4     0     1

>> iB=inv(B);
>> iB*b

ans =
```

```
    4.6667
    0.6667

>> cB=c(J), cN=c(K)

cB =

    -2     1


cN =

    -1     0     0

>> phival=cB*xB

phival =

   -8.6667

>> cB*iB*N-cN

ans =

   -6.0000   -0.3333   -1.6667
```

Ejercicio 3-3-2, p.55 (Ferris-Mangasarian-Wright)

$$\begin{array}{ll} \text{min} & x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 4x_4 \\ \text{tal que} & x_2 - 2x_3 - x_4 \geq -4 \\ & 2x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 \geq -5 \\ & -x_1 + x_2 - 2x_4 \geq -3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{min} & x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 4x_4 \\ \text{tal que} & x_2 - 2x_3 - x_4 - x_5 = -4 \\ & 2x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 - x_6 = -5 \\ & -x_1 + x_2 - 2x_4 - x_7 = -3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

Método simplex sin fase uno, solución óptima no acotada.

Método del parcial 5 (sin tableau)

```
>> A=[0 1 -2 -1 -1 0 0 ; 2 -1 -1 4 0 -1 0 ; -1 1 0 -2 0 0 -1],
b=[-4 -5 -3]',
c=[1 -2 -4 4 0 0 0]

A =

     0     1    -2    -1    -1     0     0
     2    -1    -1     4     0    -1     0
    -1     1     0    -2     0     0    -1


b =

    -4
    -5
    -3


c =

     1    -2    -4     4     0     0     0

>> J=[5 6 7]; K=[1 2 3 4];
```

← escoge variables básicas = variables de holgura
(esta elección era obvia, ¿por qué?)

```
>> B=A(:,J); iB=inv(B); y=iB*b

y =
```

4 $=x_5$
5 $=x_6$
3 $=x_7$

```
>> xB=y; N=A(:,K); cB=c(J); cN=c(K); phival=cB*xB

phival =
```

```
     0
```

← los valores de xB y phival eran también obvios, se han puesto aquí solo por uniformidad de la presentación.

```
>> cB*iB*N-cN

ans =

    -1     2     4    -4

>> r=3;
```

← x_3 ha sido escogida como variable entrante –tercera componente del vector `K`

```
>> chxkr=(iB*b)./(iB*N(:,r))

chxkr =

     2
     5
   Inf
```

← (infinito) significa que la última componente del vector renglón `iB*N(:,r)` es cero).

```
>> s=1;
```

← x_5 ha sido escogida como variable saliente –primera componente del vector `J`

```
>> xkr=chxkr(s); xB=iB*(b-N(:,r)*xkr)

xB =

     0
     3
     3

>> xB(s)=xkr; xB
```

← actualiza vector de variables básicas

```
xB =

     2
     3
     3
```

$2 = x_3$

$3 = x_6$

$3 = x_7$

```
>> Jn=K(r); Kn=J(s); J(s)=Jn; K(r)=Kn;
```

← actualiza vectores de índices básicos y no básicos

```
>> J, K

J =

     3     6     7


K =

     1     2     5     4
```

```
>> cB=c(J); cN=c(K);
>> phival=cB*xB

phival =

    -8        ← actualiza valor de función objetivo

>> B=A(:,J); iB=inv(B); N=A(:,K);
>> cB*iB*N-cN

ans =

    -1     4     -2     -6   ← determina que el mínimo aún no ha sido alcanzado

>> r=2; ← x2 (cf. segunda componente del vector K) es la variable entrante
>> chxkr=(iB*b)./(iB*N(:,r))

chxkr =

    -4
     2
    -3

>> s=2; ← x6 (cf segunda componente del vector J) es la variable saliente
>> xkr=chxkr(s)

xkr =

     2   ← x2 icrementa su valor desde cero hasta x2 = 2

>> xB=iB*(b-N(:,r)*xkr)

xB =

     3
     0
     5

>> xB(s)=xkr; xB ← actualiza vector de variables básicas

xB =

     3  = x3
     2  = x2
     5  = x7

>> Jn=K(r); Kn=J(s); J(s)=Jn; K(r)=Kn; ← actualiza vectores de índices básicos y no
```

básicos

```
>> J, K

J =

     3     2     7


K =

     1     6     5     4

>> cB=c(J); cN=c(K);
>> phival=cB*xB

phival =

   -16         ← actualiza valor objetivo

>> B=A(:,J); iB=inv(B); N=A(:,K);
>> cB*iB*N-cN

ans =

    4.3333   -2.6667   -0.6667    6.0000  ← determina que el mínimo aún no ha sido
                                                                        alcanzado

>> r=4;  ← x4 (cf. cuarta componente del vector K) es la variable entrante
>> chxkr=(iB*b)./(iB*N(:,r))

chxkr =

   -3.0000   ←  iB*N(:,r)<0  significa que el valor de x4 puede incrementarse indefinidamente
   -0.6667   ←  desde cero sin abandonar la región de factibilidad; por lo tanto la función objetivo
   -5.0000   ← no está acotada inferiormente sobre la región de factibilidad.

