UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO
INSTITUTO DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA
EXAMEN DE CÁLCULO Y ÁLGEBRA LINEAL

Enero 7 de 2011

`Solución al examen ECAL`

**1.** Demuestre que

$$\lim_{n\to 0}\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n+\ldots}}}}=1$$

**Solución**

Sea $f(x,n)=\sqrt{n+x}$. Es claro que la composición de $f$ consigo misma $k$ veces da por resultado

$$f^k(x,n)=\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n+\cdots+\sqrt{n+x}}}}$$

donde el número de veces que aparece el radical es $k+1$. Tomando el límite cuando $k\to\infty$ obtenemos

$$\lim_{k\to\infty}f^k(x,n)=x_0$$

donde $x_0$ es el punto fijo positivo de $f(x,n)$ dado por:

$$x_0=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+n}.$$

Puesto que $x_0$ no depende de $x$ basta probar ahora que $\lim\limits_{n\to\infty}x_0=1$.

**2.** Deduzca una fórmula de reducción para $\int\tan^n x\,dx, n\in\mathbb{N}$.

**Solución**

Se reescribe la $\tan^n x$ como $\tan^2 x\tan^{n-2} x$ y se utiliza la identidad $\tan^2 x=\sec^2 x-1$

$$\int\tan^n x\,dx=\int\tan^2 x\tan^{n-2} x\,dx=\int(\sec^2 x-1)\tan^{n-2} x\,dx$$

Se realiza el producto y utilizando la linealidad de la integral, separa la última integral en dos integrales:

$$\int\tan^n x\,dx=\int\sec^2 x\tan^{n-2} x\,dx-\int\tan^{n-2} x\,dx$$

Con el cambio de variable $u=\tan x,\ du=\sec^2 x\,dx$ en la primera integral tenemos

$$\int\tan^n x\,dx=\int u^{n-2}\,du-\int\tan^{n-2} x\,dx=\frac{u^{n-1}}{n-1}-\int\tan^{n-2} x\,dx$$

Al regresar a la variable original se obtiene la fórmula:

$$\int \tan^n x\,dx = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - \int \tan^{n-2} x\,dx$$

**3.(a)** Demostrar que si $f$ y $g$ son funciones inyectivas entonces $f \circ g$ es también inyectiva, y hallar $(f \circ g)^{-1}$ en términos de $f^{-1}$ y $g^{-1}$.

**Demostración**

Supongamos que $(f \circ g)(x) = (f \circ g)(y)$, es decir $f(g(x)) = f(g(y))$, como $f$ es inyectiva tenemos que $g(x) = g(y)$, y como g es inyectiva se sigue que $x = y$, por lo tanto $f \circ g$ es inyectiva.

Ahora $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$, pues $(f \circ g)^{-1} \circ (f \circ g)(x) = g^{-1}(f^{-1}(f(g(x)))) = g^{-1}(g(x)) = x$, la otra composición se hace de manera análoga.

**(b)** Si $f$ es una función biyectiva y $g(x) = 1 + f(x)$, hallar $g^{-1}$ en términos de $f^{-1}$.

**Solución**

Se define la función auxiliar $h(x) = 1 + x$, cuya inversa está dada por $h^{-1}(x) = x - 1$, de esta forma $g(x) = h(f(x)) = 1 + f(x)$, y utilizando el resultado del inciso anterior tenemos $g^{-1}(x) = (h(f(x)))^{-1} = f^{-1}(h^{-1}(x)) = f^{-1}(x - 1)$

**4.** Considere el siguiente campo vectorial,

$$\mathsf{v} = \frac{-y}{x^2+y^2}\hat{\mathsf{i}} + \frac{x}{x^2+y^2}\hat{\mathsf{j}}\,.$$

**(a)** Encuentre una relación entre $\mathsf{v}$ y las derivadas primeras de la función $f(x, y) = \tan^{-1}(\frac{y}{x})$.

**Solución**

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{-y}{x^2}\right) = \frac{-y}{x^2+y^2}\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{x^2+y^2}\,,$$

entonces si $\mathsf{v} = v_1\hat{\mathsf{i}} + v_2\hat{\mathsf{j}}$ se tiene que $f_x = v_1$ y $f_y = v_2$.

