EXAMEN DE CÁLCULO Y ÁLGEBRA LINEAL
JULIO 2011

Soluciones

1. Problemas de Cálculo

1.
(a) Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $F(x) = \int_1^{g(x)} \sqrt{2 + \ln(t)}\, dt$, en donde g es una función derivable. ¿Es F derivable? Justifique su respuesta y en caso de que ésta sea afirmativa, calcule la derivada de F.

(b) Calcule la derivada de la función

$$F(x) = \int_1^{\int_0^x e^{2t}\, dt} \sqrt{2 + \ln(t)}\, dt\,.$$

Sol.:
(a) La función es derivable, ya que satisface las hipótesis del Teorema Fundamental del Cálculo.

$$\frac{dF}{dx} = g'(x)\sqrt{2 + \ln(g(x))}\,.$$

(b)

$$\frac{dF}{dx} = e^{2x}\sqrt{2 + \ln\left(\frac{e^{2x}}{2} - \frac{1}{2}\right)}\,.$$

2. Demuestre que la función $f(x) = x^3 - 3x + k$ (k una constante) no puede tener más de una raíz en el intervalo $[-1, 1]$ cualquiera que sea el valor de k.

Sol.: supongamos que f tiene más de una raíz en el intervalo $[-1, 1]$. Sean a y b dos de tales raíces con $-1 \le a < b \le 1$. Como $f(a) = f(b) = 0$, por el Teorema de Rolle existe $c \in (a, b) \subseteq (-1, 1)$, tal que $f'(c) = 0$, pero $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) < 0\ \forall x \in (-1, 1)$. Por lo tanto f no puede tener más de una raíz en el intervalo $[-1, 1]$.

3. Si f y g son funciones crecientes, ¿lo son también las siguientes funciones? Justifique sus respuestas.
(a) $f + g$.
(b) fg.
(c) $f \circ g$.

Sol.:
(a) Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, como f y g son crecientes $f(a) < f(b)$, $g(a) < g(b)$, entonces $(f + g)(a) = f(a) + g(a) < f(b) + g(b) = (f + g)(b)$.

(b) fg no necesariamente es creciente. Contraejemplo: tomemos $f(x) = x = g(x)$, ambas son crecientes en $\mathbb{R}$, pero $(fg)(x) = x^2$ es creciente en $(0, \infty)$ y decreciente en $(-\infty, 0)$.

(c) $f \circ g$ es creciente. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, como g es creciente $g(a) < g(b)$, como f es creciente $f(g(a)) < f(g(b))$.

Date: 25 de julio del 2011.

4.
(a) Enuncie el criterio de convergencia de Cauchy para sucesiones de números reales.

(b) Considere la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ en donde

$$a_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\,.$$

Demuestre que la sucesión diverge.

(c) Demuestre que para cualquier entero positivo p

$$0 \leq a_{n+p} - a_n \leq \frac{p}{n+1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Explique por qué este resultado no contradice el criterio de convergencia de Cauchy.

<u>Sol.</u>:
(a) Una sucesión de número reales, $(a_n)_{n\geq 1}$, es convergente si y sólo si, para todo $\varepsilon > 0$ existe un número natural $N = N(\varepsilon)$ tal que $|a_n - a_m| < \varepsilon$ siempre que $n > N$ y $m > N$.

(b) Observamos que para cualquier $n \geq 1$,

$$a_n > \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \log(n+1)\,.$$

Ahora, para cualquier M entero positivo, sea $n_{_M} \in \mathbb{N}$ tal que $\log(n_{_M} + 1) > M$, entonces se tiene que $a_{n_{_M}} > M$ y por lo tanto la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ no es acotada superiormente; por consiguiente no es convergente.

