

# *Modelo de programación estocástica multi-estados para un plan agregado de producción sujeto a demandas y rendimientos aleatorios*

Dr. Héctor Rivera-Gómez, Ing. José Emmanuel Gómez Rocha

Área Académica de Ingeniería (AAI), Universidad Autónoma del  
Estado de Hidalgo (UAEH), ICBI.

*Desarrollo de la ingeniería y arquitectura para  
el diseño y construcción de un futuro  
sostenible*



## Contenido

- I. Introducción
- II. Metodología
- III. Formulación del modelo
- IV. Resultados
- V. Sensibilidad
- VI. Conclusión
- VII. Referencias

*Desarrollo de la ingeniería y arquitectura para  
el diseño y construcción de un futuro  
sostenible*



## I. Introducción



Figura 1: Contexto de la planeación agregado dentro de la planeación global.  
Elaboración propia con base en Jamalnia et al. (2017).

*Desarrollo de  
el diseño y construcción de un futuro  
sostenible*



## I. Introducción

Los planes de producción buscan siempre determinar los niveles óptimos de producción, niveles de contratación, despido, inventarios, retrasos, subcontrataciones. Con el fin de minimizar los costos de producción o maximizar las utilidades. No existe un plan de producción único.

- Estrategias de un PAP: Apegarse a la demanda (estrategia de caza), horas extras, nivelación, subcontratación y mixtos.
- Costos asociados a un PAP: Costos de producción, cambio de índice, mantener inventario y costos por faltantes.
- Variables más comunes en un PAP: demanda, número de trabajadores, capacidad de producción, cantidad a producir e inventariar.

*Desarrollo de la ingeniería y arquitectura para  
el diseño y construcción de un futuro  
sostenible*



## I. Introducción

Algunas contribuciones relevantes en el área en diferentes clases de problemas de optimización son los siguientes:

- Optimización estocástica multi objetivos: Nowak (2013) y Jamalnia et al. (2017) desarrollaron planes de producción que pretenden minimizar diversos objetivos.
- Optimización estocástica lineal y lineal entera mixta: Kazemi et al. (2013) aproximaron la solución mediante descomposición de escenarios empleando CPLEX.
- Optimización estocástica no lineal: Nasiri et al. (2014) presentó un modelo no lineal para un plan de producción y distribución en una cadena de suministro de tres niveles.

*Desarrollo de la ingeniería y arquitectura para  
el diseño y construcción de un futuro  
sostenible*



## I. Introducción

- Optimización estocástica no lineal: Se han propuesto metodologías para esta clase de problemas (Ning et al., 2013; Mirzapour Al-e-hashem et al., 2013; Lieckens y Vandaele, 2014).
- Optimización robusta: Se ha utilizado como estrategia para resolver planes de producción (Leung y Wu, 2004; Kanyalkar y Adil, 2010; Mirzapour Al-e-hashem, Malekly and Aryanezhad, 2011; Mirzapour Al-e-hashem, Aryanezhad y Sadjadi, 2012; Makui, Heydari, Aazami y Dehghani, 2016).
- Árbol de escenarios: Kazemi et al. (2013) menciona sus ventajas, Hu y Hu (2018) y Körpeoglu, et al. (2011) los aplicaron para MPS y tamaño de lote.

*Desarrollo de la ingeniería y arquitectura para  
el diseño y construcción de un futuro  
sostenible*



## I. Introducción

- Birge y Louveaux (1997) mencionaron que los problemas de optimización estocástica son complejos en solución, más cuando el número de estados se incrementa.
- Algunos algoritmos de corte ofrecen límites y acota el problema de manera que cada vez converge más al óptimo del problema real (Laporte y Louveaux, 1993),

La aportación de estos modelos es la incorporación de la restricción de nivel de servicio tipo I (explicada en la justificación), así como considerar la capacidad de producción como una variable aleatoria. En la literatura pocos artículos consideran esta variable como aleatoria y suelen usarse otro tipo de restricciones sobre el nivel de servicio.

