UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO
INSTITUTO DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA
EXAMEN DE CÁLCULO Y ÁLGEBRA LINEAL

Junio 28 de 2010

Solución del Examen de Cálculo y Álgebra Lineal

1. Demuestre que la función polinómica $p(x) = 2x^3 + 5x - 1$ tiene exactamente una raíz real.

   Solución:

   Por el teorema del valor medio, se puede afirmar que $p(x) = 2x^3 + 5x - 1$ tiene, al menos, una raíz real. Supongamos que $p(x)$ tiene dos raíces reales diferentes, de modo que $p(a) = p(b) = 0$, con $a < b$. Por el teorema de Rolle, sabemos que si $p(a) = p(b) = 0$, entonces $p'(x) = 0$ para algún $x \in (a, b)$. Puesto que $p'(x) = 6x^2 + 5 > 0 \quad \forall\ x$, por lo tanto, $p(x)$ no puede tener más de una raíz real.

2. Sea $x_1 = 1$ y $x_{n+1} = \sqrt{3 + 2x_n}$ para $n \in \mathbb{N}$. Asuma que $\{x_n\}$ converge y calcule

$$\lim_{n\to\infty} x_n.$$

   Solución:

   Dado que $\{x_n\}$ converge, existe L tal que para todo $\epsilon > 0$ existe N tal que $\forall n \in \mathbb{N}$ si $n > N$ entonces $|x_n - L| < \epsilon$. Entonces se sigue que

$$\{x_{n+1}\} = \{\sqrt{3 + 2x_n}\}$$

   y $L = \sqrt{3 + 2L}$. Por lo tanto,

$$L^2 - 2L - 3 = 0$$

   indica que $L = 3$.

3. Un cono de papel de diámetro superior igual a 8 centímetros y profundidad 6 centímetros está lleno de agua. El cono pierde agua por un orificio en la parte inferior a una razón de dos centímetros cúbicos por minuto. ¿A qué velocidad está bajando el nivel del agua en el instante en el cual tiene 3 centímetros de profundidad?

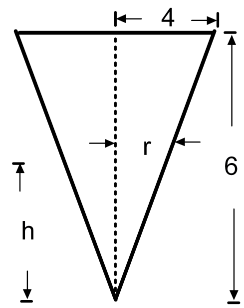
   Solución:

   Una vista lateral del cono se muestra en la siguiente figura

   donde h es el nivel del agua en cualquier momento, y $2r$ el diámetro correspondiente en el cono para dicho nivel del líquido.

   Por semejanza de triángulos, se sabe que $\dfrac{4}{6} = \dfrac{r}{h}$, y se puede escribir a r en términos de h:

$$r = \frac{4h}{6}.$$



Por otra parte, el volumen de un cono está dado por la relación

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}.$$

Al escribir el volumen únicamente como función del nivel del agua, se tiene

$$V = \frac{4\pi}{27} h^3.$$

Derivando implícitamente con respecto de t se obtiene

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{9}\pi h^2 \frac{dh}{dt}.$$

Como nos interesa conocer la rapidez con la que cambia el nivel del agua, solo tenemos que despejar

$$\frac{dh}{dt} = \frac{9}{4\pi h^2}\frac{dV}{dt}.$$

En el momento en que $h = 3$ y puesto que $\dfrac{dV}{dt} = -2$

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{1}{2\pi}.$$

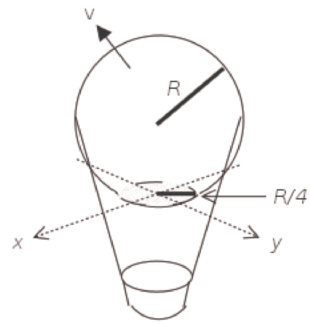
4. Suponga que un globo aerostático tiene una forma que se aproxima a la de una esfera truncada como se muestra en la figura, y que el gas caliente en el interior del globo escapa por la superficie porosa del mismo con el siguiente campo de velocidades,

$$v(x, y, z) = \nabla \times \Phi(x, y, z)$$

en donde $\Phi(x, y, z) = -y\hat{\imath} + x\hat{\jmath}$. Suponiendo que R = 5, calcule la razón de flujo del volumen del gas a través de la superficie.

