Licenciatura en Matemáticas Aplicadas

Examen de Álgebra Lineal

21 de octubre de 2017

NOMBRE DEL ESTUDIANTE:______________________________

`Resuelve los siguientes ejercicios justificando todas tus respuestas.`

1. Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal. Si el núcleo de T es

$$\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \ : x_1 = 5x_2 \text{ y } x_3 = 7x_4\}$$

demuestra que T es suprayectiva.

2. Sea P_1 el espacio vectorial de polinomios reales de grado menor o igual a uno. Considera la transformación lineal $T : P_1 \to P_1$, definida como $T(p(x)) = p(x+1)$, y las bases $B = \{p_1, p_2\}$ y $B' = \{q_1, q_2\}$, donde $p_1(x) = 6 + 3x$, $p_2(x) = 10 + 2x$, $q_1(x) = 2$, $q_2(x) = 3 + 2x$.

   a) Proporciona la matriz A de T respecto a la base B.

   b) Encuentra la matriz de transición P de la base B a la base B'.

   c) Empleando las matrices A y P anteriores, calcula la matriz de T relativa a la base B'.

3. Sea P_2 el espacio vectorial de todos los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que dos. Un producto interno en este espacio está dado por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx$$

Encuentra un polinomio $q \in P_2$ tal que

$$p(1/2) = \langle p, q \rangle \,,$$

para cada $p \in P_2$.

4. Sea T un operador lineal y sea $\mu_T(\lambda) = \lambda^2 + 2$ su polinomio mínimo. Calcula T^{10}.

5. Si A y B son dos matrices no singulares $n \times n$, demuestra que AB y BA tienen los mismos valores propios.