# Sistemas con retardos

## Seminario de investigación

Dr. Omar Jacobo Santos Sánchez

Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo

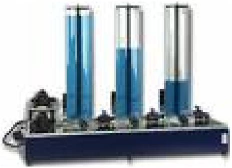
Marzo 2009

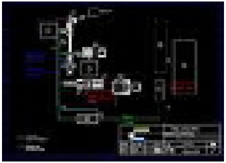
# Organización de la presentación

- Introducción
- Enfoque frecuencial
- Enfoque temporal
- Algunas propuestas de solución

# Sistemas con retardos

- Los sistemas con retardos aparecen en sistemas que tienen tiempos de procesamiento considerables (procesamiento del control o tratamiento de señales), retardos en el transporte de variables, retardos en las mediciones o intrínsecos del sistema.
- Ejemplos de ellos son: Sistemas de control en cuyos lazos hay sensores como cámaras, columnas de destilación, procesos de secado de papel, plantas de reciclado, procesos de refinación, sistemas teleoperados, etc.





# Algunos conceptos generales

- Para el caso libre de retardos se tiene el siguiente sistema general

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad x_0 = x(t_0)$$

- Para sistemas con retardos:

$$\dot{x}(t) = f(x_t, u(t)), \quad x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-h, 0]$$

- El retardo se modela como una desviación en los argumentos de las variables dependientes. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= x^2(t-h), \quad x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-h, 0] \\ &\varphi(t) - \text{ Función contínua} \end{aligned}$$

$$\dot{x}(t) = \varphi^2(t-h), \quad \text{para } t \in [0, h]$$

- ESTADO (RETARDOS):

$$x_t = x(t+\theta), \quad \theta \in [-h, 0].$$

# Enfoques para sistemas con retardos

- Análisis de Estabilidad y control: Enfoque frecuencial y Enfoque temporal.

**Enfoque frecuencial (clásico, el mas usado en la industria):**

- Estabilidad y estabilización robusta, sintonización de controladores PID, controladores de asignación de espectro finito, etc.
- Métodos Ziegler - Nichols (1942)

$$G_0(s) = \frac{Ke^{-sh}}{\tau s + 1}, \quad G_1(s) = \frac{Ke^{-sh}}{s^2 + a_0 s + a_1}$$

Es el método mas empleado por controladores industriales.


,


Algoritmo PID

$$u(t) = K_p \left( e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(t)dt + T_d \frac{de(t)}{dt} \right)$$

En el dominio de Laplace

$$u(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) e(s)$$

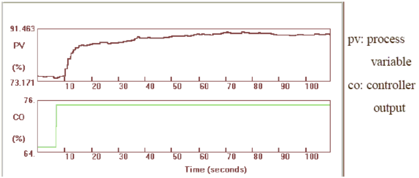
Cuando se cierra el lazo con un control con una planta primer orden con retardos

$$\frac{[PV](s)}{[SP](s)} = \frac{\left(sT_i + 1 + T_i T_d s^2\right) K K_p e^{-sh}}{T_i s (\tau s + 1) + (sT_i + 1 + T_i T_d s^2) K K_p e^{-sh}}$$

La ecuación característica es un *cuasipolinomio.*

# Un caso real

- Expert Tune (sintoniza robustamente hasta 500 controladores PID)
- Un ejemplo real (Caso de la refinería Hsiaokang, China, 2007)