Solución:

Usando el teorema de Stokes, el flujo F puede calcularse de la siguiente manera:



$$F = \iint_S v \cdot \hat{n}\, dS = \int_{\partial S} \Phi \cdot\, d\vec{r} \tag{1}$$

en donde S es la superficie del globo, $\hat{n}$ es la normal unitaria a la superficie el globo, $\vec{r} = (R/4)(\cos\theta\hat{\imath} + \sin\theta\hat{\jmath})$ es la parametrización de la frontera de la S, $-\pi \leq \theta < \pi$, entonces $d\vec{r} = (R/4)(-\sin\theta\hat{\imath} + \cos\theta\hat{\jmath})d\theta$. Substituyendo del lado derecho de (1),

$$F = \int_{-\pi}^{\pi} (-(R/4)\sin\theta\hat{\imath} + (R/4)\cos\theta\hat{\jmath}) \cdot (R/4)(-\sin\theta\hat{\imath} + \cos\theta\hat{\jmath})\, d\theta = \left(\frac{R}{4}\right)^2 \int_{-\pi}^{\pi} d\theta = \frac{\pi R^2}{8}.$$

5. Encuentre el volumen de la región acotada por el plano $x/a + y/b + z/c = 1$ y los planos coordenados, con $a, b, c > 0$.

   Solución:

$$V = \int_0^a \int_0^{\frac{-b}{a}(x-a)} \left(c - \frac{c}{a}x - \frac{c}{b}y\right)\, dydx\ = A + B + C.$$

$$A = \int_0^a \int_0^{\frac{-b}{a}(x-a)} c\, dydx = \int_0^a \frac{-bc}{a}(x-a)\, dx = \frac{-bc}{2a}(x-a)^2 \Big|_0^a = \frac{abc}{2}$$

$$B = \int_0^a \frac{bc}{a^2}x(x-a)\, dx = \frac{bc}{a^2}\left(\frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{2}\right) = \frac{-abc}{6}.$$

$$C = \int_0^a \frac{-c}{2b} \cdot \frac{b^2}{a^2}(x-a)^2\, dx = \frac{-cb}{2a^2} \cdot \frac{1}{3} \cdot (x-a)^3 \Big|_0^a = \frac{-abc}{6}$$

   Por lo tanto,

$$V = abc\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{abc}{6}.$$

6. Dado que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \sqrt{2\pi}$$

calcule

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-(ax^2+2bxy+cy^2)}dxdy$$

sabiendo que $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ es positiva definida.

Solución:

Como A es positiva definida entonces es posible re escribir a la forma cuadrática $F(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ como una suma de cuadrados, haciendo un cambio de variables adecuado. En este caso

$$F(x,y) = X^T AX = X'^T C^T ACX' = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2$$

donde λ_1, λ_2 son los valores propios de $\mathbf{A}$.

Luego entonces:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-(ax^2+2bxy+cy^2)}dxdy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-(\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2)}dx'dy'$$

Es fácil ver que el resultado buscado es

$$\frac{\pi}{\sqrt{\det(A)}}.$$

7. a) Enuncie la definición de matriz definida positiva.
   b) Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz definida positiva. Demuestre que existe una matriz $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, definida positiva, tal que $\mathbf{A} = \mathbf{C}^2$. ¿Es la matriz $\mathbf{C}$ única?
   c) Ilustre el inciso anterior para la siguiente matriz,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

   es decir, encuentre una matriz $\mathbf{C}$ tal que $\mathbf{A} = \mathbf{C^2}$. $\mathbf{C}$ es la raíz cuadrada de $\mathbf{A}$.