**(b)** Sea un campo vectorial $\mathsf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\mathsf{F} = \nabla f$ en donde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función continuamente diferenciable en un dominio $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Sea $C$ una curva cerrada suave en el interior de $D$. Calcule la siguiente integral de linea

$$\int_C \mathsf{F} \cdot d\mathsf{r}\,,$$

en donde $\mathsf{r} = x(s)\hat{\mathsf{i}} + y(s)\hat{\mathsf{j}}$, $s \in [a, b]$ $(a < b)$ es una parametrización de $C$ tal que $x$ y $y$ son funciones suaves de $s$.

**Solución**

$$\int_C \mathsf{F} \cdot d\mathsf{r} = \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{ds}\right) ds = \int_a^b \frac{df}{ds}\,ds = f(x(b), y(b)) - f(x(a), y(a))\,,$$

2

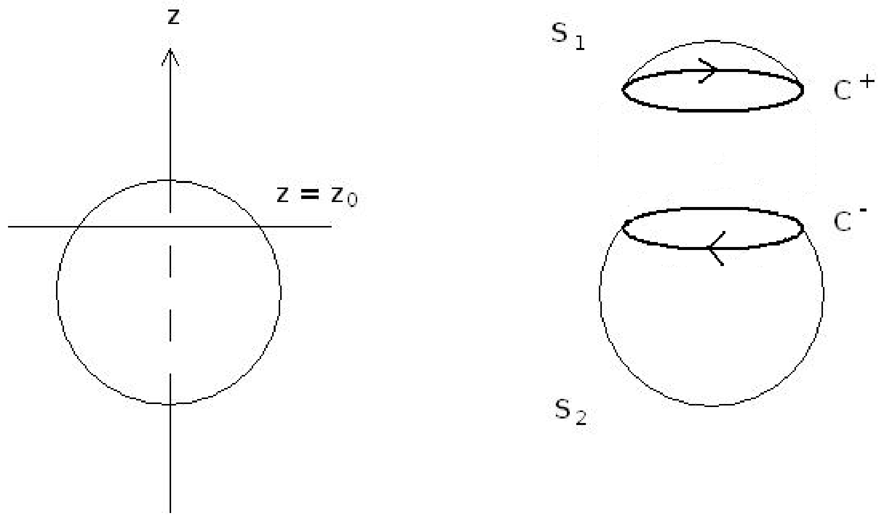


Figura 1. Empleo del teorema de Stokes.

por el teorema fundamental del cálculo. Como $C$ es una curva cerrada, $(x(a), y(a)) = (x(b), y(b))$ y por lo tanto la integral de arriba es cero.

**(c)** Suponga que $C$ es el círculo unitario centrado en el origen. Calcule la circulación alrededor de $C$ del campo $\mathsf{v}$ del inciso (a) y explique cuidadosamente cómo su cálculo es compatible con su respuesta al inciso (b).

**Solución**

Sea $s \mapsto \mathsf{r}(s) = (\cos(s), \sin(s))$, $s \in [0, 2\pi]$ una parametrización del círculo unitario $C$, entonces la circulación de $\mathsf{v}$ alrededor de $C$ es

$$\oint \mathsf{v} \cdot d\mathsf{r} = \int_0^{2\pi} \left( \frac{-\text{sen } s}{1} \cdot (-\text{sen } s) + \frac{\cos s}{1} \cdot (\cos s) \right) ds = \int_0^{2\pi} ds = 2\pi \,.$$

Aún cuando $C$ es una curva cerrada, el valor de la integral de línea no es cero. Esto se debe a que $\mathsf{v}$ no es un campo gradiente en el disco unitario ya que no está definido en el centro (origen) de dicho disco (de otra forma la integral debió ser cero por el inciso (b)).

**5.** Considere el campo vectorial $\mathsf{F} = e^{\frac{x^2}{2}}\hat{\mathsf{i}} + \tan^{-1}(\frac{y}{x})\hat{\mathsf{j}} + \text{sen} yz\hat{\mathsf{k}}$. Calcule el flujo del rotacional de $\mathsf{F}$ a través de la superficie de la bola unitaria.

**Solución**

El flujo es cero independientemente de la forma particular de $\mathsf{F}$ (toda vez que $\mathsf{F}$ cumpla las condiciones del teorema de Stokes, lo cual es cierto en este caso).

Sea $C$ la curva sobre la superficie de la bola que se obtiene al intersecarla con el plano $z = z_0$, $0 < z_0 < 1$ (ver figura ).