(c) Como $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n+1}$, $(a_n)_{\geq 1}$ es monótona creciente, por lo tanto, para cualquier entero positivo p, $a_{n+p} - a_n > a_{n+1} - a_n > 0$. Por otra parte,

$$a_{n+p} - a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+p} \leq \frac{p}{n+1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,. \tag{1}$$

El resultado no contradice el criterio de convergencia de Cauchy ya que este último establece que la desigualdad $|a_n - a_m| < \varepsilon$ debe satisfacerse de manera *uniforme* en n y m, mientras que en (1) depende de p (entonces no es uniforme). Por ejemplo, considere la diferencia $a_{n+n} - a_n$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$a_{n+n} - a_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+n} \geq \frac{n}{n+n} = \frac{1}{2}\,.$$

5. Encuentre los puntos sobre la superficie $x^2 + 2y^2 - z^2 = 1$ más próximos al origen.

<u>Sol.</u>: sean $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ y $g(x,y,z) = x^2 + 2y^2 - z^2 - 1 = 0$.

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y,z) &= \lambda \nabla g(x,y,z)\,, \\ (2x, 2y, 2z) &= \lambda(2x, 4y, -2z)\,. \end{aligned}$$

La ecuación anterior induce el siguiente sistema:

$$2x = 2\lambda x\,, \tag{2}$$

$$2y = 4\lambda y\,, \tag{3}$$

$$2z = -2\lambda z\,, \tag{4}$$

$$x^2 + 2y^2 - z^2 - 1 = 0\,. \tag{5}$$

Si $z \neq 0$, de la ecuación (4) se tiene que $\lambda = -1$ y $x = y = 0$ por (2) y (3), pero de (5) se tendría que $z^2 = -1$, lo cual es imposible en R. Por lo tanto z debe ser igual a 0. Entonces el sistema anterior se reduce a

$$2x = 2\lambda x\,, \tag{6}$$

$$2y = 4\lambda y\,, \tag{7}$$

$$x^2 + 2y^2 - 1 = 0\,. \tag{8}$$

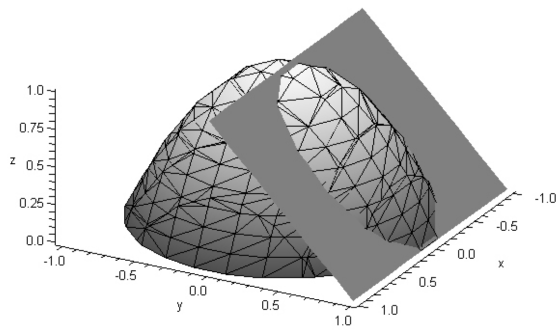
Si $x \neq 0$, de la ecuación (6) se tiene que $\lambda = 1$. A continuación, a partir de (7) se deduce que $y = 0$ y de (8) que $x = \pm 1$. Los puntos $(1, 0, 0)$ y $(-1, 0, 0)$ satisfacen las condiciones del problema.

Si $y \neq 0$, a partir de (7) se obtiene que $\lambda = \frac{1}{2}$. En consecuencia $x = 0$ y $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ por las ecuaciones (6) y (8). Los puntos $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ y $\left(0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ satisfacen las condiciones del problema. Sólo resta evaluar:

$$\begin{aligned} f(1,0,0) &= 1\,, \\ f(-1,0,0) &= 1\,, \\ f\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) &= \frac{1}{2}\,, \\ f\left(0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right) &= \frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto los puntos de la superficie $x^2 + 2y^2 - z^2 = 1$ más próximos al origen son $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ y $\left(0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.

6. Calcule el volumen de la región sólida R acotada superiormente por el paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ e inferiormente por el plano $z = 1 - y$. (cf. figura.)



