Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
Licenciatura en Matemáticas Aplicadas

Examen de Cálculo y Álgebra Lineal (ECAL)

26 de julio de 2013

Nombre del alumno: ______________________________

Resuelva los problemas siguientes justificando todas sus respuestas

Cálculo

1. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $A_n = [a_n, b_n]$ un intervalo en $\mathbb{R}$. Supongamos que se cumple lo siguiente: (i) $b_n - a_n = n$, (ii) $A_n \cap A_m = \emptyset$ si $n \neq m$. Sea $X = \bigcup_{n \geq 1} A_n$ y defina $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n^3}, & \text{si } x \in A_n; \\ 0, & \text{si } x \notin X. \end{cases}$$

Demuestre que la integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$ es finita.

2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciable en cero y suponga que $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$. Hallar

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \left(f(x) + f\left(\frac{x}{2}\right) + \cdots + f\left(\frac{x}{k}\right) \right), \quad k \in \mathbb{N}.$$

3. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función con derivada continua y sean $a < c < d < b$. Demuestre que existe una constante M tal que para toda $x \in (c, d)$,

$$\frac{|f(x) - f(c)|}{x - c} \leq M.$$

4. Considerando el cambio de variable $u = x - \pi$, mostrar que

$$\int_0^{\pi} x e^{\sin(x)}\, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} e^{\sin(x)}\, dx.$$

5. Sea $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ continua. Definimos $F : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ por

$$F(u, v) = \int_c^v \left(\int_a^u f(x, y)\, dx \right) dy.$$

Demostrar que F es diferenciable en $(a, b) \times (c, d)$, que las parciales mixtas existen, y que $\partial_{1,2} F(u, v) = \partial_{2,1} F(u, v) = f(u, v)$ para todo $(u, v) \in (a, b) \times (c, d)$.

6. Hallar

$$\iint_{[0,1]\times[0,1]} \max\{x_1, x_2\}\, dx_1 dx_2.$$

Álgebra lineal

7. Sea A una matriz $n \times n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $B = A - \lambda I$ es no singular. Suponga que $\mathcal{B} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ es una base de vectores propios de A. Demuestre que $\mathcal{B}$ es también una base de vectores propios de B^{-1}. Demuestre el recíproco, es decir, si $\mathcal{B}_1$ es una base de vectores propios de B^{-1}, entonces $\mathcal{B}_1$ es una base de vectores propios de A.

8. Suponga que el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ tiene soluciones $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \ldots, \boldsymbol{\eta}_n$. Mostrar que $\lambda_1\boldsymbol{\eta}_1 + \lambda_2\boldsymbol{\eta}_2 + \ldots + \lambda_n\boldsymbol{\eta}_n$ es solución del sistema dado si, y sólo si, $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$.

9. Determinar los valores de α de manera que el sistema de ecuaciones lineales representado por la matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{rcr|c} \alpha & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1-\alpha & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right],$$

tenga solución única, una infinidad de soluciones, o ninguna.

10. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 15 & -4 \end{bmatrix}.$$

Calcular A^{2013}.