*Desarrollo de la ingeniería y arquitectura para  
el diseño y construcción de un futuro  
sostenible*



## II. Metodología

La metodología empleada para la solución a la problemática de la empresa se dividió en seis etapas, para el Modelo-I y Modelo-II:

- 1 Obtención y análisis de datos: Se recurrió a datos históricos de la empresa para poder obtener parámetros de producción y costos asociados. Se realizó una clasificación ABC de productos.
- 2 Determinación de la demanda y capacidad de producción: Proyección de la demanda del producto. Posteriormente con los datos históricos de producción se determinó la capacidad de producción promedio por trabajador.
- 3 Modelación matemática determinística: Se desarrolló un modelo determinístico de base. Se tomó en cuenta en el modelo las políticas de la empresa.

*Desarrollo de la ingeniería y arquitectura para  
el diseño y construcción de un futuro  
sostenible*



## II. Metodología

- 4 Generación Modelo-I estocástico: Se utilizo el muestreo condicional idéntico como se observa en el siguiente pseudocódigo.

**Iniciar con:** tomar  $j_N$  muestras de  $\xi(\omega)$  para cada estado  $h \in H$  empleando técnicas de reducción de varianza (internamente Lingo lo realiza)

**Paso 1:** para cada muestra  $j_N$  resolver el siguiente problema relajándolo en uno de LP

$$\bar{\theta}_{j_N} = \min c_0 x_0 + \frac{1}{N_1} \sum_{j=1}^{N_1} \left\{ Q_1(x_0, \xi_1^{j_N}(\omega)_1) + \dots + \left[ \frac{1}{N_N} \sum_{j=1}^{N_N} Q_N(x_{N-1}, \xi_N^{j_N}(\omega)_N) \right] \dots \right\}$$

Si las soluciones  $x_h^{j_N} \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{Z}_+$

entonces: guardar el valor de la función objetivo optima de cada muestra  $\bar{\theta}_{j_N}$ ,

así como sus correspondientes soluciones  $x_h^{j_N}$  e ir a paso 4.

Si no entonces: ir paso 2.

**Paso 2:**

Mientras: las soluciones  $x_h^{j_N} \notin \mathbb{R}_+ \times \mathbb{Z}_+$  hacer: relajar el problema quitando la imposición de que algunas variables sean enteras e ir a paso 3.

Terminar mientras

**Paso 3:** resolver problema original para cada muestra  $j_N$  empleando algoritmo B-and-B

Si las soluciones  $x_h^{j_N} \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{Z}_+$

entonces: guardar el valor de la función objetivo optima de cada muestra  $\bar{\theta}_{j_N}$ , así como sus correspondientes soluciones  $x_h^{j_N}$  e ir a paso 4.

Otro caso: cambiar las variables que fueron relajadas inicialmente y repetir paso 3.

Si no se encuentra una solución con  $x_h^{j_N} \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{Z}_+$  para todos los intentos posibles terminar, el problema no tiene solución.

Fin si

Fin si

Fin si

**Paso 4:** calcular el promedio (WS) de  $\bar{\theta}_{j_N}$  como:

$$\bar{\theta}_{j_N} = \frac{1}{|j_N|} \sum_{j=1}^{|j_N|} \bar{\theta}_{j_N}$$

**Paso 5:** estimar el verdadero valor de la función objetivo (EV)  $\theta_{j_N}$  como:

$$\theta_{j_N} = \min c_0 x_0^{j_N} + \frac{1}{N_1} \sum_{j=1}^{N_1} \left\{ Q_1(x_0^{j_N}, \xi_1^{j_N}(\omega)_1) + \dots + \left[ \frac{1}{N_N} \sum_{j=1}^{N_N} Q_N(x_{N-1}^{j_N}, \xi_N^{j_N}(\omega)_N) \right] \dots \right\}$$

**Paso 6:** seleccionar como mejor solución  $x^{s44} = \text{argmin } x_h^{j_N}$  y como resultado de la función objetivo  $\theta = \min \theta_{j_N}$

Desarrollo de el diseño



## II. Metodología

- 5 Generación Modelo-II estocástico: Se utilizó los valores de máxima verosimilitud de la distribución para aproximarla a una distribución discreta, sus probabilidades son obtenidas mediante la técnica de cuadratura Gaussiana.

---

### Pseudocódigo para árbol de escenarios para MSP-MIL

---

**Iniciar con:** determinar el número de estados  $H$ , número de escenarios  $K$  y las probabilidades de cada escenario como  $p^k$ .