Sol.: igualando los valores z tenemos $1 - y = 1 - x^2 - y^2$, entonces la intersección de las dos superficies se produce en el cilindro circular recto dado por $x^2 = y - y^2$. Como el volumen de la región R es la diferencia entre el volumen bajo el paraboloide y el volumen bajo el plano resulta que el volumen V es

$$V = \int_0^1 \int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} (1 - x^2 - y^2)\, dxdy - \int_0^1 \int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} (1 - y)\, dxdy$$

$$= \int_0^1 \int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} (y - y^2 - x^2)\, dxdy \;=\; \int_0^1 \left[(y-y^2)x - \frac{x^3}{3} \right]_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} dy$$

$$= \frac{4}{3} \int_0^1 (y-y^2)^{3/2}\, dy \;=\; \left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{1}{8}\right) \int_0^1 [1 - (2y-1)^2]^{3/2}\, dy$$

$$= \frac{1}{6} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos^4\theta}{2}\, d\theta \;=\; \frac{1}{6} \int_0^{\pi/2} \cos^4\theta\, d\theta \;=\; \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{3\pi}{16}\right) \;=\; \frac{\pi}{32}\,.$$

7. Considere el campo vectorial

$$\Phi \;=\; \begin{bmatrix} z^3 + 2xy \\ x^2 - zy^2 \\ 3xz^2 \end{bmatrix}.$$

Calcule el flujo F del rotacional de Φ a través del hemisferio sur H de la esfera unitaria con centro en el origen.

Sol.: aplicando el teorema de Stokes tenemos que,

$$F \;=\; \iint_H \nabla \times \Phi \cdot \hat{\mathsf{n}}\, dA \;=\; \int_C \Phi(\mathsf{r}) \cdot d\mathsf{r}\,,$$

en donde en la integral de superficie, dA es la diferencial de área, $\hat{\mathsf{n}}$ es la normal unitaria exterior a H y en la integral de linea, C es el círculo unitario en el plano xy y r es una parametrización de C. Ahora,

$$\int_C \Phi(\mathsf{r}) \cdot d\mathsf{r} \;=\; \int_C \begin{bmatrix} 2xy \\ x^2 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot d\mathsf{r}\,.$$

Sin embargo, observamos que $\Phi(\mathsf{r}) = \nabla(x^2 y)$ y por lo tanto la integral de linea (circulación de F alrededor de C) es cero.

2. Problemas de Álgebra Lineal

8. Suponga que la siguiente es la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales,

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda & \lambda & 2 \\ 1 & \lambda & 2 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine los valores de λ de tal forma que el sistema:
(a) tenga solución única,
(b) tenga infinidad de soluciones,
(c) sea inconsistente.

Sol.: al aplicar operaciones elementales a la matríz original se obtiene la siguiente matríz en la forma escalonada reducida,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{\lambda^2 - 2\lambda + 4}{(\lambda-2)(\lambda+1)(\lambda-1)} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2 - 5\lambda}{(\lambda-2)(\lambda+1)(\lambda-1)} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{(\lambda-2)(\lambda+1)(\lambda-1)} \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto el sistema es inconsistente para $\lambda = 2, 1, -1$, mientras que tiene solución única para el resto de los valores de λ.

9. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x, y, z) = \begin{pmatrix} x - y + 4z \\ 3x + 2y - z \\ 2x + y - z \end{pmatrix} .$$

(a) Encuentre la matriz $\mathbf{A_T}$ de esta transformación lineal.

(b) Encuentre una base para $\mathrm{Im}(T)$, una base para $\ker(T)$ y verifique el teorema de la dimensión.

(c) Encuentre los valores característicos (λ_i), los vectores característicos $(\mathbf{v}_i)$ y los espacios característicos (E_{λ_i}) asociados con la matriz $\mathbf{A_T}$.

(d) ¿Es la matriz de la transformación, $\mathbf{A_T}$, diagonalizable? ¿Es la transformación T un isomorfismo?