Entonces si $S$ es la superficie de la bola se tiene que $S = S_1 \cup S_2$, en donde $S_1 \cap S_2 = C$; luego,

$$\iint_S \nabla \times \mathsf{F} \cdot d\mathsf{S} = \iint_{S_1} \nabla \times \mathsf{F} \cdot d\mathsf{S}_1 + \iint_{S_2} \nabla \times \mathsf{F} \cdot d\mathsf{S}_2 = \oint_{\partial S_1} \mathsf{F} \cdot d\mathsf{r}_1 + \oint_{\partial S_2} \mathsf{F} \cdot d\mathsf{r}_2 \,,$$

por el teorema de Stokes. Ahora $\partial S_1 = C^+$ en donde $C^+$ es la curva $C$ orientada "positivamente" (oeste-este), mientras que $\partial S_2 = C^-$ en donde $C^-$ es la curva $C$ orientada "negativamente" (este-oeste); es decir,

$$\iint_S \nabla \times \mathsf{F} \cdot d\mathsf{S} = \oint_{C^+} \mathsf{F} \cdot d\mathsf{r}_1 + \oint_{C^-} \mathsf{F} \cdot d\mathsf{r}_2 = \oint_{C^+} \mathsf{F} \cdot d\mathsf{r}_1 - \oint_{C^+} \mathsf{F} \cdot d\mathsf{r}_1 = 0\,.$$

**6.** La función de producción para un fabricante de software está dada por $f(x, y) = 100x^{3/4}y^{1/4}$, donde $x$ representa las unidades de trabajo (\$150 por unidad) y $y$ representa las unidades de capital (\$250 por unidad). El costo total de trabajo y capital está limitado a \$50,000.00. Hallar el nivel máximo de producción de este fabricante.

**Solución**

Tenemos un problema de multiplicadores de Lagrange, donde la función objetivo es $f(x, y) = 100x^{3/4}y^{1/4}$ y está sujeta a la restricción $g(x, y) = 150x + 250y = 50,000$, entonces por el Teorema de Lagrange tenemos que resolver el sistema de ecuaciones $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y),\ g(x, y) = c$, que para nuestro problema resulta:

$$(75x^{-1/4}y^{1/4}, 25x^{3/4}y^{-3/4}) = \lambda(150, 250),\ 150x + 250y = 50,000$$

es decir

$$\begin{aligned} 75x^{-1/4}y^{1/4} &= 150\lambda \\ 25x^{3/4}y^{-3/4} &= 250\lambda \\ 150x + 250y &= 50,000 \end{aligned}$$

despejando $\lambda$ en la primera ecuación y simplificando

$$\lambda = \frac{x^{-1/4}y^{1/4}}{2}$$

sustituyendo este valor en la segunda ecuación

$$25x^{3/4}y^{-3/4} = 250\left(\frac{x^{-1/4}y^{1/4}}{2}\right)$$

resolviendo resulta $x = 5y$. Sustituyendo en la tercera ecuación obtenemos $y = 50,\ x = 250$, por lo tanto el nivel máximo de producción es $f(250, 50) = 100(250)^{3/4}(50)^{1/4} \approx 16,719$ unidades.

**7.** Determinar si el conjunto de vectores dado genera al espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ :

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

**Solución**

Para generar $\mathbb{R}^3$ se necesitan al menos tres vectores linealmente independientes. El conjunto de vectores dado NO genera al espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, pues los últimos dos vectores son combinaciones lineales de los dos primeros, es decir

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**8.** Sea $\mathbf{A}$ una matriz real cuadrada simétrica de tamaño siete y sea $x = (x_1, \ldots, x_d)$ arbitrario. Considere el siguiente límite:

$$\lim_{k \to \infty} \mathbf{A}^k x \,. \tag{1}$$

**(a)** Suponga que $\mathbf{A}$ tiene eigenvalores $-1, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{-1}{4}$. Calcule el límite en (1) en términos de $x$ o bien demuestre que este no existe.

**Solución**

Dado que $\mathbf{A}$ es real simétrica, existe una matriz ortogonal $\mathbf{Q}$ tal que $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^{\mathbf{t}}$, en donde $\mathbf{D} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_7)$ es una matriz diagonal cuyas componentes corresponden a los valores propios de $\mathbf{A}$. Entonces $\mathbf{A}^{\mathbf{k}} = \mathbf{Q} \operatorname{diag}(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_7^k)\mathbf{Q}^{\mathbf{t}}$, por ortogonalidad de $\mathbf{Q}$.

