Licenciatura en Matemáticas Aplicadas

Examen de Álgebra

Octubre 1 de 2018.

NOMBRE DEL ESTUDIANTE:____

`Resuelva los siguientes ejercicios justificando todas sus respuestas.`

1. Sea V el subespacio en $\mathbb{R}^4$ que consiste de todas las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones lineales homogéneas

$$\begin{aligned} 2x - y + 2z + w &= 0, \\ x + y + z - w &= 0, \\ 2x + 4z - w &= 0. \end{aligned}$$

Determinar una base para V.

2. Mostrar que si $a \neq b$, entonces

$$\det \begin{pmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{pmatrix} = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b},$$

donde la matriz es $n \times n$.

3. ¿Para qué valores de λ real es invertible la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix}?$$

4. Sea $T(x, y, z, w) = (x - y + 2z + 3w, y + 4z + 3w, x + 6z + 6w)$.

   a) Encuentre la representación matricial A de T con respecto a la base canónica.

   b) Determine los subespacios núcleo e imagen de T y encuentre sus dimensiones.

5. Dada la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (3x + y, x + 4y)$.

   a) Hallar $T([0, 1]^2)$.

   b) Hallar todos los vectores que bajo T preservan su dirección, aunque no necesariamente su magnitud.