LIMA de la UAEH Julio 19 de 2006

Examen de Cálculo y Álgebra Lineal

Nombre del alumno: ______________________________

Resuelva los siguientes ejercicios, justificando todas sus respuestas.

1. Encuentre una base del espacio de las transformaciones lineales de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^4$.
2. Sea A una matriz de tamaño $n \times n$ y defina $B = A^2 - 2A + I$. Describa la región del plano complejo en donde deben estar los valores característicos de A para que los de B sean todos reales negativos.
3. Proporcione argumentos en pro o en contra de los siguientes enunciados.
   a) Hay sistemas de ecuaciones lineales con exactamente dos soluciones.
   b) Si la forma escalonada reducida de la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones es la identidad de tamaño 3×3, entonces el sistema tiene solución única.
   c) Si un sistema de ecuaciones lineales tiene solución única, entonces el número de ecuaciones es igual al número de incógnitas.
4. Determine la forma canónica de Jordan de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
5. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_m$ elementos de $\mathbb{R}^n$ linealmente independientes con entradas enteras. Demuestre que existen $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ en $\mathbb{R}^n$ tales que:
   a) Y_i es perpendicular a Y_j, si $i \neq j$.
   b) Cada Y_i tiene entradas enteras y $\mathcal{L}(\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_m\}) = \mathcal{L}(\{X_1, X_2, \ldots, X_m\})$.
6. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b) tal que $f(a) = f(b)$. Suponga adicionalmente que siempre que $f'(x) = 0$ implica $f(x) = 0$. Demuestre que f es constante.
7. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por $f(x) = (||x||^2, ||x||^2, \ldots, ||x||^2)$, si todas las coordenadas de x son racionales y $f(x) = (0, 0, \ldots, 0)$ en otro caso. Determine los puntos en donde f es diferenciable. ¿Es f continua cuando $x \neq 0$?
8. Sean $A = (a_{ij})$ una matriz real simétrica de tamaño $n \times n$ y X un vector (columna) en $\mathbb{R}^n$. ¿Cuáles son los valores máximo y mínimo de la función $X^t AX$, restringida a $||X||^2 = 1$?
9. Determine los valores de A de forma que
$$\int_C e^x \cos(y)dy - Ae^x \mathrm{sen}\,(y)dx$$
sea cero para cualquier curva suave cerrada C en el plano.
10. Sean $g(x, t) = \dfrac{x}{2\sqrt{kt}}$, con k una constante positiva y $f(x, t) = \int_0^{g(x,t)} e^{-u^2} du$. Demuestre que f satisface la ecuación de calor: $k\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial f}{\partial t}$.