**(a)** El límite no existe. $\lim_{k\to\infty} \mathbf{A}^{\mathbf{k}} x = \mathbf{Q} \operatorname{diag}(\lim_{k\to\infty} \lambda_1^k, \ldots, \lim_{k\to\infty} \lambda_7^k)\mathbf{Q}^{\mathbf{t}}$, siempre y cuando cada uno de los límites $\lim_{k\to\infty} \lambda_j^k$ exista, pero si $\lambda_1 = -1$ entonces $\lim_{k\to\infty} \lambda_1^k$ no existe.

**(b)** Suponga que $\mathbf{A}$ tiene eigenvalores $1, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-1}{4}, \frac{1}{4}$. Calcule el límite en (1) en términos de $x$ o bien demuestre que este no existe.

**Solución**

**(b)** Sea $\mathbf{Q} = [q_1 \cdots q_7]$, en donde $q_j \in \mathbb{R}^7$ es un vector propio unitario asociado al valor propio $\lambda_j$. Entonces

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{A}^{\mathbf{k}} x = [q_1 \cdots q_7] \operatorname{diag}(1, 0, \ldots, 0) \begin{bmatrix} q_1^t \\ \vdots \\ q_7^t \end{bmatrix} x = [q_1 \, 0 \cdots 0] \begin{bmatrix} q_1^t x \\ \vdots \\ q_7^t x \end{bmatrix} = (q_1^t x) q_1 = (q_1 q_1^t) x \,;$$

es decir, la proyección del vector $x$ sobre el espacio propio asociado con $\lambda_1 = 1$.

**9.** Sea $x \in \mathbb{R}^d$ y $\{e_1, \ldots, e_d\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^d$.
**(a)** Sea $\mathbf{M_j}$ la matriz que se obtiene de reemplazar la $j$-ésima columna de la matriz identidad $\mathbf{I_n}$ por $x$, es decir,

$$\mathbf{M_j} = [e_1 \cdots e_{j-1} \; x \; e_{j+1} \cdots e_d] \,.$$

Calcule $\det(\mathbf{M_j})$, el determinante de $\mathbf{M_j}$.

**Solución**

Desarrollando el determinante de $\mathbf{M_j}$ por menores a lo largo de su primera columna se obtiene

$$\det(\mathbf{M_j}) \;=\; \det\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & x_1 & & & \\ 0 & 1 & & & x_2 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \\ \vdots & & & \ddots & \vdots & e_{j+1} & \cdots & e_d \\ \vdots & & & & x_j & & & \\ \vdots & & & & \vdots & & & \\ 0 & & & & x_d & & & \end{bmatrix} \;=\; \det\begin{bmatrix} 1 & & & x_2 & & & \\ \vdots & \ddots & & \vdots & & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots & e'_j & \cdots & e'_{d-1} \\ \vdots & & & x_j & & & \\ \vdots & & & \vdots & & & \\ 0 & & & x_d & & & \end{bmatrix}.$$

en donde la matriz del lado derecho es de tamaño $(d-1)$ y $e'_j \in \mathbb{R}^{d-1}$ es $j$-ésimo vector canónico. Procediendo de manera recursiva, desarrollando el determinante por menores a lo largo de las columnas y de izquierda a derecha se tiene,

$$\det(\mathbf{M_j}) \;=\; \det\begin{bmatrix} x_j & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ x_d & & & 1 \end{bmatrix} \;=\; x_j\,,$$

la última igualdad es cierta ya que la matriz de en medio es triangular inferior y por lo tanto su determinante es el producto de los elementos sobre la diagonal principal.

**(b)** Sea $b \in \mathbb{R}^d$ y suponga que $x$ es tal que $\mathbf{A}x = b$ es consistente. Defina $\mathbf{C_j} = \mathbf{AM_j}$, describa cómo son las columnas de $\mathbf{C_j}$ en términos de las columnas de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{M_j}$.