Response to controller output change of loop FIC-2203

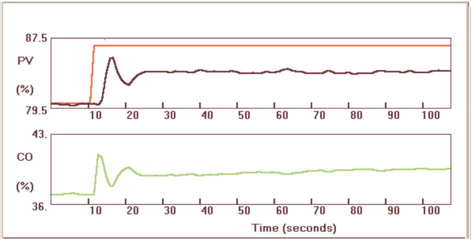
El modelo obtenido por Expert Tune fué

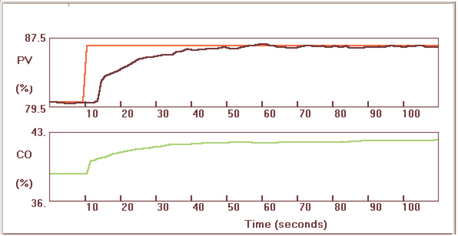
Table 1. Process model

$$\frac{e^{-2.s}}{.39 + .87s} \text{ seconds}$$

| | | |
|---|---|---|
| Gain | 2.6 | |
| Dead time | 2 | seconds |
| Time constant | 2.2 | seconds |

Resultados al sintonizar con el PID Fisher-Provox y con Expert Tune




Antes ($P = 0.6, I = 0.3$) y después de sintonizar robustamente ($P = 0.15$, $I = 19$)

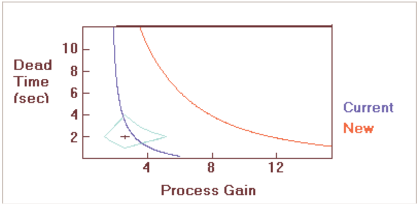



Gráfico de robustez

# Algunos resultados nuestros:

Considere el modelo acoplado

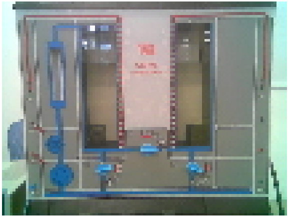
$$\begin{aligned} y_1(s) &= G_{11}(s)e^{-h_{11}s}u_1(s) + G_{12}(s)e^{-h_{12}s}u_2(s) \\ y_2(s) &= G_{21}(s)e^{-h_{21}s}u_1(s) + G_{22}(s)e^{-h_{22}s}u_2(s). \end{aligned}$$

donde

$$G_{ij} = \frac{K_{ij}}{\tau_{ij}s + 1}$$

- Si $u_1$ y $u_2$ son controladores PID, ¿como garantizar la estabilidad del lazo cerrado?. Note que el sistema está **acoplado** (tesis de maestría de Laura Muñoz) [1]. Se consideró el caso de una columna de destilación binaria.
- Se obtuvieron resultados similares a Expert Tune, pero considerando sistemas acoplados.
- Se parametrizaron las tres constantes ($K$, $h$ y $\tau$)
- Los resultados experimentales se obtuvieron mediante la técnica Hardware In the Loop.

- Nuestra propuesta se implementó en la plataforma del doble tanque acoplado.



- Se obtuvo la sintonización robusta del PID [1] y se realizó el análisis de estabilidad robusta de sistemas integradores con retardos (tesis de licenciatura) [2].


[1] Muñoz, L., Santos, O., López, V, Paz, M. Robust control PID for time delay systems, Novel Alg. and Tech. In Telecom., Automation and Industrial Electronics, Springer Verlag, 2008.

[2] Zúñiga, E. Santos, O., Paz, M. On the Robustness of Integral Time Delay Systems with PD Controllers, Novel Alg. and Tech. In Telecom., Automation and Industrial Electronics, Springer Verlag, 2007.

- Se obtuvieron reglas mediante las cuales es posible sintonizar robustamente una planta primer orden con un retardo [3]:

$$\dot{x}(t) = -\frac{1}{\tau}x(t) + Ku(t-h) + f(x),$$

donde $f(x)$ es una función no lineal y $u(t)$ es un controlador PID [3].

- Se trabaja en construir una red industrial (colabaración con el Dr. Marco Paz, Universidad Politécnica de Aguascalientes) para estudiar los efectos de los retardos de la red sobre los lazos de control mediante Controladores Automáticos Programables (PAC's).
- Se ha trabajado en modificar la parte derivativa del control PID con un predictor difuso (tesis de maestría de Francisco Solís y Luis Heriberto) [4]

[3] Santos, O. Paz-Ramos, M. Robust tables for time delay systems, submitted to International Journal of Control, Automation and Systems, 2009.

