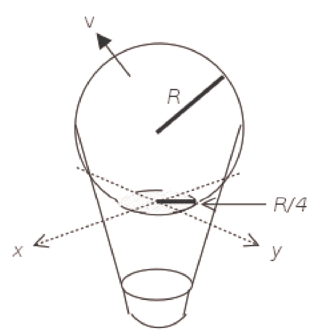
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO
INSTITUTO DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA
EXAMEN DE CÁLCULO Y ÁLGEBRA LINEAL

Junio 28 de 2010

`Nombre del alumno:`

`Escriba de manera clara y ordenada sus respuestas.`

1. Demuestre que la función polinómica $p(x) = 2x^3 + 5x - 1$ tiene exactamente una raíz real.
2. Sea $x_1 = 1$ y $x_{n+1} = \sqrt{3 + 2x_n}$ para $n \in \mathbb{N}$. Asuma que $\{x_n\}$ converge y calcule
$$\lim_{n\to\infty} x_n.$$
3. Un cono de papel de diámetro superior igual a 8 centímetros y profundidad 6 centímetros está lleno de agua. El cono pierde agua por un orificio en la parte inferior a una razón de dos centímetros cúbicos por minuto. ¿A qué velocidad está bajando el nivel del agua en el instante en el cual tiene 3 centímetros de profundidad?
4. Suponga que un globo aerostático tiene una forma que se aproxima a la de una esfera truncada como se muestra en la figura, y que el gas caliente en el interior del globo escapa por la superficie porosa del mismo con el siguiente campo de velocidades,
$$v(x, y, z) = \nabla \times \Phi(x, y, z)$$
en donde $\Phi(x, y, z) = -y\hat{\imath} + x\hat{\jmath}$. Suponiendo que $\mathrm{R} = 5$, calcule la razón de flujo del volumen del gas a través de la superficie.



5. Encuentre el volumen de la región acotada por el plano $x/a + y/b + z/c = 1$ y los planos coordenados, con $a, b, c > 0$.
6. Dado que
$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \sqrt{2\pi}$$
calcule
$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-(ax^2+2bxy+cy^2)} dxdy$$
sabiendo que $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ es positiva definida.

7. a) Enuncie la definición de matriz definida positiva.
   b) Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz definida positiva. Demuestre que existe una matriz $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, definida positiva, tal que $\mathbf{A} = \mathbf{C}^2$. ¿Es la matriz $\mathbf{C}$ única?
   c) Ilustre el inciso anterior para la siguiente matriz,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

   es decir, encuentre una matriz $\mathbf{C}$ tal que $\mathbf{A} = \mathbf{C^2}$. $\mathbf{C}$ es la raíz cuadrada de $\mathbf{A}$.

8. Suponga que $\mathbf{A}$ es una matriz cuadrada y que el espacio nulo de la matriz $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ tiene rango igual a uno, con $\mathbf{I}$ la matriz identidad y λ un escalar.
   a) Demuestre que λ es un eigenvalor de $\mathbf{A}$.
   b) Suponga que $\mathbf{BA} = \mathbf{AB}$, es decir, $\mathbf{B}$ es una matriz cuadrada que conmuta con $\mathbf{A}$. Demuestre que si v es un eigenvector de $\mathbf{A}$ con eigenvalor λ, entonces v también es un eigenvector de $\mathbf{B}$.

9. Sean

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad X = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

   a) Calcule

$$\lim_{k\to\infty} \|\mathbf{A}^k X\|.$$

   b) Calcule $e^{\mathbf{A}t}$, en donde t es un número real.
   c) Resuelva el siguiente problema de valores iniciales,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{x_1}{2} \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + x_2 \end{aligned}$$
$$x_1(0) = -2, \quad x_2(0) = 3.$$

10. Considere la siguiente matriz,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & -3 & 1 \\ -6 & 3 & 0 & -6 \end{bmatrix}.$$

   a) Demuestre que si $b = [-8 \ -3 \ 1]^t$, entonces el sistema $\mathbf{A}X = b$ es inconsistente.
   b) Encuentre una base ortonormal para el espacio columna de $\mathbf{A}$.
   c) Encuentre un vector b' en el espacio columna de $\mathbf{A}$, tal que la norma $\|b - b'\|$ sea mínima. Explique por qué el vector b' que encontró satisface la propiedad de ser el más cercano a b en el espacio columna de $\mathbf{A}$.