>> iB*b  ← esta parte solo verifica el punto extremo encontrado arriba y no es necesaria (se ha puesto
                    solo por conveniencia para el lector, el alumno no la reportará en sus trabajos)

ans =

    3.0000
    2.0000
    5.0000

>> iB*N(:,r)  ← calcula la dirección a lo largo de la cual podemos movernos a partir del punto
                extremo anterior sin dejar la región de factibilidad
```

```
ans =

   -1.0000
   -3.0000
   -1.0000
```

La siguiente es la ecuación paramétrica del rayo contenido en la región de factbilidad en el espacio de las variables originales (x_1, x_2, x_3, x_4) tal que sobre este rayo la función objetivo no está acotada inferiormente:

$x_1 = 0$, $x_2 = 2 + 3\lambda$, $x_3 = 3 + \lambda$, $x_4 = \lambda$; $\lambda \geq 0$.

Método del tableau (Ferris-Mangasarian-Wright)

Notas:

(1) la siguiente es una lista de todos los programas de matlab (con sus dependencias) que necesitarán tener grabados en su directorio de trabajo para la fase II del método del tableau del algoritmo simplex:

Programa	Dependencias
`totbl.m`	`writelbl.m, tbl.m`
`ljx.m`	`jx.m, tbl.m`

(2) Los vectores `b` y `c` deben ser ingresados como *vectores columna.*

```
>> A=[0 1 -2 -1 ; 2 -1 -1 4 ; -1 1 0 -2], b=[-4 -5 -3]', c=[1 -2 -4 4]'

A =

     0     1    -2    -1
     2    -1    -1     4
    -1     1     0    -2


b =

    -4
    -5
    -3


c =

     1
    -2
    -4
     4
```

```
>> T=totbl(A,b,c)
                x1         x2         x3         x4          1
       ---------------------------------------------------------
 x5  = |     0.0000     1.0000    -2.0000    -1.0000     4.0000
 x6  = |     2.0000    -1.0000    -1.0000     4.0000     5.0000
 x7  = |    -1.0000     1.0000     0.0000    -2.0000     3.0000
       ---------------------------------------------------------
 z   = |     1.0000    -2.0000    -4.0000     4.0000     0.0000

T =

       val: [4x5 double]   ← estas lineas las ignoraremos
       bas: {4x1 cell}     ← y solamente
    nonbas: {5x1 cell}     ← aparecerán en este
       obj: 4              ← ejercicio (el alumno NO las reportará en sus trabajos)
```

Los colores arriba indican que la tercera columna ha sido seleccionada como pivotal (x_3) es la variable entrante. Note que *no estamos utilizando la regla de Bland en esta ocasión*. Más adelante utilizamos la regla de Bland y se le pide al lector apreciar cuántos tableaus mas o menos nos tomaría el llegar a la respuesta. En este mismo paso determinamos el renglón pivotal (x_5) utilizando la regla del cociente.

```
>> T=ljx(T,1,3)  ← realiza el intercambio de Jordan correspondiente
                x1         x2         x5         x4          1
       ---------------------------------------------------------
 x3  = |     0.0000     0.5000    -0.5000    -0.5000     2.0000
 x6  = |     2.0000    -1.5000     0.5000     4.5000     3.0000
 x7  = |    -1.0000     1.0000    -0.0000    -2.0000     3.0000
       ---------------------------------------------------------
 z   = |     1.0000    -4.0000     2.0000     6.0000    -8.0000

T =

       val: [4x5 double]
       bas: {4x1 cell}
    nonbas: {5x1 cell}
       obj: 4
```

Solamente hay una opción para columna pivotal (i.e., para variable entrante).

```
>> T=ljx(T,2,2)
                x1         x6         x5         x4          1
       ---------------------------------------------------------
 x3  = |     0.6667    -0.3333    -0.3333     1.0000     3.0000
 x2  = |     1.3333    -0.6667     0.3333     3.0000     2.0000
 x7  = |     0.3333    -0.6667     0.3333     1.0000     5.0000
       ---------------------------------------------------------
 z   = |    -4.3333     2.6667     0.6667    -6.0000   -16.0000
```

```
T =

       val: [4x5 double]
       bas: {4x1 cell}
    nonbas: {5x1 cell}
       obj: 4
```

La prueba del cociente no puede determinar una variable saliente, esto quiere decir que el punto óptimo se alcanza en infinito, o bien que la función objetivo no está acotada inferiormente. *Observe que el punto extremo coincide con el encontrado con el método anterior (sin tableau).*

Queda como ejercicio para el lector el demostrar que el rayo obtenido con el método del tableau es el mismo que el obtenido con el método primero (*sin tableau*).

Repitiendo el método anterior utilizando la regla de Bland:

A, b y c ya están cargadas en la memoria así que no las volvemos a escribir, solamente el tableau inicial:

```
>> T=totbl(A,b,c)
              x1          x2          x3          x4           1
       -------------------------------------------------------------
 x5  = |      0.0000      1.0000     -2.0000     -1.0000      4.0000
 x6  = |      2.0000     -1.0000     -1.0000      4.0000      5.0000
 x7  = |     -1.0000      1.0000      0.0000     -2.0000      3.0000
       -------------------------------------------------------------
 z   = |      1.0000     -2.0000     -4.0000      4.0000      0.0000
```

La regla de Bland del índice más pequeño y la prueba del cociente determinan que se deben de intercambiar x_2 (variable entrante)y x_6 (variable saliente)