[4] Solís, F. Santos, O. et al, Fuzzy predictor¨PID for time delay systems, IEEE CIRAS 2004.

**Enfoque temporal (control avanzado, usado en aplicaciones especiales):**

- Estabilización y estabilidad robusta: enfoque LMI, $H_\infty$, $H_2$ (control óptimo), observadores de estado, rechazo a perturbaciones, etc.
- Estabilidad y estabilización: Existen dos grandes enfoques: **Lyapunov-Krasovskii y Razumikin.**

,


- El enfoque mas usado es el de Lyapunov- Krasovskii.

# Estabilidad en el sentido de Lyapunov

Considere el siguiente sistema

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x(0) = x_0 \tag{1}$$

donde $f(x)$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$.

**Theorem**

*La solución trivial del sistema (1) se dice estable (en el sentido de Lyapunov) si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que si*

$$\|x_0\| < \delta \Rightarrow \|x(t, x_0)\| < \varepsilon$$

Observe que se supone que el sistema (1) tiene la solución trivial.

Considere el siguiente sistema

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(0) = x_0 \tag{2}$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $x(t) \in \mathbb{R}^n$.

**Theorem**

*La solución trivial del sistema (2) se dice estable asintóticamente si y solo si existe una función $V(x)$ definida positiva tal que*

$$\left.\frac{dV(x)}{dt}\right|_{(2)} = -w(x)$$

*con $w(x)$ definida positiva.*

Defina

$$w(x) = x^T(t)Qx(t), \quad Q > 0 \text{ y } Q = Q^T,$$

Suponiendo que el sistema es estable, se desea construir una función $V(x)$ decreciente y definida positiva.

Se sabe que la solución del sistema (2) es

$$x(t) = e^{At}x_0$$

Integrando ambos miembros:

$$\int_0^\infty \frac{dV(x)}{dt}dt = -\int_0^\infty x^T(t)Qx(t)dt$$

Por lo que

$$\lim_{t\to\infty} V(x) - V(x_0) = -\int_0^\infty x^T(t)Qx(t)dt$$

Como el sistema es estable

$$\begin{aligned} V(x_0) &= \int_0^\infty x^T(t)Qx(t)dt \\ &= x_0^T \underbrace{\int_0^\infty \left(e^{At}\right)^T Q \left(e^{At}\right) dt}_{P} x_0 = x_0^T P x_0 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$V(x) = x^T P x$$

# Estabilidad para sistemas con retardos

Considere el sistema

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h), \quad x(t) = \varphi(t), \;\; t \in [-h, 0]$$

la solución es

$$\begin{aligned} x(t,\varphi) &= K(t)\varphi(0) + \int_{-h}^{0} K(t-h-\zeta) A_1 \varphi(\zeta) d\zeta \\ K(0) &= I, \;\; K(t) = 0, \;\; \text{para } t < 0. \end{aligned}$$

Bajo la suposición de que el sistema es estable se construye la funcional $V(\varphi)$ :

$$V(\varphi) = \int_0^\infty x^T(t,\varphi) Q x(t,\varphi) dt$$

por lo que se tiene que

$$\begin{aligned} V(x_t) &= x^T(t) U_0(0) x(t) + 2x^T(t) \int_{-h}^{0} U_0(\theta) x(t+\theta) d\theta \\ &\quad + \int_{-h}^{0} \int_{-h}^{0} x^T(t+\xi) U_0(\xi-\theta) x(t+\theta) d\xi d\theta. \end{aligned}$$

con $U_0$ definida como

$$U_0(\tau) = \int_0^{\infty} K^T(t) Q K(t+\tau) dt$$

- A la matriz $U_0$ se le conoce como matriz de Lyapunov para sistemas con retardos (Repin 1962, Infante y Castelán, 1975, Lousiell 1999, Kharitonov 2003).
- V. Kharitonov en 2003 probó que $V(x_t)$ posee cotas inferiores cuadráticas (esto es requerido para verificar que $V(x_t)$ es definida positiva):

$$\|x\|^2 = v_0(x) \leq V(x_t), \quad v_0(x) - \text{Definida positiva}$$

- Han surgido dos tipos de funcionales: de **Tipo Reducido** y de **Tipo completo**.