**Paso 1:** descomponer el siguiente problema en subproblemas, uno por cada realización posible (el número de subproblemas será  $K^H$ )

$$\min \sum_{k=1}^K p^k [c_0^k x_0^k + \dots + c_H^k x_H^k]$$

**Paso 2:** resolver cada subproblema relajándolos, haciendo cada subproblema en uno LP

Si: las soluciones  $x_h^k \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{Z}_+, \forall k = 1, \dots, K, h = 0, \dots, H$

entonces: guardar el valor de la función objetivo óptima de cada subproblema  $\bar{g}^k$ , así como sus correspondientes soluciones  $x_h^k$  e ir a paso 4.

Si no entonces: ir paso 3.

**Paso 3:** resolver cada subproblema empleando algoritmo B-and-B

Si: las soluciones  $x_h^k \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{Z}_+, \forall k = 1, \dots, K, h = 0, \dots, H$

entonces: guardar el valor de la función objetivo óptima de cada subproblema  $\bar{g}^k$ , así como sus correspondientes soluciones  $x_h^k$  e ir a paso 4.

Otro caso: cambiar las variables que fueron relajadas inicialmente y repetir paso 3.

Si: no se encuentra una solución con  $x_h^k \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{Z}_+, \forall k = 1, \dots, K, h = 0, \dots, H$  para todos los intentos posibles terminar, el problema no tiene solución.

Fin si

Fin si

**Paso 4:** calcular el valor verdadero de la función objetivo como:

$$g = \sum p^k \bar{g}^k$$

**Paso 5:** seleccionar como mejor solución:

$$x^* = \operatorname{argmin} x_h^k$$


---

Desarrollo de  
el diseño



## II. Metodología: Método de cuadratura de Gauss

La cuadratura de Gauss (McCracken y Dorn, 1966) para dos puntos aproxima el valor de una integral que puede ser difícil de resolver mediante la ecuación:

$$I_G = A_0\phi(\psi_0) + A_1\phi(\psi_1)$$

Que es una aproximación a la integral:

$$I = \int_{-1}^1 \phi(\psi) d\psi$$

Considerando además las siguientes expresiones:

$$\phi(\psi) = \frac{b-a}{2} f\left(\frac{b-a}{2}\psi + \frac{b+a}{2}\right)$$

$$A_0 = 1, A_1 = 1, \psi_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \psi_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Los intervalos utilizados en este método se proponen como una aproximación eficiente a la distribución original, de esta forma se minimiza la distancia entre ambas distribuciones de probabilidad considerando la cercanía a los momentos de la distribución original.



## II. Metodología: Método de cuadratura de Gauss

Considerando que la función  $f(x)$  a integrar en el intervalo  $(a,b)$ , es la distribución normal que tiene la siguiente forma:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Se puede aproximar los valores de dicha función considerando  $a = 8$  y  $b = 10.8$  como:

$$I_G = 0.9 \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{0.9\psi_0+9.9-\mu}{\sigma}\right)^2} + e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{0.9\psi_1+9.9-\mu}{\sigma}\right)^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

$$I_G = 0.9 \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{-0.9}{\sqrt{3}}+9.9-12\right)^2} + e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{0.9}{\sqrt{3}}+9.9-12\right)^2}}{2\sqrt{2\pi}} = 0.2$$

Considerando que:

$$\phi(\psi) = 0.9f(0.9\psi + 9.9)$$

$$I_G = 0.9f(0.9\psi_0 + 9.9) + 0.9f(0.9\psi_1 + 9.9)$$



## II. Metodología

- 6 Resolución y comparación de los modelos: Se procedió a resolver ambos modelos estocásticos desde dos periodos hasta el número máximo de periodos que la computadora fue capaz de resolver. Se registraron los resultados para poder realizar las posteriores comparativas, se calcula la diferencia o GAP de optimalidad, se realizó un extenso análisis de sensibilidad y se analizó el impacto de la restricción del nivel de servicio en las variables de decisión.

*Desarrollo de la ingeniería y arquitectura para  
el diseño y construcción de un futuro  
sostenible*



### III. Formulación del modelo

- En el presente artículo se desarrollaron dos modelos de programación estocástica multi-etapas:
  - a) Modelo-I: En este modelo se utiliza una distribución normal para modelar la incertidumbre de la capacidad de producción y la demanda, las cuales son consideradas variables aleatorias.
  - b) Modelo-II: A fin de reducir el tiempo de resolución del modelo, se discretizan las dos distribuciones continuas utilizadas en el modelo anterior, aplicando el método de cuadratura Gaussiana.