```
>> T=ljx(T,2,2)
              x1          x6          x3          x4           1
       -------------------------------------------------------------
 x5  = |      2.0000     -1.0000     -3.0000      3.0000      9.0000
 x2  = |      2.0000     -1.0000     -1.0000      4.0000      5.0000
 x7  = |      1.0000     -1.0000     -1.0000      2.0000      8.0000
       -------------------------------------------------------------
 z   = |     -3.0000      2.0000     -2.0000     -4.0000    -10.0000
```

La regla de Bland del índice más pequeño identifica a x_1 como la variable entrante pero no puede identificar una variable saliente, por lo tanto se llega a la conclusión de que la función objetivo no está acotada inferiormente dentro de la región de factibilidad. Observe que este método encuentra otro punto extremo y correspondiente rayo sobre el cual la función objetivo no está acotada inferiormente:
$x_1 = \mu$, $x_2 = 5 + 2\mu$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $\mu \geq 0$.

Preguntas: `jviveros@uaeh.edu.mx`

PROGRAMACIÓN LINEAL

enero – junio 2011

Hints a ejercicios selectos del problemario 1

Notas

A continuación se presentan hints a algunos de los problemas de la primer tarea. Aquellos ejercicios cuya solución no haya sido presentada en su totalidad suponen que el alumno proveerá las partes faltantes siguiendo las instrucciones señaladas.

Los soluciones no necesariamente representan la forma óptima de resolver los problemas, más aún, podrían existir errores en las mismas (e.g., tipográficos o algebraicos), por lo que se le sugiere al alumno mantener una postura crítica al hacer la lectura de este documento.

1. EJERCICIOS DEL LIBRO DE BAZARAA & JARVIS

p.75, ej. 24. Encuentre la solución general del siguiente sistema,

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 3\,, \\ -x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & = & 6\,. \end{array} \tag{1}$$

Sol.: sea $\mathbf{A}$ la matriz de coeficientes del sistema (1) y $b = (3, 6)^t$, entonces (1) tiene asociada la matriz aumentada del extremo izquierdo de la siguiente cadena de matrices, la cual representa el proceso de eliminación de Gauss-Jordan de la misma:

$$(\mathbf{A}\,|\,b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & 2 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{2}{7} & \frac{9}{7} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{7} & \frac{3}{7} \\ 0 & 1 & \frac{2}{7} & \frac{9}{7} \end{pmatrix}.$$

Entonces, si $x = (x_1, x_2, x_3)^t$ es un vector solución del sistema, este puede escribirse de la siguiente forma:

$$x = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix} x_3\,, \quad x_3 \in \mathbb{R}\,. \tag{2}$$

Dejamos como ejercicio al lector el verificar lo siguiente acerca de la matriz $\mathbf{A}$: su rango es dos, sus primeras dos columnas son pivotales y por lo tanto una base para $C(\mathbf{A})$ (espacio columna de $\mathbf{A}$), la dimensión del núcleo de $\mathbf{A}$, $N(\mathbf{A})$, es uno (determine una base para $N(\mathbf{A})$ a partir de (2)). Identifique además las matrices $\mathbf{B}$ y $\mathbf{N}$ que hacen los siguientes cálculos ciertos: si $x' = (x_1, x_2)^t$ y $x'' = x_3$, entonces $\mathbf{B}x' + \mathbf{N}x'' = b$ y $x' = \mathbf{B^{-1}}b - \mathbf{B^{-1}N}x''$ y se tiene que

$$x = \begin{pmatrix} \mathbf{B^{-1}}b \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\mathbf{B^{-1}N} \\ 1 \end{pmatrix} x'' =: x_B + x_h\,. \tag{3}$$

Dejamos al lector convencerse también de lo siguiente: x_B es *la* solución básica del sistema (en álgebra lineal se le llamaría solución particular, pero x_B es una solución particular que se distingue de entre todas las posibles soluciones particulares porque tiene, en general, el mayor número posible de entradas nulas), x_h es la solución general del sistema homogéneo, $\mathbf{A}x = 0$, ($x'' \in \mathbb{R}$ juega el papel de parámetro) y para $x'' \neq 0$, $x = x_B + x_h$ es una solución no-básica.

p.75, ej. 25. Encuentre todas las soluciones básicas del siguiente sistema,

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & - & 2x_5 & = & 4\,, \\ x_1 & - & 2x_2 & & & + & x_4 & - & x_5 & = & 3\,. \end{array} \tag{4}$$

Date: March 5, 2011.

Sol: así como en el ejercicio anterior, la respuesta a este problema se basa en la obtención de la forma forma escalonada reducida de la matriz aumentada asociada con (4). Si **A** es la matriz de coeficientes del sistema y $b = (4,3)^t$ entonces,

$$(\mathbf{A}\,|\,b) = \left(\begin{array}{rrrrrr} -1 & 1 & 1 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrrr} -1 & 1 & 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & -3 & 7 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{rrrrrr} -1 & 0 & 2 & 3 & -5 & 11 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & -3 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrrr} 1 & 0 & -2 & -3 & 5 & -11 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 3 & -7 \end{array}\right).$$

De lo anterior se desprende que x_1 y x_2 son variables básicas (i.e., están asociadas con las dos primeras columnas de **A**, las cuales constituyen una base para $R(\mathbf{A})$ y también se denominan pivotales) mientras que las restantes, x_3, x_4 y x_5, son no-básicas (parámetros). Sean $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, $x' = (x_1, x_2)^t$ y $x'' = (x_3, x_4, x_5)^t$, entonces

$$x = \begin{pmatrix} \mathbf{B^{-1}}b \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\mathbf{B^{-1}N} \\ \mathbf{I_3} \end{pmatrix} x'' , \tag{5}$$

en donde $\mathbf{I_3}$ es la matriz identidad de tamaño tres y

