EXAMEN DE CÁLCULO Y ÁLGEBRA LINEAL
JULIO 2011

Instrucciones
Escriba su nombre en la esquina superior derecha de esta página. Escriba todas sus respuestas en las hojas que se le proporcionaron, *no escriba sobre estas páginas*, y entregue estas hojas con sus respuestas.

1. Problemas de Cálculo

1.
(a) Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $F(x) = \int_1^{g(x)} \sqrt{2 + \ln(t)}\, dt$, en donde g es una función derivable. ¿Es F derivable? Justifique su respuesta y en caso de que ésta sea afirmativa, calcule la derivada de F.

(b) Calcule la derivada de la función

$$F(x) = \int_1^{\int_0^x e^{2t}\, dt} \sqrt{2 + \ln(t)}\, dt\,.$$

2. Demuestre que la función $f(x) = x^3 - 3x + k$ (k una constante) no puede tener más de una raíz en el intervalo $[-1, 1]$ cualquiera que sea el valor de k.

3. Si f y g son funciones crecientes, ¿lo son también las siguientes funciones? Justifique sus respuestas.
(a) $f + g$.
(b) fg.
(c) $f \circ g$.

4.
(a) Enuncie el criterio de convergencia de Cauchy para sucesiones de números reales.

(b) Considere la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ en donde

$$a_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\,.$$

Demuestre que la sucesión diverge.

(c) Demuestre que para cualquier entero positivo p

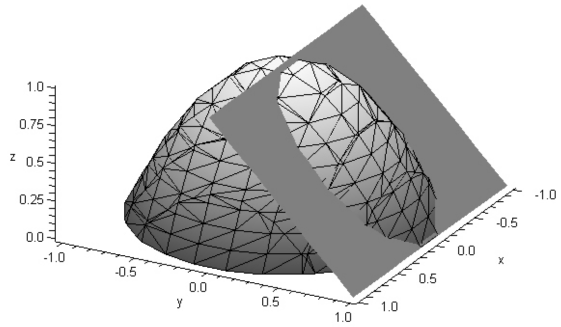
$$0 \leq a_{n+p} - a_n \leq \frac{p}{n+1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Explique por qué este resultado no contradice el criterio de convergencia de Cauchy.

5. Encuentre los puntos sobre la superficie $x^2 + 2y^2 - z^2 = 1$ más próximos al origen.

6. Calcule el volumen de la región sólida R acotada superiormente por el paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ e inferiormente por el plano $z = 1 - y$. (cf. figura.)

Date: 25 de julio del 2011.



7. Considere el campo vectorial

$$\Phi = \begin{bmatrix} z^3 + 2xy \\ x^2 - zy^2 \\ 3xz^2 \end{bmatrix}.$$

Calcule el flujo F del rotacional de Φ a través del hemisferio sur H de la esfera unitaria con centro en el origen.

2. Problemas de Álgebra Lineal

8. Suponga que la siguiente es la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales,

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda & \lambda & 2 \\ 1 & \lambda & 2 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine los valores de λ de tal forma que el sistema:
(a) tenga solución única,
(b) tenga infinidad de soluciones,
(c) sea inconsistente.

9. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x, y, z) = \begin{pmatrix} x - y + 4z \\ 3x + 2y - z \\ 2x + y - z \end{pmatrix}.$$

(a) Encuentre la matriz $\mathbf{A_T}$ de esta transformación lineal.

(b) Encuentre una base para $\mathrm{Im}(T)$, una base para $\ker(T)$ y verifique el teorema de la dimensión.

(c) Encuentre los valores característicos (λ_i), los vectores característicos ($\mathbf{v}_i$) y los espacios característicos (E_{λ_i}) asociados con la matriz $\mathbf{A_T}$.

(d) ¿Es la matriz de la transformación, $\mathbf{A_T}$, diagonalizable? ¿Es la transformación T un isomorfismo?

10. Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz real cuadrada de tamaño n. Decimos que $\mathbf{A}$ es diagonalizable si existe una matriz no singular $\mathbf{P}$ tal que $\mathbf{P^{-1}AP} = \mathbf{D}$, en donde $\mathbf{D}$ es una matriz diagonal. Conteste cierto o falso a los siguientes incisos, en caso de contestar cierto provea una demostración, en caso de contestar falso provea un contraejemplo.

(a) Si $\mathbf{D_1}$ y $\mathbf{D_2}$ son cualesquier matrices diagonales de tamaño n, entonces conmutan.

(b) Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos matrices cuadradas las cuales conmutan, entonces si $\mathbf{A}$ es diagonalizable, $\mathbf{B}$ también es diagonalizable.

(c) Sean $\mathbf{A_1}$ y $\mathbf{A_2}$ dos matrices simultáneamente diagonalizables (es decir, son diagonalizables por la misma matriz $\mathbf{P}$), entonces conmutan.

11. Sea $\mathbf{A}$ una matriz real de tamaño $m \times n$, es decir, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

(a) Cómo se define el rango de $\mathbf{A}$, $r(\mathbf{A})$?

(b) Demuestre que si $r(\mathbf{A}) = n$ entonces las columnas de $\mathbf{A}$ son linealmente independientes.

(c) Demuestre que si $r(\mathbf{A}) = n$ entonces $\mathbf{A^t A}$ es invertible.

(d) Sea $b \in \mathbb{R}^m$, demuestre que para cada $v \in C(\mathbf{A})$ existe un $x \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\|v - b\|^2 = x^t \mathbf{A^t A} x - 2x^t \mathbf{A} b + \|b\|^2 .$$

Centro de Investigación en Matemáticas · Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo., Mineral de la Reforma, HGO. México (2011).