*Desarrollo de la ingeniería y arquitectura para  
el diseño y construcción de un futuro  
sostenible*



### III. Formulación del modelo: Modelo-I

La función objetivo del modelo, minimiza el costo total, considerando los costos asociados a los trabajadores asignados a producción, los despidos, contrataciones, además de los costos de inventario, retrasos y producción. Como se observa en la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}
 & \min z \\
 & = \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N P^{ijt} \sum_{t=1}^T P_{t(h-1)}^{ij}(\Omega) C_P + \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N P^{ijt} \sum_{t=1}^T F_{t(h-1)}^{ij}(\Omega) C_F + \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N P^{ijt} \sum_{t=1}^T R_{t(h-1)}^{ij}(\Omega) C_R \\
 & + \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N P^{ijt} \sum_{t=1}^T I_{t(h)}^{ij}(\Omega) C_I + \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N P^{ijt} \sum_{t=1}^T X_{t(h)}^{ij}(\Omega) C_X \\
 & + \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N P^{ijt} \sum_{t=1}^T S_{t(h)}^{ij}(\Omega) C_S
 \end{aligned} \tag{1}$$



### III. Formulación del modelo: Modelo-I

Balance de la fuerza de trabajo:

$$W_{t(h)}^{ij}(\Omega) = W_{t-1(h-1)}^{ij}(\Omega) + R_{t-1(h-1)}^{ij}(\Omega) - F_{t-1(h-1)}^{ij}(\Omega) \quad \forall t, h, \omega, \delta \quad (2)$$

Asignación laboral:

$$W_{t(h)}^{ij}(\Omega) = P_{t(h)}^{ij}(\Omega) + F_{t(h)}^{ij}(\Omega) \quad \forall t, h, \omega, \delta \quad (3)$$

Balance demanda-inventario:

$$X_{t(h)}^{ij}(\Omega) + I_{t-1(h-1)}^{ij}(\Omega) = D_t^j + S_{t-1(h-1)}^{ij}(\Omega) + I_{t(h)}^{ij}(\Omega) - S_{t(h)}^{ij}(\Omega) \quad \forall t, h, \omega, \delta \quad (4)$$

Capacidad de producción:

$$X_{t(h)}^{ij}(\Omega) \leq k_t^{ij} P_{t(h)}^i(\Omega) \quad \forall t, h, \omega, \delta \quad (5)$$



### III. Formulación del modelo: Modelo-I

Inventario de seguridad mínimo requerido por periodo:

$$I_{t(h)}^{ij}(\omega) \geq I_{\alpha} \quad \forall t, h, \omega, \delta \quad (6)$$

Nivel de servicio por periodo:

$$D_t^j - S_{t(h)}^{ij}(\Omega) \geq .90D_t^j \quad \forall t, h, \omega, \delta \quad (7)$$

Restricciones de no-negatividad:

$$W_{t(h)}^{ij}(\Omega), P_{t(h)}^{ij}(\Omega), R_{t(h)}^{ij}(\Omega), F_{t(h)}^{ij}(\Omega), X_{t(h)}^{ij}(\Omega), I_{t(h)}^{ij}(\Omega), S_{t(h)}^{ij}(\Omega) \geq 0 \quad \forall t, h, \omega, \delta \quad (8)$$

Definición de variables enteras:

$$P_{t(h)}^{ij}(\Omega), R_{t(h)}^{ij}(\Omega), F_{t(h)}^{ij}(\Omega), S_{t(h)}^{ij}(\Omega), I_{t(h)}^{ij}(\Omega) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{Z}_+ \quad \forall t, h, \omega, \delta \quad (9)$$

Restricciones de no-anticipación:

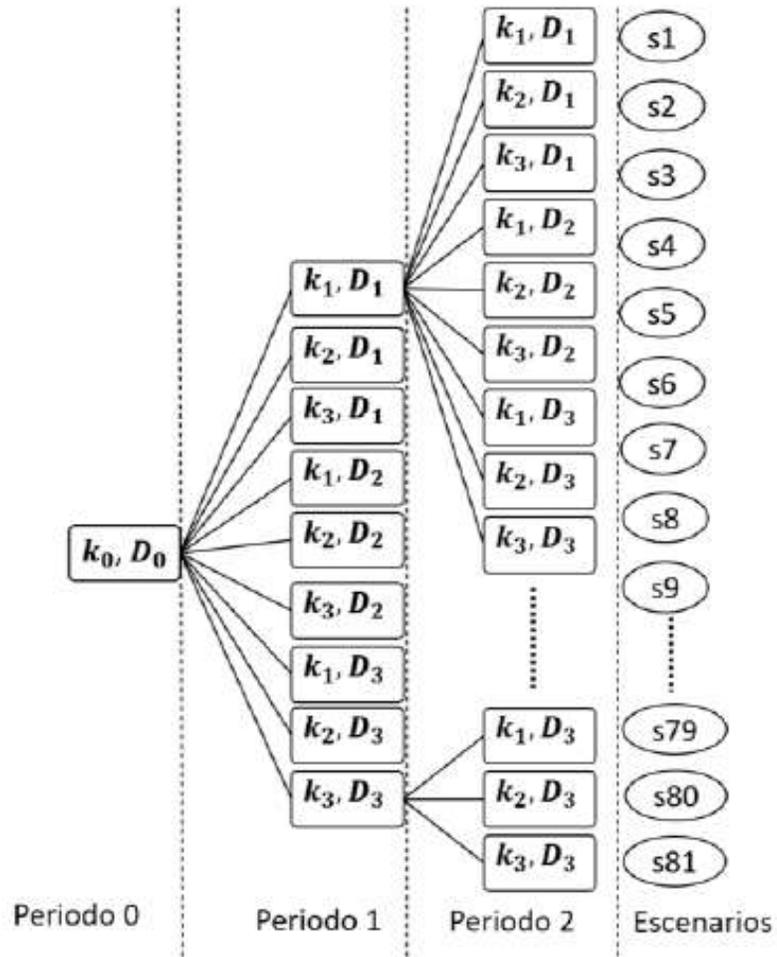
$$\sigma_h = p_h = q_h = \sigma'_h = p'_h = q'_h = \sigma''_h = p''_h = q''_h \quad \forall [h] = [0], \dots, [H] \quad (10)$$



### III. Formulación del modelo: Modelo-I

I  
C  
B  
I

Figura 1. Árbol de decisiones con dos variables aleatorias. Elaboración propia.



*Desarrollo de la ingeniería y el diseño y construcción sostenible*



## IV. Resultados

Parámetros Modelo-I:	
$D_t$	350, 370, 330, 335, 381, 337 (Unidades por periodo).
$C_p$	\$7000
$C_F$	10000
$C_R$	5000
$C_I$	7
$C_S$	65
$C_X$	200
$I_n$	100 (Unidades)
$k_t^w$	$k_t^w \sim N(12, 2)$

Tabla 1: Parámetros usados en el Modelo-I. Elaboración propia.

Parámetros Modelo-II:	
$D_t$	350, 370, 330, 335, 381, 337 (Unidades por periodo).
$C_p$	\$7000
$C_F$	\$10000
$C_R$	\$5000
$C_I$	\$7
$C_S$	\$65
$C_X$	\$200
$I_n$	100 (Unidades)
$k_t^i$	$i = \{10, 12, 14\}$ con probabilidades $P^i = \{0.267, 0.466, 0.267\}$

Tabla 2: Parámetros usados en el Modelo-II. Elaboración propia.

*Desarrollo de la ingeniería y arquitectura para el diseño y construcción de un futuro sostenible*



## IV. Resultados

Per.	Esc.	v.a.	Tiempo CPU (seg.)		Iteraciones		Tipo de solución encontrada	
			Modelo-I	Modelo-II	Modelo-I	Modelo-II	Modelo-I	Modelo-II
2	81	2	1.53	0.47	6958	9877	Óptimo global	Óptimo global
3	729	4	10.08	4.37	133406	96704	Óptimo global	Óptimo global
4	6561	8	7200*	654.3	4736377	1406895	Solución factible	Óptimo global

Tabla 1. Comparación del tiempo de resolución y el número de iteraciones.  
 "\*" denota que el problema fue detenido ya que no encontró mejor solución.