$$\mathbf{B^{-1}}b = \begin{pmatrix} -11 \\ -7 \end{pmatrix}, \qquad -\mathbf{B^{-1}N} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Dejamos al lector determinar quiénes son las matrices **B** y **N** en este caso y verificar la veracidad de la última igualdad.

La solución básica de (4)[1], x_B, se obtiene fijando $x'' = 0$ en (5), es decir,

$$x_B = \begin{pmatrix} \mathbf{B^{-1}}b \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Calcule x_B explícitamente.

p.75, ej.27, Considere el sistema $\mathbf{A}x = b$ en donde $\mathbf{A} = [A_1, \ldots, A_n] \in \mathbb{R}^{m\times n}$ es tal que $A_j \in \mathbb{R}^m$ representa la j-ésima columna de **A** y rango$(\mathbf{A}) = m$. Sea x_p una solución particular cualquiera del sistema, construya una solución básica a partir de x_p.

Sol.: sin que esto represente una pérdida de generalidad severa, vamos a suponer que las primeras m columnas de **A** son pivotales (de otra forma haríamos un reordenamiento de las componentes de x y todo lo que se discute a continuación se sigue verbatim).

Discusión preliminar.

Entonces, dado que rango$(\mathbf{A}) = m$, existe una matriz invertible $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times m}$, la cual está constituida por las primeras m columnas de **A**, y una matriz $\mathbf{N} \in \mathbb{R}^{m\times(n-m)}$, tales que el sistema $\mathbf{A}x = b$ puede escribirse de manera alternativa como $\mathbf{B}x' + \mathbf{N}x'' = b$, en donde $x' = (x_1, \ldots, x_m)^t$ y $x'' = (x_{m+1}, \ldots, x_n)^t$. Por consiguiente, *cualquier* solución $\mathbf{A}x = b$ puede escribirse de la siguiente forma,

$$x = \begin{pmatrix} \mathbf{B^{-1}}b \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\mathbf{B^{-1}N} \\ \mathbf{I} \end{pmatrix} x'' , =: x_B + x_h , \tag{7}$$

en donde **I** es la matriz identidad de tamaño $m - n$ y $0 \in \mathbb{R}^{m-n}$. (7) es la forma general de (3) y (5).

Evidentemente, dados **A** *y* b*, para obtener la solución básica* x_B *podemos simplemente utilizar (6), no hace falta partir de una solución particular conocida,* x_p*. Sin embargo, el punto de este ejercicio es el de diseñar un algoritmo numérico que pueda implementarse en una computadora, el cual, dada una solución cualquiera de* $\mathbf{A}x = b$ *(por ejemplo, una hallada por inspección), construya, en un número finito de pasos, la solución básica* x_B*.*

Intuitivamente, la solución básica, x_B, se distingue de aquellas no-básicas porque tiene un número máximo de entradas iguales a cero (cf. (3), (5), (6) y (7)), esta observación guiará nuestra búsqueda de x_B.

---

[1] pese a que el enunciado del problema pueda hacer parecer lo contrario, la solución básica, si la hay, es única

Fin de la discusión preliminar.

Recordemos nuestra suposición de que las primeras m columnas de $\mathbf{A}$ son pivotales. Sea

$$\mathbf{A} \;=\; [A_1\,, \ldots\,, A_m, A_{m+1}, \,\ldots\,, A_n]$$

la representación por columnas de la matriz $\mathbf{A}$ ($A_j \in \mathbb{R}^m$, $j = 1, \ldots, n$) y

$$x_p \;=\; (x_1^p, \ldots\,, x_m^p,\, x_{m+1}^p, \,\ldots\; x_n^p)$$

una solución particular, entonces

$$\mathbf{A}x_p \;=\; A_1x_1^p + \;\cdots\; + A_m x_m^p + A_{m+1}x_{m+1}^p + \;\cdots\; + A_n x_n^p\,.$$

La solución básica es aquella que satisface $x_{m+1} = \cdots = x_n = 0$. Entonces tenemos el siguiente

Algoritmo (caso $x_1, \ldots, x_m$ son las variables pivotales del sistema $\mathbf{A}x = b$):

`1.` *Sea* $x^0 := x_p$ *y supongamos que* x_j^0 *(i.e.,* x_j^p*) es la primera componente de* x^0 *distinta de cero con índice* $j \geq m+1$*; es decir, suponga que*

$$x^0 \;=\; (x_1^0, \ldots\,, x_m^0, 0, \,\ldots\,, 0, x_j^0, x_{j+1}^0, \,\ldots\,, x_n^0)^t\,,$$

(en donde entre x_m *y* x_j *hay* $j-m-1$ *ceros). Entonces escriba* A_j *como combinación lineal de* $A_1, \ldots, A_m$*, digamos,*

$$A_j \;=\; A_1c_{1,j} + \;\cdots\; + A_m c_{m,j}\,. \tag{8}$$

`2.` *Substituya (8) en la siguiente expresión,*

$$\mathbf{A}x^0 \;=\; A_1x_1^0 + \;\cdots\; + A_m x_m^0 + A_j x_j^0 + \;\ldots\; + A_n x_n^0\,, \tag{9}$$

y reordene términos,

$$\mathbf{A}x^0 \;=\; A_1(x_1^0 - c_{1,j}x_j^0) + \;\cdots\; + A_m(x_m^0 - c_{1,j}x_j^0) + A_{j+1}x_{j+1}^0 + \;\cdots\; + A_n x_n^0\,.$$

Defina el vector

$$x^1 \;:=\; (x_1^0 - c_{1,j}x_j^0, \ldots\,, x_m^0 - c_{1,j}x_j^0, 0, \,\ldots\,, 0, x_{j+1}^0, \,\ldots\,, x_n^0)^t\,;$$

(observe que x^1 *tiene una componente nula más que* x^0*: entre sus componentes* m *y* $j+1$*-ésimas hay* $j-m$ *ceros).*

`3.` *Repita los dos pasos anteriores reemplazando* x_j^0 *por la primera componente no nula de* x^1 *en la posición* $j' \geq j+1$*, y reemplazando a* x^0 *por* x^1 *y y* x^1 *por* x^2*. Continue de esta forma hasta haber eliminado las últimas* $n-m$ *componentes no nulas de la solución particular* x_p*.*

Claramente, el algoritmno termina en no más de $n-m$ *iteraciones y al término del mismo se habrá encontrado una solución de* $\mathbf{A}x = b$ *cuyas últimas* $n-m$ *componentes son cero; solamente hay una solución con esta propiedad y esta es* x_B*.*

En el caso en el que las variables básicas del sistema no sean las primeras m coordenadas $(x_1, \ldots, x_m)$ puede hacerse un renombramiento de las variables de tal forma que aquellas básicas aparezcan al principio de manera consecutiva y el algoritmo anterior se aplica sobre el nuevo sistema de la misma forma.

PREGUNTAS: JORGE VIVEROS. CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO. HGO, MÉXICO.

E-mail address: `jviveros@uaeh.edu.mx`

Nota: el ejercicio en el libro pide maximizar (estamos resolviendo un problema distinto)

$$\boxed{\min}_{x_1,x_2,x_3} \quad 2x_1 + x_2 - x_3$$

$$\text{t.q.} \quad x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 6$$

$$x_1 + 4x_2 - x_3 \leq 4$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

PROGRAMA LINEAL ORIGINAL (PL)