Solución:

a) $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz positiva definida ($\mathbf{A} > 0$), si es simétrica ($\mathbf{A} = \mathbf{A^t}$) y si para cualquier vector no nulo $X \in \mathbb{R}^n$, $X \neq 0$, se tiene que $X^t\mathbf{A}X > 0$.

b) Dado que $\mathbf{A}$ es simétrica, entonces todos sus eigenvalores son reales, además, dado que $\mathbf{A} > 0$, entonces sus eigenvalores son también positivos. Por otra parte, el hecho de ser simétrica implica que $\mathbf{A}$ tiene un conjunto completo de eigenvectores ortogonales, es decir, $\mathbf{A}$ es diagonalizable mediante una transformación ortogonal, la cual representaremos por una matriz $\mathbf{Q}$; es decir, $\mathbf{Q^tQ} = \mathbf{I_n}$ (matriz identidad de tamaño n) y

$$\mathbf{AQ} = \mathbf{QD} \tag{2}$$

en donde $\mathbf{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ es una matriz diagonal de tamaño n cuyos elementos diagonales son los eigenvalores de $\mathbf{A}$. Las columnas de $\mathbf{Q}$ son los eigenvectores de $\mathbf{A}$. $\mathbf{Q}$ es única módulo una permutación de sus columnas.

Ahora defina $\sqrt{\mathbf{D}} := \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}\,, \, \ldots \, , \, \sqrt{\lambda_n})$, note que $\sqrt{\mathbf{D}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ya que los eigenvalores de $\mathbf{A}$ son positivos. Entonces (2) puede descomponerse de la siguiente manera,

$$\mathbf{AQ} = \mathbf{Q}\sqrt{\mathbf{D}}\sqrt{\mathbf{D}}. \tag{3}$$

Dado que $\mathbf{Q}$ está formada por un base de vectores, es invertible, es decir, existe una única matriz $\mathbf{Q^{-1}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, llamada matriz inversa de $\mathbf{Q}$, tal que $\mathbf{QQ^{-1}} = \mathbf{Q^{-1}Q} = \mathbf{I_n}$. Sabemos que $\mathbf{Q^tQ} = \mathbf{I_n}$, entonces $\mathbf{Q^t} = \mathbf{Q^{-1}}$. Multiplicando entonces (3) por la derecha por $\mathbf{Q}^t$ llegamos a que

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\sqrt{\mathbf{D}}\sqrt{\mathbf{D}}\mathbf{Q^t}. \tag{4}$$

Dado que $\mathbf{Q^tQ} = \mathbf{I_n}$, podemos insertar este término en el medio del lado derecho de (4) sin violar la igualdad,

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\sqrt{\mathbf{D}}\mathbf{Q^tQ}\sqrt{\mathbf{D}}\mathbf{Q^t}. \tag{5}$$

Asociando el producto del lado derecho de (5) se llega a que

$$\mathbf{A} = (\mathbf{Q}\sqrt{\mathbf{D}}\mathbf{Q^t})(\mathbf{Q}\sqrt{\mathbf{D}}\mathbf{Q^t}).$$

La matriz $\mathbf{C} = \mathbf{Q}\sqrt{\mathbf{D}}\mathbf{Q^t}$ es tal que $\mathbf{A} = \mathbf{C^2}$. Observe que $\mathbf{C^t} = (\mathbf{Q}\sqrt{\mathbf{D}}\mathbf{Q^t})^t = (\mathbf{Q^t})^t(\sqrt{\mathbf{D}})^t(\mathbf{Q})^t = \mathbf{Q}\sqrt{\mathbf{D}}\mathbf{Q^t} = \mathbf{C}$; es decir, $\mathbf{C}$ es simétrica.
Ahora,

$$X^t\mathbf{C}X = X^t\mathbf{Q}\sqrt{\mathbf{D}}\mathbf{Q^t}X = X^t\mathbf{Q}\mathbf{D}^{\frac{1}{4}}\mathbf{D}^{\frac{1}{4}}\mathbf{Q^t}X = (\mathbf{D}^{\frac{1}{4}}\mathbf{Q^t}X)^t(\mathbf{D}^{\frac{1}{4}}\mathbf{Q^t}X) = \|\mathbf{D}^{\frac{1}{4}}\mathbf{Q^t}X\|^2 \geq 0.$$