*Desarrollo de la ingeniería y arquitectura para el diseño y construcción de un futuro sostenible*



## IV. Resultados

Periodos	EV		WS		EVPI		GAP del EV (%)
	Modelo-I	Modelo-II	Modelo-I	Modelo-II	Modelo-I	Modelo-II	
2	594499.9	564043	464917.6	458062.7	129582.3	105980.3	5.1231
3	910984.7	860939.2	747126.9	739893.8	163857.8	121045.4	5.4936
4	1218200	1155964	1028128	1021254	190071.4	134709.7	5.1088

Tabla 2. Indicadores de importancia de la optimización estocástica.

*Desarrollo de la ingeniería y arquitectura para el diseño y construcción de un futuro sostenible*



## V. Análisis de sensibilidad

Número caso	Parámetro	Variación	variables de decisión						$\Delta$ -Costo (%)
			$P_1$	$R_2$	$F_2$	$X_1$	$I_1$	$S_3$	
Caso de base	-	-	34	3	0	346	199	38	-
1	$C_P$	50%	34	3	0	349	202	38	78.0267
2		-50%	34	3	0	346	199	38	-38.618
3	$C_F$	100%	34	3	0	346	199	38	1.126
4		-100%	50	0	23	515	368	38	-16.950
5	$C_R$	100%	34	3	0	346	199	38	0.7928
6		-100%	34	5	0	346	199	38	-0.7928
7	$C_I$	200%	34	3	0	346	199	38	0.7694
8		-100%	34	3	0	350	203	38	-0.3849
9	$C_S$	100%	34	3	0	346	199	37	0.2488
10		-100%	34	3	0	346	199	38	-0.2489
11	$C_X$	100%	34	3	0	346	199	38	20.2578
12		-100%	34	3	0	346	199	38	-20.482

Tabla 3. Análisis de sensibilidad

I  
C  
B  
I

Desarrollo de la  
el diseño y



## V. Análisis de sensibilidad

Nivel de servicio (%)	Variables de decisión					
	$P_1$	$R_1$	$F_2$	$X_1$	$I_1$	$S_3$
86	31	0	1	364	211	49
90	32	0	2	381	228	35
94	33	0	3	395	242	21
98	34	0	2	390	237	7

Tabla 4. Impacto del nivel de servicio en las variables de decisión

*Desarrollo de la ingeniería y arquitectura para el diseño y construcción de un futuro sostenible*



## V. Análisis de sensibilidad

Núm. de caso	Parámetros		Variables de decisión							$\Delta$ -EV (%)	$\Delta$ -WS (%)	$\Delta$ -EVPI (%)
	Variable aleatoria	$\mu$	$\sigma$	$P_1$	$R_1$	$F_2$	$X_1$	$I_1$	$S_3$			
<i>Variación de la desviación estándar <math>\sigma</math> de la capacidad de producción</i>												
1		12	1	28	0	0	310	163	38	-13.184	-1.168	-67.972
2*	$k_t^{\omega}$	12	2	34	0	0	346	199	38	0.000	0.000	0.000
3		12	3	46	0	2	433	286	38	23.583	2.776	118.457
<i>Variación de la media <math>\mu</math> de la capacidad de producción</i>												
4		10	2	45	0	0	369	222	38	25.065	15.731	67.621
5*		12	2	34	0	0	346	199	38	0.000	0.000	0.000
6		14	2	27	0	0	325	178	38	-15.005	-10.917	-33.643
<i>Variación de la desviación estándar <math>\sigma</math> de la demanda</i>												
7		353	15	35	0	0	357	207	37	2.821	0.189	14.819
8*	$D_t^{\delta}$	353	29	34	0	0	346	199	38	0.000	0.000	0.000
9		353	45	32	1	0	326	182	40	-2.948	-0.055	-16.138
<i>Variación de la media <math>\mu</math> de la demanda</i>												
10		300	29	28	0	0	288	194	33	-17.409	-16.589	-21.148
11*		353	29	34	0	0	346	199	38	0.000	0.000	0.000
12		400	29	40	1	0	411	217	43	15.863	14.761	20.887

Tabla 9. Análisis de sensibilidad variando los parámetros de la distribución de probabilidad.