```
Problema 3.4, p.125. Bazaraa & Jarvis
=======================================

>> A=[1 1 2 1 0; 1 4 -1 0 1], b=[6 ; 4], c=[2 1 -1 0 0]

A =

     1     1     2     1     0
     1     4    -1     0     1


b =

     6
     4


c =

     2     1    -1     0     0
```

$$\min_{x_1,\ldots,x_5} \quad 2x_1 + x_2 - x_3 + 0\cdot x_4 + 0\cdot x_5$$

$$\text{t.q.} \quad x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 6$$

$$x_1 + 4x_2 - x_3 + x_5 = 4$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0$$

FORMA ESTÁNDAR (PLes)

```
>> J=[1 2]; K=[3 4 5];
>> B=A(:,J), N=A(:,K)
```

← Escoge un posible juego de columnas básicas y no básicas de A.

```
B =

     1     1
     1     4
```

$= [A_1 \; A_2] = B$ (matriz básica inicial)

$$J = [\underset{x_1}{\underset{\downarrow}{1}} \;\; \underset{x_2}{\underset{\downarrow}{2}}], \quad K = [\underset{x_3}{\underset{\downarrow}{3}} \;\; \underset{x_4}{\underset{\downarrow}{4}} \;\; \underset{x_5}{\underset{\downarrow}{5}}]$$

```
N =

     2     1     0
    -1     0     1
```

$= [A_3 \; A_4 \; A_5] = N$ (matriz no básica inicial)

```
>> iB=inv(B);
>> xB=iB*b

xB =

    6.6667
   -0.6667
```

$= B^{-1}b \ngeq 0$ $\quad x_1 = 6.\bar{6}$ y $x_2 = -0.\bar{6}$ no corresponde a un punto dentro de la región de factibilidad; es decir, $x = (6.\bar{6}, -0.\bar{6}, 0, 0, 0)$ no es una sol. factible

```
>> J=[1 3]; K=[2 4 5];
>> B=A(:,J), N=A(:,K)
```

← Vuelve a escoger un juego de índices,

$J = [1 \;\; 3]$ ← índices básicos

$K = [2 \;\; 4 \;\; 5]$ ← índices no básicos

```
B =

     1     2
     1    -1
```

$= [A_1 \; A_3]$

```
N =

     1     1     0
     4     0     1
```

$= [A_2 \; A_4 \; A_5]$

```
>> iB=inv(B);
>> xB=iB*b

xB =

    4.6667
```

$x_B = [\ x_1\ \ x_3\ ]$, $x_N = [\ x_2\ \ x_4\ \ x_5\ ]$.

$\downarrow$

```
   0.6667
```

$x_B = B^{-1}b \geq 0$ <u>sí</u> produce una solución factible básica, esta es nuestro <u>punto de partida</u>:

$x^0 = (4.\bar{6},\ 0,\ 0.\bar{6},\ 0,\ 0)$ es una solución factible básica y por lo tanto un vértice de la región de factibilidad del programa lineal equivalente (PLes) (polihedro en $\mathbb{R}^5$).

```
>> cB=c(J), cN=c(K)

cB =

     2    -1
```

$= [c_1\ c_3]$

```
cN =

     1     0     0
```

$= [c_2\ c_4\ c_5]$

```
>> cB*iB*N-cN
```

⊛ ← determina la variable "entrante" no básica.

```
ans =

    6.0000    0.3333    1.6667
```

componente positiva <u>más grande</u>.

(Valor de la función objetivo)

$\} \ x_N = [\ \underline{\underline{x_2}}\ \ x_4\ \ x_5\ ]^t$

↳ esta variable no básica ha sido elegida para convertirse en básica

$x_2 = x_N(r) = x_N(1)$ primera componente de x_N.