Supongamos que $X^t\mathbf{C}X = 0$, es decir que $\mathbf{D}^{\frac{1}{4}}\mathbf{Q^t}X = 0$. Como $\mathbf{D}^{\frac{1}{4}}$ y $\mathbf{Q^t}$ son invertibles, se sigue que $\mathbf{D}^{\frac{1}{4}}\mathbf{Q^t}X = 0$ si y sólo si $X = 0$, lo cual demuestra que $\mathbf{C} > 0$ (positiva definida).

c) $p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I_2}) = (5-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 10\lambda + 24 = (\lambda-6)(\lambda-4)$, $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 4$ son los eigenvalores de $\mathbf{A}$. Calculemos ahora eigenvectores para estos eigenvalores,

$$(\mathbf{A} - 6\mathbf{I_2})\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a = b.$$

Sea $X = [1 \;\; 1]^t$, entonces $q_1 = X/\|X\| = [1/\sqrt{2} \;\; 1/\sqrt{2}]^t$ es un eigenvector unitario de $\mathbf{A}$ con eigenvalor λ_1. Como $\mathbf{A}$ es simétrica, $q_2 = [-1/\sqrt{2} \;\; 1/\sqrt{2}]^t \perp q_1$, es otro eigenvector de $\mathbf{A}$, asociado con $\lambda_2 = 4$. Sea $\mathbf{Q} = [q_1 \;\; q_2] \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, entonces $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\text{diag}(6,4)\mathbf{Q^t}$, y por (5), $\mathbf{A} = \mathbf{C^2}$ en donde

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Verificando,

$$\mathbf{C^2} = (\mathbf{Q}\sqrt{\mathbf{D}}\mathbf{Q^t})(\mathbf{Q}\sqrt{\mathbf{D}}\mathbf{Q^t}) = \mathbf{Q}(\sqrt{\mathbf{D}})^{\mathbf{2}}\mathbf{Q^t}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \mathbf{A}.$$

8. Suponga que $\mathbf{A}$ es una matriz cuadrada y que el espacio nulo de la matriz $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ tiene rango igual a uno, con $\mathbf{I}$ la matriz identidad y λ un escalar.

   a) Demuestre que λ es un eigenvalor de $\mathbf{A}$.

   b) Suponga que $\mathbf{BA} = \mathbf{AB}$, es decir, $\mathbf{B}$ es una matriz cuadrada que conmuta con $\mathbf{A}$. Demuestre que si v es un eigenvector de $\mathbf{A}$ con eigenvalor λ, entonces v también es un eigenvector de $\mathbf{B}$.

   Solución:

   a) Como el espacio nulo de $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ tiene rango uno (es decir, dimensión igual a uno), existe un vector $X \neq 0$ tal que $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})X = 0$. Lo anterior equivale a que las columnas de la matriz $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ sean linealmente dependientes, es decir, esta matriz es singular lo cual, a su vez, equivale a que $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$. Por otra parte, el polinomio caracterštico de $\mathbf{A}$, se define como $p(r) = \det(\mathbf{A} - r\mathbf{I})$, entonces, por lo anterior, la hipótesis de este inciso implica que $p(\lambda) = 0$, es decir, λ es un cero del polinomio característico de $\mathbf{A}$; por definición, esto significa que λ es un eigenvalor de $\mathbf{A}$.

   b) Si v es un eigenvector de $\mathbf{A}$ con eigenvalor λ, entonces $\mathbf{A}v = \lambda v$. Multiplicando por la izquierda por $\mathbf{B}$ en ambos lados de la ecuación anterior, se obtiene que $\mathbf{BA}v = \lambda\mathbf{B}v$. Ahora, como por hipótesis $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, tenemos entonces que $\mathbf{BA}v = \mathbf{AB}v = \lambda\mathbf{B}v$; asociando términos en ambos lados de la última igualdad llegamos a que $\mathbf{A}(\mathbf{B}v) = \lambda(\mathbf{B}v)$, esta ecuación implica que $w = \mathbf{B}v$ también es un eigenvector de $\mathbf{A}$ con eigenvalor λ. Por hipótesis el espacio nulo de $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ tiene dimensión (rango) igual a uno, esto quiere decir que todos los vectores X que satisfagan que $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})X = 0$ son colineales, en particular, v y $\mathbf{B}v$ son colineales, es decir, existe un escalar μ tal que $\mathbf{B}v = \mu v$, entonces v también es un eigenvector de $\mathbf{B}$.