**Tipo reducido:**
Sea el sistema

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h), \quad x(t) = \varphi(t), \ t \in [-h, 0] \qquad (3)$$

y considere la funcional

$$\begin{aligned} V(x_t) &= x^T P_0 x + \int_{-h}^{0} x^T (t+\theta) P_1 x(t+\theta) d\theta, \\ P_{0,} P_1 &> 0, \ P_0 = P_0^T, \ P_1 = P_1^T \end{aligned}$$

La funcional se **PROPONE.** Observe que $V(x_t)$ es definida positiva debido a que

$$v_0(x) = x^T P_0 x \leq V(x_t) = x^T P_0 x + \int_{-h}^{0} x^T (t+\theta) P_1 x(t+\theta) d\theta$$

Deseamos obtener condiciones suficientes bajo las cuales el sistema (3) es estable. Ahora si

$$\left. \frac{dV(x_t)}{dt} \right|_{(3)} < 0,$$

el sistema es asintóticamente estable.

Se deriva la funcional $V(x_t)$ a lo largo de las trayectorias del sistema:

$$\begin{aligned}\frac{dV(x_t)}{dt} &= \dot{x}^T P_0 x + x^T P_0 \dot{x} + \frac{d}{dt}\left[\int_{-h}^{0} x^T\left(\underbrace{t+\theta}_{\tau}\right) P_1 x(\underbrace{t+\theta}_{\tau}) d\theta\right] \\ &= \left[A_0 x(t) + A_1 x(t-h)\right]^T P_0 x + x^T P_0 \left[A_0 x(t) + A_1 x(t-h)\right] \\ &\quad + x^T(t) P_1 x(t) - x^T(t-h) P_1 x(t-h)\end{aligned}$$

reescribiendo se tiene que

$$\frac{dV(x_t)}{dt} = \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-h) \end{bmatrix}^T \underbrace{\begin{bmatrix} A_0^T P_0 + P_0 A_0 + P_1 & P_0 A_1 \\ A_1^T P_0 & -P_1 \end{bmatrix}}_{\Delta} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-h) \end{bmatrix}$$

Si existen dos matrices $P_0, P_1 > 0$ y simétricas tal que la matriz $\Delta$ es definida negativa, entonces el sistema es estable.

# Algunos comentarios sobre ambos enfoques

- Para el análisis de estabilidad y estabilización el enfoque útil es funcionales de tipo reducido.
- Para análisis de robustez ambos enfoques son útiles, pero el de tipo reducido da condiciones menos conservativas.
- Para el diseño de controladores subóptimos y robustos el enfoque de tipo completo da mejores resultados.
- Hemos obtenido resultados en controladores subóptimos y robusto con el enfoque de funcionales de tipo completo.

# Control óptimo (caso sin retardos)

Sea el sistema

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0$$

Se desea hallar $u(t)$ tal que minimize el índice de desempeño

$$J = \int_0^\infty \left( x^T Qx + u^T Ru \right) dt$$

**Control Admisible:**

- $u$ es una función lineal del estado $x(t)$,
- El sistema (2) en lazo cerrado con $u$ es estable.