```
>> r=1;
>> chxkr=(iB*b)./(iB*N(:,r))

chxkr =

    1.5556
   -0.6667
```

← componente positiva <u>más pequeña.</u>

```
>> s=1;
>> xkr=chxkr(s)
```

$\} \Rightarrow \ x_B = [\ \underline{\underline{x_1}}\ \ x_3\ ]^t$

↳ esta es la variable "saliente"; es decir, la variable a intercambiar

saliente (Básica) $x_1 \rightleftarrows x_2$ (No básica) entrante

```
xkr =

    1.5556
```

← valor de la variable entrante (x_2)

```
>> xB=iB*(b-N(:,r)*xkr)

xB =

    0.0000
    2.2222
```

$= [x_1\ x_3]^t$

```
>> xN=[xkr 0 0]'

xN =

    1.5556
         0
         0
```

$= [x_2\ x_4\ x_5]^t$

```
>> xB=[xN(1) xB(2)]'; xN=zeros(3,1)
```

← Actualiza vectores de variables básicas (x_B) y no básicas (x_N).

```
xN =

     0
     0
     0
```

$= [x_1\ x_4\ x_5]^t$ ← Nuevo vector de variables no básicas.

```
>> xB

xB =

    1.5556
    2.2222
```

$= [x_2\ x_3]^t$ ← Nuevo vector de variables básicas y sus valores.

⊛ <u>OJO</u>: aquí falta la siguiente línea:
>> cB * xB
ans = 8.6667

```
>> Jn=K(r); Kn=J(s); J(s)=Jn; K(r)=Kn;
>> J, K
```

} Actualize vector de índices básicos y no básicos.

```
J =

     2     3
```

← Nuevo vector de índices básicos.

```
K =

     1     4     5
```

← Nuevo vector de índicos no básicos.

```
>> B=A(:,J), N=A(:,K)
```

} Actualize matrices de columnas básicas y no básicas de A.

```
B =

     1     2
     4    -1
```

$= [A_2 \; A_3]$ ← Nueva matriz básica (B^1)

```
N =

     1     1     0
     1     0     1
```

$= [A_1 \; A_4 \; A_5]$ ← Nueva matriz no básica (N^1).

```
>> iB=inv(B);
>> iB*b

ans =

    1.5556
    2.2222
```

} En este paso solamente estamos verificando que el nuevo vector de variables básicas corresponde efectivamente a una solución del sistema $Ax=b$.

```
>> cB=c(J), cN=c(K)

cB =

     1    -1


cN =

     2     0     0
```

→ ojo: en este punto faltó la siguiente línea:

```
>> cB*xB
ans = -0.6667
```

} Este es el valor de la función objetivo en el actual punto solución.

Note que efectivamente hemos disminuido el valor de esta función $(-0.6667 < 8.6667)$.

```
>> cB*iB*N-cN
```

← Determine nueva variable entrante no básica.

```
ans =

   -2.0000   -0.3333    0.3333
```

← componente positiva más grande (tercera componente)

$x_N = [x_1 \; x_4 \; \underline{x_5}]^t$

↳ variable no básica elegida para convertirse en básica.

```
>> r=3;
>> chxkr=(iB*b)./(iB*N(:,r))

chxkr =

    7.0000
  -20.0000
```

← componente positiva más pequeña (primera componente)

$x_B = [\underline{x_2} \; x_3]$

↳ variable saliente:

$$(\text{Básica})\; x_2 \overset{\text{saliente}}{\underset{\text{entrante}}{\rightleftarrows}} x_5 \;(\text{No básica})$$

```
>> s=1;
>> xkr=chxkr(s)

xkr =
```

```
   7.0000
```

← valor de la variable entrante ($x_5 = 7$)

```
>> xB=iB*(b-N(:,r)*xkr)

xB =

   0.0000
   3.0000
```

$= [x_2 \;\; x_3]^t$

```
>> xN=[0 0 xkr]'

xN =

        0
        0
   7.0000
```

$= [x_1 \;\; x_4 \;\; x_5]^t$

```
>> xB=[xN(r) xB(2)]', xN=zeros(3,1)

xB =

   7.0000
   3.0000
```

$= [x_5 \;\; x_3]^t$ ← Nuevo vector de variables básicas

```
xN =

     0
     0
     0
```

$= [x_1 \;\; x_4, x_2]^t$ ← Nuevo vector de variables no básicas.

```
>> Jn=K(r); Kn=J(s); J(s)=Jn; K(r)=Kn;
>> J, K
```

} Actualiza vectores de índices básicos y no básicos.

```
J =

     5     3
```

← Nuevo vector de índices básicos

```
K =

     1     4     2
```

← Nuevo vector de índices no básicos

```
>> B=A(:,J), N=A(:,K)

B =

     0     2
     1    -1
```

$= [A_5 \;\; A_3]$ ← Nueva matriz básica (B^2)

```
N =

     1     1     1
     1     0     4
```

$= [A_1 \;\; A_4 \;\; A_2]$ ← Nueva matriz no básica (N^2)

```
>> iB=inv(B); iB*b

ans =

     7
     3
```

} Verifica que la solución obtenida efectivamente corresponde a una solución del sistema $Ax=b$.