**Solución**

Por definición,

$$\mathbf{C_j} = \mathbf{AM_j} \;=\; [\mathbf{A}e_1 \;\cdots\; \mathbf{A}e_{j-1}\; \mathbf{A}x\; \mathbf{A}e_{j+1} \cdots \mathbf{A}e_d]\,,$$

entonces si $\mathbf{A} = [A_1 \;\cdots\; A_d]$, $A_j \in \mathbb{R}^d$, es la expresión por columnas de $\mathbf{A}$ y dado que, por hipótesis, $\mathbf{A}x = b$, se tiene que

$$\mathbf{C_j} \;=\; [A_1 \;\cdots\; A_{j-1}\; b\; A_{j+1} \cdots A_d]\;;$$

es decir, $\mathbf{C_j}$ se obtiene reemplazando la columna $j$-ésima de $\mathbf{A}$ por el vector $b$.

**(c)** Calcule $\det(\mathbf{AM_j})$. Suponiendo que $\mathbf{A}$ es invertible, utilice su cálculo para deducir la regla de Cramer para el sistema $\mathbf{A}x = b$.

**Solución**

$$\det(\mathbf{C_j}) = \det(\mathbf{AM_j}) \;=\; \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{M_j}) \;=\; x_j\det(\mathbf{A})\,.$$

Como $\mathbf{A}$ es invertible, $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ y entonces

$$x_j \;=\; \frac{\det(\mathbf{C_j})}{\det(\mathbf{A})}\,,$$

es decir, se obtiene la regla de Cramer (sistemas consistentes con solución única).

**10.**
**(a)** Demuestre que para cualquier matriz $\mathbf{A}$ y vector $b$, uno y solamente uno de los siguientes problemas tiene solución:

$$(i) \quad \mathbf{A}x = b\,, \qquad\qquad (ii) \quad y^t\mathbf{A} = 0^t \quad \text{tal que} \quad y^t b \neq 0\,,$$

en donde $0^t$ denota al renglón nulo.

**Solución**

Supongamos que existe $x$ que satisface $(i)$ y $y$ que satisface $(ii)$, entonces $0 = 0^t x = (y^t\mathbf{A})x = y^t(\mathbf{A}x) = y^t b \neq 0$, una contradicción; por lo tanto $(i)$ y $(ii)$ no pueden ser simultáneamente solubles. Ahora observe que si $b = 0$ entonces $(ii)$ no tiene solución, mientras que $x = 0$ es solución de $(i)$. Supongamos entonces que $b \neq 0$ y que ni $(i)$ ni $(ii)$ tienen solución. Como $(i)$ no tiene solución, $b$ no pertenece al espacio columna de $\mathbf{A}$, $C(\mathbf{A})$, y podemos encontrar $x'$ tal que si $b' = \mathbf{A}x'$ entonces $y = b - b'$ es perpendicular a $C(\mathbf{A})$ ($b'$ es la proyección ortogonal de $b$ sobre $C(\mathbf{A})$); en particular, $y^t\mathbf{A} = 0$ y $y^t b = \|b\|^2 - b' \cdot b = \|b\|(\|b\| - \|b'\|\cos\theta) \geq 0$; es decir, $(ii)$ tiene solución, en contradicción con nuestra hipótesis; por lo tanto, siempre sucede que uno y solo uno de los dos problemas tiene solución.

**(b)** Suponga que el sistema $\mathbf{A}x = b$ es siempre consistente para cualquier vector $b$. ¿Qué puede decir entonces acerca del conjunto solución del sistema $\mathbf{A}^t y = 0$?

**Solución**

Supongamos que $b$ es un vector $m$ dimensional, entonces $\mathbf{A}$ es una matriz de tamaño $m \times n$. Por hipótesis el sistema $\mathbf{A}x = b$ es consistente para cualquier vector $b$, entonces el espacio columna de $\mathbf{A}$ tiene dimensión $m$; en particular, esto significa que puede encontrarse un subconjunto de $m$ columnas de $\mathbf{A}$ las cuales son linealmente independientes, es decir que $n \geq m$. Como las dimensiones de los espacios columna y renglón siempre coinciden, la dimensión del espacio columna de $\mathbf{A}^\mathbf{t}$ es $m$, luego el sistema $\mathbf{A}^\mathbf{t} y = 0$ es equivalente a uno escalonado de $n \times m$ el cual tiene $m$ pivotes, es decir que todas las columnas son pivotales, por lo tanto linealmente independientes y entonces $y = 0$ es la única solución a la ecuación homogénea $\mathbf{A}^\mathbf{t} y = 0$.