

**Examen de Cálculo y Álgebra Lineal****Nombre completo del estudiante:** \_\_\_\_\_

RESUELVE LOS SIGUIENTES EJERCICIOS, JUSTIFICANDO TODAS TUS RESPUESTAS.

1. Calcula la derivada de la función  $f(x) = x^x$ .
2. Una función  $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  se llama *Lipschitz* si existe  $M > 0$  tal que

$$|f(y) - f(x)| \leq M|x - y|$$

para todos  $x, y \in D$ . Demuestra que si  $f(x)$  es  $C^1$  en  $D = [a, b]$  entonces  $f$  es Lipschitz. Además, da un ejemplo de una función  $C^1$  en un intervalo *abierto*  $(a, b)$  que no sea Lipschitz en  $(a, b)$ .

3. Encuentra los valores de  $C$  que hacen que la integral impropia converja:

$$\int_0^{\infty} \left( \frac{x}{x^2 + 1} - \frac{C}{x + 1} \right) dx.$$

4. Encuentra un vector tangente a la curva que es la intersección del cono  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  con la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  en el punto  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ .
5. Encuentra el valor máximo y el valor mínimo de la función  $f(x, y) = x^2y$  cuando  $(x, y)$  es tal que  $x^2 + y^2 = 1$ .
6. Calcula el volumen del objeto en  $\mathbb{R}^3$  que es la unión de  $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1, -5 \leq z \leq 5\}$  con  $\{(x, y, z) \mid x^2 + z^2 \leq 1, -5 \leq y \leq 5\}$ .
7. Encuentra una matrix  $3 \times 3$  que tenga como polinomio mínimo a  $p(x) = x^2$ .
8. Diagonaliza la siguiente matrix:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

9. Sea  $A$  una matrix real  $n \times n$ , y supongamos que el polinomio mínimo de  $A$  tiene término constante igual a cero. Demuestra que  $A$  no es invertible.
10. Demuestra que si  $A$  es una matrix  $m \times n$ , se tiene que el rango de  $A$  es igual al rango de su transpuesta.