```
>> cB=c(J), cN=c(K)

cB =

     0    -1


cN =

     2     0     1
```

ojo: faltó la línea:

```
>> cB*xB
```

ans = $-3 < -0.6667$ (Hemos "mejorado" el valor de la función objetivo)

```
>> cB*iB*N-cN

ans =

   -2.5000   -0.5000   -1.5000
```

← No hay componentes positivas ⇒ DETENER.
(hemos alcanzado el óptimo)

Solución:

$$x_* = [\underset{x_1}{\underset{\uparrow}{0}}\ \ \underset{x_2}{\underset{\uparrow}{0}}\ \ \underset{x_3}{\underset{\uparrow}{7}}\ \ \underset{x_4}{\underset{\uparrow}{0}}\ \ \underset{x_5}{\underset{\uparrow}{3}}]^t$$ es el punto óptimo de (PLes).

$\therefore$ $$x_{min} = [\underset{x_1}{\underset{\uparrow}{0}}\ \ \underset{x_2}{\underset{\uparrow}{0}}\ \ \underset{x_3}{\underset{\uparrow}{7}}]^t$$ es el punto óptimo de (PL) y el valor óptimo es

$$\phi_{min} = -3$$

Resumiendo:

	Punto de partida	Iteración 1	Iteración 2	
$x =$	$[4.6667\ 0\ 0.6667\ 0\ 0]^t$	$[0\ 1.5556\ 2.2222\ 0\ 0]^t$	$[0\ 0\ 7\ 0\ 3]^t$	← Punto óptimo
$(x) =$	8.6667	-0.6667	-3	← Valor óptimo

PROG. LINEAL ORIGINAL

$$\boxed{\begin{array}{ll} \underset{x_1,x_2,x_3}{\text{máx}} & 2x_1 + x_2 - x_3 \\ \text{t.q.} & x_1 + x_2 + 2x_3 \le 6 \\ & x_1 + 4x_2 - x_3 \le 4 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{array}} \rightarrow \begin{array}{ll} \underset{x_1,x_2,x_3}{\text{mín}} & -2x_1 - x_2 + x_3 \\ \text{t.q.} & x_1 + x_2 + 2x_3 \le 6 \\ & x_1 + 4x_2 - x_3 \le 4 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{array}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \underset{x_1,\dots,x_5}{\text{mín}} & -2x_1 - x_2 + x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 \\ \text{t.q.} & x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 6 \\ & x_1 + 4x_2 - x_3 + x_5 = 4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{array}}$$

(PLes)

3.4p125-part2

```
Problema 3.4, p.125. Bazaraa & Jarvis
=====================================

>> A=[1 1 2 1 0 ; 1 4 -1 0 1], b=[6 ; 4], c=[-2 -1 1 0 0]

A =

     1     1     2     1     0
     1     4    -1     0     1


b =

     6
     4


c =

    -2    -1     1     0     0

>> J=[1 4]; K=[2 3 5];
>> B=A(:,J), N=A(:,K)
```

← Escoge un posible juego de columnas básicas y no básicas de A.

```
B =

     1     1
     1     0
```

$= [A_1 \; A_4]$

```
N =

     1     2     0
     4    -1     1
```

$= [A_2 \; A_3 \; A_5]$

```
>> iB=inv(B);
>> xB=iB*b

xB =

     4
     2
```

≥ 0

← $x^0 = [4 \; 0 \; 0 \; 2 \; 0]^t$ es una solución factible básica para (PLes), este es nuestro punto de partida. $x_B^0 = [x_1 \; x_4]^t = [4 \; 2]^t$, $x_N^0 = [x_2 \; x_3 \; x_5]^t = [0 \; 0 \; 0]^t$

```
>> cB=c(J), cN=c(K)

cB =

    -2     0
```

$= [c_1 \; c_4]$

```
cN =

    -1     1     0
```

$= [c_2 \; c_3 \; c_5]$

```
>> cB*iB*N-cN
```

← Determina la variable «entrante» no básica.

```
ans =

    -7     1    -2
```

← componente positiva más grande en la posición 2, entonces $x_N(2) = x_3$ es la variable entrante.

```
>> r=2;
>> chxkr=(iB*b)./(iB*N(:,r))
```

← Determina la variable «saliente» básica.

Faltó la línea:

```
>> phival = cB * xB
ans = -8
```

← Valor de la función objetivo en el punto de partida.

```
chxkr =

   -4.0000
    0.6667
```

componente positiva más pequeña en la posición 2, entonces $x_B(2) = x_4$ es la variable básica saliente.

```
>> s=2;
>> xkr=chxkr(s)

xkr =

    0.6667
```

← valor de la variable entrante.

```
>> xB=iB*(b-N(:,r)*xkr)

xB =

    4.6667
         0

>> xB(s)=xkr; xB

xB =

    4.6667
    0.6667
```

$= [x_1 \; x_3]^t = x_B^1$ ← Actualiza el vector de variables básicas.

```
>> xN=zeros(3,1)

xN =

     0
     0
     0
```

$= [x_2 \; x_4 \; x_5]^t = x_N^1$ ← Actualiza el vector de variables no básicas.

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{matrix}$$

Punto actual: $x^1 = [4.6667 \; 0 \; 0.6667 \; 0 \; 0]^t$

```
>> Jn=K(r); Kn=J(s); J(s)=Jn; K(r)=Kn;
```

← Actualiza índices básicos y no básicos.

```
>> J, K

J =

     1     3
```

← Nuevo vector de índices básicos

```
K =

     2     4     5
```

← Nuevo vector de índices no básicos

```
>> B=A(:,J), N=A(:,K)

B =

     1     2
     1    -1
```

$= [A_1 \; A_3] = B^1$

```
N =

     1     1     0
     4     0     1
```

$= [A_2 \; A_4 \; A_5] = N^1$

```
>> iB=inv(B);
>> iB*b
```

} Verifica que la solución obtenida efectivamente satisface $Ax=b$.