9. Sean

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad X = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

   a) Calcule

$$\lim_{k \to \infty} \|\mathbf{A}^k X\|.$$

b) Calcule $e^{\mathbf{A}t}$, en donde t es un número real.

c) Resuelva el siguiente problema de valores iniciales,

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \frac{x_1}{2}\\ \dot{x}_2 &= -x_1 + x_2\end{aligned}$$

$$x_1(0) = -2, \quad x_2(0) = 3.$$

Solución:

a) $\mathbf{A}$ es triangular superior, por lo tanto sus eigenvalores se encuentran sobre la diagonal principal y son $\lambda_1 = 1/2$ y $\lambda_2 = 1$. Sabemos que eigenvectores correspondientes a eigenvalores distintos son linealmente independientes, entonces, como $\mathbf{A}$ es una matriz de 2×2, existe una base para $\mathbb{R}^2$ formada por los eigenvectores de $\mathbf{A}$; sea esta base $\beta = \{v_1, v_2\}$, en donde $\mathbf{A}v_1 = \lambda_1 v_1$ y $\mathbf{A}v_2 = \lambda_2 v_2$. Se tienen entonces escalares c_1 y c_2 tales que $X = c_1 v_1 + c_2 v_2$, en donde $X = [-3 \;\; 2]^t$; por lo tanto,

$$\|\mathbf{A^k}X\| = \|\mathbf{A^k}(c_1 v_1 + c_2 v_2)\| = \|c_1(1/2)^k v_1 + c_2 1^k v_2\| = \|c_1(1/2)^k v_1 + c_2 v_2\|.$$

Por continuidad de la norma,

$$\lim_{k\to\infty} \|\mathbf{A^k}X\| = \|c_1(\lim_{k\to\infty}(1/2)^k)v_1 + c_2 v_2\| = \|c_2 v_2\|.$$

Por simple inspección, es claro que $v_2 = [0 \;\; 1]^t$ es un eigenvector de $\mathbf{A}$ con eigenvalor 1, calculemos el otro eigenvector:

$$\left(\mathbf{A} - \frac{1}{2}\mathbf{I}\right) v_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow a = b/2 \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Las coordenadas de X en la base β son entonces,

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 8 \end{array}\right) \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \underbrace{(-3)}_{=c_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \underbrace{8}_{=c_2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{k\to\infty} \|\mathbf{A^k}X\| = \|c_2 v_2\| = |c_2|\|v_2\| = 8 \cdot 1 = 8\,.$$

b) La base β diagonaliza $\mathbf{A}$, es decir $\mathbf{A} = \mathbf{VDV^{-1}}$, en donde $\mathbf{V} = [v_1 \;\; v_2] \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Entonces

$$e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{VDV^{-1}}t} = \mathbf{V}e^{\mathbf{D}t}\mathbf{V^{-1}} = \mathbf{V}\mathrm{diag}(e^{t/2}, e^t)\mathbf{V^{-1}}. \tag{6}$$

Substituyendo v_1 y v_2 obtenidos arriba en (6) obtenemos

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 2e^{t/2} & e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 2(e^{t/2} - e^t) & e^t \end{bmatrix}.$$

c) El problema de valores iniciales (pvi) puede escribirse en forma matricial compacta como

$$\dot{X} = \mathbf{A}X\,, \quad X(0) = X_0,$$

en donde $\mathbf{A}$ es la matriz de inciso (a), $X = X(t) = [x_1(t) \quad x_2(t)]^t$ y $X_0 = [-3 \quad 2]^t$. La solución al pvi es $X(t) = e^{\mathbf{A}t}X_0$; la matriz exponencial ya fué calculada en el inciso anterior, así que,

