LIMA de la UAEH 27 de julio de 2007

Examen de Cálculo y Álgebra Lineal

Nombre completo del estudiante: ______________________________

Resuelva los siguientes ejercicios, justificando todas sus respuestas.

1. Sea A una matriz $m \times n$. Demuestre que:

   a) Si B es una matriz que se obtiene de A aplicando una operación elemental por renglones, entonces A y B tienen el mismo espacio de renglones.

   b) Si R es la forma escalonada reducida de A, entonces A y R tienen el mismo espacio de renglones.

2. ¿Cuáles son todas las posibles formas canónicas de Jordan para matrices 3×3?

3. Sea A una matriz cuadrada y sea $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + x^n$ un polinomio tal que $p(A) = 0$. Demuestre que si $a_0 \neq 0$ entonces A es invertible.

4. Sea J_n la matrix $n \times n$ cuyas entradas son todas iguales a 1. Demuestre que el polinomio característico es $x^{n-1}(x - n)$.

5. Sean $a < b$ números reales. ¿Existe una función no constante $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ que sea continua en el cerrado $[a, b]$, diferenciable en el abierto (a, b) y que satisfaga:

   a) $f(a) = f(b) = 0$.

   b) Siempre que $f'(x) = 0$ en alguna $x \in (a, b)$ también $f(x) = 0$?

6. Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continua y no negativa tal que $\int_0^1 f(x)dx = 0$. Demuestre que $f(x) = 0$ para todo $x \in [0, 1]$.

7. Sea f una función real de clase C^2. Suponga que

$$2 = \int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(x)\, dx + \int_0^{\pi} f''(x) \operatorname{sen}(x)\, dx.$$

   Demuestre que si $f(\pi) = 1$ entonces $f(0) = 1$.

8. Calcule la integral $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ justificando todos los pasos.

9. Sean $a, b, c > 0$ números reales. Calcule el volumen del elipsoide en $\mathbb{R}^3$ acotado por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

10. Sean (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\ldots$, (x_n, y_n) puntos en $\mathbb{R}^2$ que satisfaen $x_i \neq x_j$, si $i \neq j$. Encuentre la ecuación de la línea recta $y = mx + b$ tal que la suma

$$\sum_{i=1}^{n} |y_i - m x_i - b|^2$$

    sea mínima.