Sol.:
(a)

$$\mathbf{A_T} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(b) Como la Matriz $\mathbf{A_T}$ es equivalente por renglón a la matriz identidad o bien $|\mathbf{A_T}| = -6 \neq 0$, se sigue que los renglones y columnas de $\mathbf{A_T}$ son linealmente independientes; por lo tanto una base para $\mathrm{Im}(T)$ es

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\},$$

o bien la base canónica. Luego,

$$\ker(T) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\};$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} \dim(\mathrm{Im}(T)) + \dim(\ker(T)) &= \dim(\mathbb{R}^3)\,, \\ 3 + 0 &= 3\,. \end{aligned}$$

(c) el polinomio característico está dado por $\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6$. Los valores y vectores característicos resultan

$$\lambda_1 = 1\,,\, v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}\,;\ \lambda_2 = -2\,,\, v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\,;\ \lambda_3 = 3\,,\, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(d) $\mathbf{A_T}$ es diagonalizable, pues tiene tres valores característicos distintos y es una matriz de 3×3. La transformación T es un isomorfismo, existen varias maneras de justificar esto, una es con $|A_T| \neq 0$, otra es con el teorema de la dimensión.

10. Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz real cuadrada de tamaño n. Decimos que $\mathbf{A}$ es diagonalizable si existe una matriz no singular $\mathbf{P}$ tal que $\mathbf{P^{-1}AP} = \mathbf{D}$, en donde $\mathbf{D}$ es una matriz diagonal. Conteste cierto o falso a los siguientes incisos, en caso de contestar cierto provea una demostración, en caso de contestar falso provea un contraejemplo.

(a) Si $\mathbf{D_1}$ y $\mathbf{D_2}$ son cualesquier matrices diagonales de tamaño n, entonces conmutan.

(b) Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos matrices cuadradas las cuales conmutan, entonces si $\mathbf{A}$ es diagonalizable, $\mathbf{B}$ también es diagonalizable.

(c) Sean $\mathbf{A_1}$ y $\mathbf{A_2}$ dos matrices simultáneamente diagonalizables (es decir, son diagonalizables por la misma matriz $\mathbf{P}$), entonces conmutan.

Sol.:
(a) Cierto. Tenemos que $(\mathbf{D_1})_{ij} = d_{ij;1}\delta_{ij}$ en donde $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$ e igual a uno si $i = j$ (símbolo de Kronecker); similarmente para $\mathbf{D_2}$. Entonces

$$(\mathbf{D_1 D_2})_{ij} = d_{ii;1} e_i^t e_j d_{jj;2} = d_{ii;1} d_{jj;2} \delta_{ij} \,, \tag{9}$$

en donde e_i (e_j) es el i-ésimo (j-ésimo) vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$. (9) muestra que el producto de dos matrices diagonales es una matriz diagonal. En particular $\mathbf{D_2 D_1}$ es una matriz diagonal y sus elementos sobre la diagonal principal son $d_{ii;2} d_{ii;1}$, los cuales, por (9), coinciden con los de $\mathbf{D_1 D_2}$ (incluyendo su orden sobre la diagonal). Entonces $\mathbf{D_1 D_2} = \mathbf{D_2 D_1}$.

(b) Falso. Sean

$$A = \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} , \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

$\mathbf{A}$ es diagonalizable (por sí misma), $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ pero $\mathbf{B}$ no es diagonalizable[1].

(c) Cierto. Por hipótesis $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A_1 P} = \mathbf{D_1}$ y $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A_2 P} = \mathbf{D_2}$. Por (a), $\mathbf{D_1 D_2} = \mathbf{D_2 D_1}$, entonces la siguiente serie de igualdades se cumplen,

$$\begin{aligned} \mathbf{D_1 D_2} &= \mathbf{D_2 D_1} \\ \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A_1 P P}^{-1}\mathbf{A_2 P} &= \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A_2 P P}^{-1}\mathbf{A_1 P} \\ \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A_1 A_2 P} &= \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A_2 A_1 P} \\ \mathbf{P}\left(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A_1 A_2 P}\right)\mathbf{P}^{-1} &= \mathbf{P}\left(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A_2 A_1 P}\right)\mathbf{P}^{-1} \\ \mathbf{A_1 A_2} &= \mathbf{A_2 A_1} \,. \end{aligned}$$

11. Sea $\mathbf{A}$ una matriz real de tamaño $m \times n$, es decir, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

(a) Cómo se define el rango de $\mathbf{A}$, $r(\mathbf{A})$?

