Licenciatura en Matemáticas Aplicadas
Examen de Cálculo y Álgebra Lineal

Julio 31 de 2009

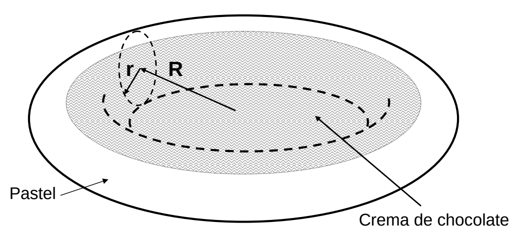
NOMBRE DEL ESTUDIANTE: ______________________________

`Resuelva cada ejercicio justificando todas sus respuestas.`

1. Encuentre el
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!}.$$

2. Calcule $F'(x)$, si
$$F(x) = \int_0^{\int_0^{x^2} \frac{x}{1+\operatorname{sen}^2 t}dt} \frac{x}{1+\operatorname{sen}^2 t}dt.$$

3. Para el convivio de fin de cursos, los alumnos de quinto semestre van a preparar un pastel de vainilla en forma de toro (dona) de radios R = 8 cm y r = 3 cm (ver figura). ¿Cuánta crema de chocolate se necesitará para llenar el hueco del centro del pastel?



4. Una bala de cañon se lanza desde el suelo con velocidad $\mathbf{v}_0$, formando un ángulo α con la horizontal. Hallar el ángulo α que hace máxima la distancia horizontal recorrida por la bala hasta alcanzar el suelo.

5. Calcule
$$\int_0^{\sqrt{2}} \int_y^{\sqrt{4-y^2}} \frac{1}{1+x^2+y^2}dxdy.$$

6. Sean $\mathcal{R}$ una región del plano cuya frontera $\mathcal{C}$ es una curva seccionalmente suave y $\mathbf{n}$ el vector normal a $\mathcal{C}$ que apunta al interior de $\mathcal{R}$. Demuestre que si u tiene segundas derivadas parciales continuas, entonces

$$\iint_{\mathcal{R}} \Delta u dA = -\int_{\mathcal{C}} \nabla_{\mathbf{n}} u ds,$$

donde $\nabla_{\mathbf{n}} u$ es la derivada de u en la dirección de $\mathbf{n}$.

7. Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial y $\{\mathcal{V}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de subespacios de $\mathcal{V}$, con I un conjunto de índices. Pruebe que $\bigcap\limits_{\alpha \in I} \mathcal{V}_\alpha$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{V}$.

8. Encuentre la forma canónica de Jordan de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Sea $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de matrices $n \times n$ con entradas en $\mathbb{R}$ y sea $T : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ dada por $T(A) = A^t$, donde A^t denota la transpuesta de A.

   a) Demuestre que T es una transformación lineal.

   b) Encuentre los valores y vectores propios de T.

10. El foco de una lámpara de bolsillo está en el punto $(1, 2, 3)$. El otro extremo de la lámpara se encuentra en $(3, 4, 6)$. La luz se refleja en un espejo que se encuentra sobre el plano $x + 3y + 3z = 0$ (ver la figura).

    a) Determine el punto P en el que la luz toca al espejo.

    b) Encuentre el punto en el que el rayo reflejado toca al plano $x + z = 4$.