UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO

Examen de admisión a la Maestría en Matemáticas

junio 2018

NOMBRE DEL ASPIRANTE:

Instrucciones: escriba sus respuestas en las hojas que se le entregaron. Justifique su procedimiento.

1. Calcule o bien explique por qué no existe $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$.

2. Determine $\displaystyle\int 3^{\sqrt{2x+1}}$.

3. A es una matriz real de tamaño cuatro con polinomio característico $(\lambda-2)^3(\lambda+3)$. Si $\lambda_1 = 2$ tiene defecto uno, y módulo un reordenamiento de bloques diagonales, ¿cómo es la forma canónica de Jordan de A?

4. Escriba la solución general de la ecuación diferencial $y'' + y = \cot x$.

5. Si C es la curva que delimita la región entre $y = x^2$ y $x = y^2$, verifique el cumplimiento del teorema de Green para

$$\oint_C \left(2xy - x^2\right) dx + \left(x + y^2\right) dy\,.$$

6. Sea n un entero positivo cualquiera y $G_n = \left\{a + b\sqrt{n}\,\middle|\, a, b \in \mathbb{Z}\right\}$. Demuestre que G es un grupo respecto a la adición.

7. Si G es un grupo abeliano con elementos $g_1, g_2, \ldots, g_n$, y $x = g_1 g_2 \cdots g_n$, demuestre que $x^2 = e$ (identidad). ¿Qué puede decir acerca de x si el orden de G es impar? Hint: escriba x^{-1} y argumente que $x^{-1} = x$.

8. Suponga que X es un espacio métrico completo y $\left(F_j\right)$ es una sucesión de conjuntos cerrados, no vacíos y acotados tales que $F_j \supset F_{j+1}$, y $\lim_{j\to\infty} \operatorname{diám} E_j = 0$ (la sucesión de sus diámetros converge a cero). Demuestre que la intersección de los subconjuntos contiene exactamente un punto.

9. ¿Es la función $f(z) = z \operatorname{Re} z$ diferenciable en $z = 0$? ¿Es analítica en $z = 0$?

10. Determine todos los posibles valores de la integral indicada abajo, si C es una curva de Jordan, rectificable y cerrada, la cual no pasa por los puntos $z = 0, 1, -1$. Indique en cada caso la posición de C.

$$\int_C \frac{dz}{z(z^2-1)}\,.$$