UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO

Examen de ingreso a la Maestría en Matemáticas Aplicadas

Mayo 2014

NOMBRE DEL ASPIRANTE:

Instrucciones: escriba sus respuestas en las hojas en blanco que se le entregaron. Justifique sus conclusiones.

1. Encuentre las dimensiones de un rectángulo de area máxima, inscrito en un semicírculo de radio a, de tal forma que la base del rectángulo se encuentre sobre el diámetro del semicírculo.

2. Considere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida de la siguiente manera,

$$f(x,y) \;=\; \begin{cases} \frac{2xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Demuestre que para cualquier dirección u la derivada direccional de f en el origen en la dirección u, $D_u f(0,0)$, está bien definida, pero que f no es continua en el origen. ¿Es f diferenciable en el origen?

3. Encuentre una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1,2,-3) = (-1,-2)$, $T(-2,-1,-4) = (3,-1)$ y $T(4,5,-2) = (5,-3)$, o bien demuestre que tal transformación no existe.

4. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida de la siguiente manera,

$$T(x,y,z) \;=\; (2x+4y+5z, -x-3y-5z, y+2z)\,.$$

Encuentre una base para el subespacio real $V \neq \mathbb{R}^3$ de dimensión máxima, tal que $T(V) = V$.

5. Si $x + 2y - z = 2$ es la ecuación de un plano en $\mathbb{R}^3$ y $P = (0,0,-1)$, encuentre las coordenadas del punto Q en el plano, más cercano a P.

6. Resuelva el siguiente problema con condiciones iniciales,

$$t\frac{dy}{dt} + 3y = 0\,, \qquad y(1) = 1\,.$$

7. Si G es un grupo finito de orden primo, demuestre que G debe ser cíclico. (Sugerencia: utilice el teorema de Lagrange.)

8. ¿Verdadero o falso? “para cualesquier $A, B \subseteq \mathbb{R}$ se tiene que $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$. ”

9. Calcule $\mathrm{Re}(z)$ y $\mathrm{Im}(z)$, en donde

$$z \;=\; \left[2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \mathtt{i}\,\frac{1}{2}\right)\right]^3\,.$$

10. Sea $\gamma = C(z_0, r)$, un círculo con centro en $z_0 = x_0 + \mathtt{i}y_0 \in \mathbb{C}$ y de radio $r < |z_0|$. Parametrice γ y plantee la integral de contorno siguiente, luego calcúlela:

$$\int_\gamma \frac{dz}{z}\,.$$