$J$ alcanza su mínimo para

$$u(x(t)) = u^*(x(t)). \tag{4}$$

# Síntesis del controlador: Segundo Método de Lyapunov (caso sin retardos)

Suponga que el sistema sin retardos es estable. Se busca una función de Lyapunov $v(x(t))$ tal que

$$\frac{dv(x(t))}{dt} = -w^*(x(t)), \tag{5}$$

donde

$$w^*(x(t)) = x(t)^T Qx(t) + u^*(x(t))^T Ru^*(x(t)).$$

donde $u^*(x(t))$ es óptima. Integrando (5) de 0 a $\infty$

$$J^* = v(x_0) = \int_0^\infty w^*(x(t, x_0))dt.$$

donde $x(t, x_0)$ - solución del sistema (2) en lazo cerrado con $u^*(x(t))$.

**Ecuación de Bellman**

$$\min_u \left( \frac{dv(x(t))}{dt} \Big|_{(2)} + x(t)^T Qx(t) + u^T Ru \right) = 0. \tag{6}$$

Ya se sabe que una función de Lyapunov para el sistema (2) es:

$$v(x(t)) = x(t)^T P x(t),$$

donde $P > 0$ y $P = P^T$. Entonces se tiene que

$$\left.\frac{dv(x)}{dt}\right|_{(2)} = \left(2x(t)^T P\right)\left(Ax(t) + Bu\right),$$

Por lo que:

$$\min_u \left(2x(t)^T PAx(t) + 2x(t)^T PBu + \left(x(t)^T Qx(t) + u^T Ru\right)\right) = 0.$$

La ley de control óptima es

$$u^* = -R^{-1} B^T P x(t).$$

**Ecuación Algebraica de Riccati:**

$$A^T P + PA + Q - PBR^{-1} B^T P = 0.$$

# Programación Dinámica para sistemas con retardos, control óptimo

**Principales publicaciones**

1. N. N. Krasovskii (1962). Retardos puntuales en los estados, horizonte infinito.
2. D. Ross y Flügge-Lotz (1969). Retardos puntuales en los estados, horizonte infinito (Basado en el trabajo de Krasovskii).
3. H. Khusner y D. Barnea (1970). Retardos distribuidos en los estados, horizonte finito, caso variante en el tiempo (Basado en el trabajo de Krasovskii).

# Programación Dinámica para sistemas con retardos

N. N. Krasovskii (1962) y D. Ross y Flügge-Lotz (1969) consideran el siguiente tipo de sistema

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1 x(t-h) + Bu(t), \tag{7}$$

Ellos proponen una funcional

$$\begin{aligned} V(x_t) &= x^T(t)\Pi_0 x(t) + 2x^T(t)\int_{-h}^{0} \Pi_1(\theta)x(t+\theta)d\theta \\ &+ \int_{-h}^{0}\int_{-h}^{0} x^T(t+\xi)\Pi_2(\xi,\theta)x(t+\theta)d\xi d\theta. \end{aligned}$$

la cual debe satisfacer

$$\min_u \left( \frac{dV(x_t)}{dt}\Big|_{(7)} + x(t)^T Q x(t) + u^T R u \right) = 0$$

La ley de control óptima es

$$u^*(t) = -R^{-1}B^T\Pi_0 x(t) - R^{-1}B^T\int_{-h}^{0}\Pi_1(\theta)\,x(t+\theta)d\theta,\;\; t\geq 0$$

Las matrices $\Pi_0$, $\Pi_1(\theta)$ y $\Pi_2(\xi,\theta)$ satisfacen

$$(a)\;\; A^T\Pi_0 + \Pi_0 A - \Pi_0 BR^{-1}B^T\Pi_0 + \Pi_1^T(0) + \Pi_1(0) + Q = 0,$$

$$(b)\;\; \frac{d\Pi_1(\theta)}{d\theta} = \left(A^T - \Pi_0 BR^{-1}B^T\right)\Pi_1(\theta) + \Pi_2(0,\theta),\;\; \theta\in[-1,0],$$