(b) Demuestre que si $r(\mathbf{A}) = n$ entonces las columnas de $\mathbf{A}$ son linealmente independientes.

(c) Demuestre que si $r(\mathbf{A}) = n$ entonces $\mathbf{A^t A}$ es invertible.

(d) Sea $b \in \mathbb{R}^m$, demuestre que para cada $v \in C(\mathbf{A})$ existe un $x \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\|v - b\|^2 = x^t \mathbf{A^t A} x - 2x^t \mathbf{A} b + \|b\|^2 \,.$$

Sol.:
(a) Por definición, el rango de $\mathbf{A}$ es la dimensión de su espacio columna, $C(\mathbf{A}) := \{y \in \mathbb{R}^m : y = \mathbf{A}x \,,\ x \in \mathbb{R}^n\}$.

(b) Supongamos, por el contrario, que las columnas de $\mathbf{A}$ son linealmente dependientes. Esto significa que existe $x \in R^n$, $x \neq 0$, tal que $\mathbf{A}x = 0$. Si $\mathbf{A} = [A_1 \cdots A_n]$, $A_j \in \mathbb{R}^m$ la j-ésima columna de $\mathbf{A}$, y $x = [x_1 \ \cdots \ x_n]^t$, entonces $0 = A_1 x_1 + \cdots + A_n x_n$. Supongamos que $x_j \neq 0$, entonces $A_j = \frac{x_1}{x_j} A_1 + \cdots + \frac{x_{j-1}}{x_j} A_{j-1} + \frac{x_{j+1}}{x_j} A_{j+1} + \cdots + \frac{x_n}{x_j} A_n$. Como cualquier elemento en $C(\mathbf{A})$ es una combinación lineal de $A_1, \ldots, A_n$ y A_j puede expresarse como combinación lineal de las columnas restantes, se sigue que cualquier elemento de $C(\mathbf{A})$ es una combinación lineal de $A_1, \ldots A_{j-1}, A_{j+1}, \ldots, A_n$, pero entonces $r(\mathbf{A})$, la dimensión del espacio columna de $\mathbf{A}$ es, a lo más, $n - 1$, una contradicción.

(c) Observamos primero que $\mathbf{A^t A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Supongamos que $\mathbf{A^t A}$ no es invertible, entonces existe $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, tal que

$$\mathbf{A^t A} x = 0 \,,$$

[1] si además asumiéramos que $\mathbf{A}$ tiene n valores propios distintos, entonces el enunciado es cierto. ¿Puede demostrarlo?

en tal caso

$$0 = x^t 0 = x^t \mathbf{A^t} \mathbf{A} x \; = \; (x^t \mathbf{A^t})(\mathbf{A}x) = (\mathbf{A}x)^t (\mathbf{A}x) = \|\mathbf{A}x\|^2 \,,$$

en donde $\| \cdot \|$ denota la norma usual Euclidiana. Pero entonces (propiedades de la norma) $\mathbf{A}x = 0$, lo cual significa que existe una combinación lineal no trivial (porque supusimos que $x \neq 0$) de las columnas de $\mathbf{A}$ cuya suma es cero; esto es imposible pues $r(\mathbf{A}) = n$ significa (inciso (b)) que sus columnas son linealmente independientes.

(d) Como $v \in C(\mathbf{A})$ entonces existe $x \in C(\mathbf{A})$ tal que $v = \mathbf{A}x$, entonces

$$\begin{aligned} \|v - b\|^2 &= (v-b)^t (v-b) = v^t v - v^t b - b^t v + \|b\|^2 = v^t v - 2v^t b + \|b\|^2 \\ &= (\mathbf{A}x)^t (\mathbf{A}x) - 2(\mathbf{A}x)^t b + \|b\|^2 = x^t \mathbf{A^t} \mathbf{A} x - 2x^t \mathbf{A^t} b + \|b\|^2 \,. \end{aligned}$$

Centro de Investigación en Matemáticas · Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo. Mineral de la Reforma, HGO. México (2011).