```
ans =
```

```
    4.6667
    0.6667

>> cB=c(J), cN=c(K)

cB =

    -2     1


cN =

    -1     0     0

>> phival=cB*xB

phival =

   -8.6667
```

Calcula el valor de la función objetivo en el punto obtenido, Note que $\phi(x^1) = -8.6667 < -8 = \phi(x^0)$.

```
>> cB*iB*N-cN

ans =

   -6.0000   -0.3333   -1.6667
```

← No hay componentes positivas ⇒ DETENER. (Hemos alcanzado el óptimo).

Solución de (PLes):

$$x_{mín} = [\overset{\overset{x_1}{\downarrow}}{4.6667}\ \ \overset{\overset{x_2}{\downarrow}}{0}\ \ \overset{\overset{x_3}{\downarrow}}{0.6667}\ \ \overset{\overset{x_4}{\downarrow}}{0}\ \ \overset{\overset{x_5}{\downarrow}}{0}]^t$$

$$\phi_{mín} = -8.6667$$

Solución del prog. lineal original:

$$x_{máx} = [\overset{\overset{\frac{14}{3}}{\shortparallel}}{4.6667}\ \ 0\ \ \overset{\overset{\frac{2}{3}}{\shortparallel}}{0.6667}]^t$$

$$\text{valor óptimo} = 8.6667 = \frac{26}{3}$$

Ejercicio 3.3, p.136 (Bazaraa, Jarvis & Sherali)

Programa original:

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & x_1 + 3x_2 \\ \text{tal que} & x_1 - 2x_2 \leq 0 \\ & -2x_1 + x_2 \leq 4 \\ & 5x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ & x_1 , x_2 \geq 0 \end{array}$$

Programa estándar equivalente:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & -x_1 -3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \\ \text{tal que} & x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ & -2x_1 + x_2 + x_4 = 4 \\ & 5x_1 + 3x_2 + x_5 = 15 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

```
>> A=[1 -2 1 0 0 ; -2 1 0 1 0 ; 5 3 0 0 1], b=[0 4 15]', c=[-1 -3 0 0 0]

A =

     1    -2     1     0     0
    -2     1     0     1     0
     5     3     0     0     1


b =

     0
     4
    15


c =

    -1    -3     0     0     0

>> J=[1 2 3]; K=[4 5]; B=A(:,J); iB=inv(B); y=iB*b ← selecciona índices
                                                       básicos y no básicos

y =

    0.2727
    4.5455          (solución es factible)
    8.8182

>> xB=y;    ← define vector de variables básicas y sus valores
>> N=A(:,K); cB=c(J), cN=c(K)

cB =

    -1    -3     0
```

```
cN =

     0     0

>> cB*iB*N-cN

ans =

   -1.0909   -0.6364
```

← cualquier incremento en las variables no básicas incrementará el valor de la función objetivo; por lo tanto el punto es óptimo.

```
>> min=cB*xB

min =

  -13.9091
```

← valor óptimo.

Solución del programa lineal original: (x_1,x_2) = (0.2727,4.5455)   Punto óptimo
13.9091   valor óptimo

A continuación vamos a verificar el resultado anterior eligiendo otro punto extremo.

```
>> J=[2 3 4]; K=[1 5]; B=A(:,J); iB=inv(B); iB*b

ans =

     5
    10
    -1
```

← eligiendo x_4 y x_5 como variables no básicas no produce un punto factible (y por lo tanto tampoco extremo), entonces buscar otras variables no básicas.

```
>> J=[1 3 5]; K=[2 4]; B=A(:,J); iB=inv(B); iB*b

ans =

    -2
     2
    25
```

← eligiendo x_2 y x_4 como variables no básicas no produce un punto factible, entonces buscar otras variables no básicas.

```
>> J=[1 2 4]; K=[3 5]; B=A(:,J); iB=inv(B); y=iB*b

y =

    2.3077
    1.1538
    7.4615
```

Eligiendo x_3 y x_5 como variables no básicas **si** produce una solución factible (básica!) por lo tanto nuestro punto de partida es

(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = (2.3077 , 1.1538 , 0 , 7.4615 , 0)

```
>> xB=y; N=A(:,K); cB=c(J); cN=c(K);
>> phival=c(B)*xB

phival =

   -5.7692

>> cB*iB*N-cN

ans =

         0.9231    -0.3846    ← no podemos incrementar el valor de x5, pero sí el valor de x3

>> r=1;        ← la primera componente de xN (x3) ha sido elegida para convertirse en variable básica.
>> chxkr=(iB*b)./(iB*N(:,r))

chxkr =

   10.0000
   -3.0000
    8.8182

>> s=3;     ← la tercera componente de xB (x4) es la variable "saliente" (se convertirá en no básica)
>> xkr=chxkr(s)

xkr =

    8.8182 ← valor de la variable entrante (x3)

>> xB=iB*(b-N(:,r)*xkr)

xB =

    0.2727
    4.5455
         0

>> xB(s)=xkr; xB ← actualiza y despliega el nuevo vector de variables básicas

xB =

    0.2727      Obtenemos el mismo resultado que al inicio.
    4.5455
    8.8182
```

Ejercicio para el lector: resuelva este programa por el método gráfico. Corrobore que tiene la misma solución y que esta es única.

Preguntas: `jviveros@uaeh.edu.mx`