$$(c)\; \frac{\partial\Pi_2(\xi,\theta)}{\partial\xi} + \frac{\partial\Pi_2(\xi,\theta)}{\partial\theta} = -\Pi_1^T(\xi)BR^{-1}B^T\Pi_1(\theta),$$
$$\theta\in[-1,0],\, \xi\in[-1,0],$$

$$(d)\;\; \Pi_1(-h) = \Pi_0 A_1,$$

$$(e)\;\; \Pi_2(-h,\theta) = A_1^T\Pi_1(\theta),$$

# Comentarios acerca de las ecuaciones obtenidas por N. N. Krasovskii y D. Ross

- D. Ross da un método numérico para obtener una solución aproximada.
- Kuhsner trata el caso variante en el tiempo y de horizonte finito, para este caso no existe aún un método numérico o aproximado.

- Para el caso de sistemas sin retardos la Ecuación de Riccati puede tener múltiples soluciones.
- Para el caso con retardos puede ocurrir lo mismo, ¿**Como garantizar que la solución hallada sea la óptima**?

N. N. Krasovskii demostró que la *estructura* de la ley de control óptima es

$$u_L(t) = \Gamma_0 x(t) + \int_{-h}^{0} \Gamma_1(\theta) x(t+\theta) d\theta.$$

## Definition (1)

Una ley de control admisible para el sistema con retardos satisface:
1. $u(t) = \hat{u}(x_t)$, es decir, el control en el instante de tiempo $t$, es una funcional del estado $x_t$ del sistema.
2. La funcional $\hat{u}(x_t)$ es tal que las soluciones del sistema con retardos existen y son únicas para $t \geq 0$ y para toda condición inicial $\varphi$.
3. El sistema con retardos en lazo cerrado con $u(t) = \hat{u}(x_t)$ es estable.

# Algunos resultados nuestros:

- Se obtuvo un algortimo iterativo para la obtención de controladores subóptimos (tesis doctoral).
- Por medio de funcionales de tipo completo se obtuvo una ley de control subóptima [6] .
- No existen problemas de múltiples soluciones en las ecuaciones que definen al controlador [7].

[6] Santos, O. Kharitonov, V, Mondié, S. Linear quadratic optimal control, International Journal of Control, 2009.

[7] Santos, O., Kharitonov, V. Mondié, S. Complete type functionals for distributed time delay systems, IEEE CDC 2006.

- Modificando el índice de desempeño se obtuvieron controladores óptimos [8].
- Se obtuvieron controladores robustos ante perturbaciones en los parámetros [9].
- Se obtuvieron controladores subóptimos con métodos de optimización numérica [10]
- Se trabaja en la implementación en un sistema térmico, un control óptimo para sistemas con retardos (tesis de maestría).
- Se trabaja en la implementación de controladores robustos y óptimos para un sistema subactuado con retardos (tesis de maestría).

[8] Santos, O. Mondié, S. On the optimal control of time delay systems: a complete type functionals approach, IEEE CDC 2007.

[9] Santos, O. Mondié, S. Guaranteed Cost Control: A complete type functionals apporach, enviado a International Journal of Control, Automation and Systems, 2009.

[10] Santos, O. Sánchez, G. Suboptimal control based on Hill climbing method, IET Control Theory and Applications, 2007.

# Algunas otras líneas de interés:

- Automatización: Se trabajó en la automatización de un bioreactor en Química - UAEH mediante un PLC Scheneider.
- Se automatizó un proceso térmico en la Universidad de la Mixteca, Dra. Norma F. Santos Sánchez.
- Se inició la instrumentación de un equipo de extracción asistido por microondas en la Universidad de la Mixteca, Dra. Norma F. Santos Sánchez.
- Control no lineal: enfoque de Lyapunov, control no lineal de sistemas subactuados [11] y se trabaja en la implementación de un perfil robusto en un bioreactor.

[11] Ordaz, P. Santos, O. López, V. On the suboptimal control of underactuated systems, aceptado en International Journal of Innovative computing, information and control, 2009.

Gracias por su atención