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 2(e^{t/2} - e^t) & e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3e^{t/2} \\ -6(e^{t/2} - e^t) + 2e^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3e^{t/2} \\ -6e^{t/2} + 8e^t \end{bmatrix}.$$

10. Considere la siguiente matriz,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & -3 & 1 \\ -6 & 3 & 0 & -6 \end{bmatrix}.$$

a) Demuestre que si $b = [-8 \ -3 \ 1]^t$, entonces el sistema $\mathbf{A}X = b$ es inconsistente.

b) Encuentre una base ortonormal para el espacio columna de $\mathbf{A}$.

c) Encuentre un vector b' en el espacio columna de $\mathbf{A}$, tal que la norma $\|b-b'\|$ sea mínima. Explique por qué el vector b' que encontró satisface la propiedad de ser el más cercano a b en el espacio columna de $\mathbf{A}$.

Solución:

a) Reduciendo a su forma escalonada la matriz aumentada del sistema, $(\mathbf{A}|b)$, obtenemos

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} -2 & 1 & 1 & -1 & -8 \\ 4 & -2 & -3 & 1 & -3 \\ -6 & 3 & 0 & -6 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} -2 & 1 & 1 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -19 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 25 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} -2 & 1 & 1 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 82 \end{array}\right) = (\mathbf{U}|h).$$

La última ecuación del sistema reducido es $0 = 82$, lo cual es falso, por lo tanto el sistema $AX = b$ es inconsistente.

b) De la forma escalonada de $\mathbf{A}$, $\mathbf{U}$, vemos que la primera (A_1) y la tercera (A_3) columnas de $\mathbf{A}$ son una base para el espacio columna; ortonormalizando estas columnas, es decir, aplicando el algoritmo de Gram-Schmidt, obtendremos una base ortonormal para el espacio columna de $\mathbf{A}$.

$$q_1 = A_1/\|A_1\| = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$\tilde{q}_2 = (\mathbf{I} - q_1 q_1^t) A_3 = \frac{1}{14}\left[\begin{pmatrix} 14 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 13 & 2 & -3 \\ 2 & 10 & 6 \\ -3 & 6 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} -7 \\ -28 \\ -21 \end{pmatrix} = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$q_2 = \tilde{q}_2 / \|\tilde{q}_2\| = \frac{1}{\sqrt{26}}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$\beta = \{q_1\ ,\ q_2\}$ es una base ortonormal para el espacio columna de $\mathbf{A}$.

c) Sea $b' = (q_1 q_1^t + q_2 q_2^t) b$, es decir, b' es la proyección ortogonal de b sobre el espacio columna de $\mathbf{A}$, $R(\mathbf{A})$, entonces $b - b'$ es perpendicular a todo vector en $R(\mathbf{A})$. Sea ahora $\tilde{b} \in R(\mathbf{A})$, entonces,

$$\|b-\tilde{b}\|^2 = \|b-b'+b'-\tilde{b}\|^2 = \|b-b'\|^2 + \|b'-\tilde{b}\|^2 + 2(b-b')^t(b'-\tilde{b}) = \|b-b'\|^2 + \|b'-\tilde{b}\|^2$$

(la última igualdad se sigue de la perpendicularidad entre $(b - b')$ y $R(A)$, señalada anteriormente, ya que $(b' - \tilde{b}) \in R(\mathbf{A})$), lo cual demuestra que $\|b - \tilde{b}\| \geq \|b - b'\|$; es decir, b', como se definió arriba, es el vector más próximo a b en $R(\mathbf{A})$. Ahora calculamos b' explícitamente,

$$b' = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}(-8+6+3) + \frac{1}{26}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}(8-12+3) = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{26}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}(-1)$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 7 \cdot 13}\begin{pmatrix} 13+7 \\ -26-28 \\ 39-21 \end{pmatrix} = \frac{1}{2 \cdot 7 \cdot 13}\begin{pmatrix} 20 \\ -54 \\ 18 \end{pmatrix} = \frac{1}{91}\begin{pmatrix} 10 \\ -27 \\ 9 \end{pmatrix}.$$