## VI. Conclusión

De este trabajo se puede mencionar aspectos importantes tales como:

- La programación estocástica multi-estados es una excelente herramienta cuando se tiene incertidumbre en algunos parámetros de las operaciones de la empresa.
- La solución del modelo estocástico real resulto ser muy compleja, y la aleatoriedad de la variable aleatoria se aproxima de una mejor manera en el Modelo-I.
- Estos problemas son complejos debido a la naturaleza no convexa del modelo, además de ser NP-completo (Shapiro et al., 2009).

*Desarrollo de la ingeniería y arquitectura para  
el diseño y construcción de un futuro  
sostenible*



## VI. Conclusión

- La estructura del problema permite emplear una arquitectura computacional que minimiza el tiempo de solución.
- Estos resultados comprueban que es factible realizar una aproximación de la aleatoriedad con una distribución discreta como la propuesta en este trabajo.
- La programación estocástica es un campo abierto con severas aplicaciones reales (finanzas, manufactura, logística, energía, etc.), particularmente cuando el problema es del tipo entero (Birge and Louveaux, 1997).

*Desarrollo de la ingeniería y arquitectura para  
el diseño y construcción de un futuro  
sostenible*



## VII. Referencias

- Ahmed, S., Tawarmalani, M., Sahinidis, N. V. (2004). A finite branch-and-bound algorithm for two-stage stochastic integer programs. *Mathematical Programming*, 100(2), 355-377. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10107-003-0475-6>
- Aydin, N., and Murat, A. (2013). A swarm intelligence-based sample average approximation algorithm for the capacitated reliable facility location problem. *International Journal of Production Economics*, 145(1), 173-183. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2012.10.019>
- Ayvaz, B., Bolat, B., Aydin, N. (2015). Stochastic reverse logistics network design for waste of electrical and electronic equipment. *Resources, conservation and recycling*, 104, 391-404. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.resconrec.2015.07.006>



## VII. Referencias

- Birge, J.R. Louveaux, F. (1997). Introduction to Stochastic Programming. Springer, New York.
- Fliege, J., and Xu, H. (2011). Stochastic multiobjective optimization: sample average approximation and applications. Journal of Optimization Theory and Applications, 151(1), 135-162. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10957-011-9859-6>
- Han, J., Lee J., Kim Y. (2019). Production planning in a two-level supply chain for production-time-dependent products with dynamic demands. Computers Industrial Engineering, 135, 1-9. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cie.2019.05.036>
- Haneveld, W. K. K., Stougie, L., Van der Vlerk, M. H. (1995). On the convex hull of the simple integer recourse objective function. Annals of Operations Research, 56(1), 209-224. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02031708>



## VII. Referencias

- Hu, J., Homem-de-Mello, T., and Mehrotra, S. (2012). Sample average approximation of stochastic dominance constrained programs. *Mathematical programming*, 133(1-2), 171-201. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10107-010-0428-9>
- Hu, Z., Hu, G. (2018). A multi-stage stochastic programming for lot-sizing and scheduling under demand uncertainty. *Computers Industrial Engineering*, 119, 157-166. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cie.2018.03.033>
- Jamalnia, A., Yang, J.B., Xu, D.L., Feili, A. (2017). Novel decision model based on mixed chase and level strategy for aggregate production planning under uncertainty: Case study in beverage industry. *Computers Industrial Engineering*, 114, 54-68. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cie.2017.09.044>

*Desarrollo de la  
el diseño y construcción de un futuro  
sostenible*



## VII. Referencias

- Shapiro, A., and Homem-de-Mello, T. (2001). On the rate of convergence of Monte Carlo approximations of stochastic programs. *SIAM Journal on Optimization*, 11, 76-86. DOI: <https://doi.org/10.1137/S1052623498349541>
- Shapiro, A., Dentcheva, D., Ruszczyński, A. (2009). *Lectures on stochastic programming: modeling and theory*. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Tanaka, K. I., Toda, A. A. (2013). Discrete approximations of continuous distributions by maximum entropy. *Economics Letters*, 118(3), 445-450. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.econlet.2012.12.020>
- Torkaman, S., Ghomi, S. F., Karimi, B. (2017). Multi-stage multi-product multi-period production planning with sequence-dependent setups in closed-loop supply chain. *Computers Industrial Engineering*, 113, 602-613. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cie.2017.09.040>

*Desarrollo de la  
el diseño y construcción de un futuro  
sostenible*

