Examen de Cálculo y Álgebra Lineal

Nombre completo del estudiante: ______________________________

Resuelve los siguientes ejercicios, justificando todas tus respuestas.

Problema 1. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal que satisface

$$\begin{aligned} T(1,0,2) &= (1,1,0), \qquad T(0,1,1) = (1,1,-1), \\ T(0,2,1) &= (1,1,1). \end{aligned}$$

Encuentra el núcleo y la imagen de T, así como la representación matricial de T con respecto a la base canónica.

Problema 2. Sea $f : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ una función continua tal que $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = 0$. Demuestra que f alcanza su valor máximo.

Problema 3. Se corta una cuña de un tronco cilíndrico de radio a mediante un plano que pasa por un diámetro de la base y que está inclinado un ángulo de 45^o. Hallar el volumen de la cuña.

Problema 4. Encuentra todas las transformaciones $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tales que $\|T(x,y)\| = \|(x,y)\|$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, en donde $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$.

Problema 5. Calcular la derivada de

$$f(x) = \int_x^{x^3} \frac{\cos(xt)}{\sqrt{1+t^3}}\, dt.$$

Problema 6. Sea A una matriz de $m \times n$. Demuestra que la dimensión del espacio lineal generado por las filas de A es igual a la dimensión del espacio lineal generado por las columnas de A.

Problema 7. Calcula el área de la figura delimitada por la curva dada en coordenadas polares por la ecuación $r = \operatorname{sen}(4\theta)$.

Problema 8. Encuentra la serie de Taylor alrededor de $x = 0$ de la función

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - x - 6}\ .$$

Problema 9. Sea A una matriz inversible dada. Prueba que existe $\delta > 0$ tal que si H es una matriz cuyas entradas (en valor absoluto) son todas menores que δ, entonces $A + H$ es inversible.

Problema 10. Sea S una superficie cerrada en $\mathbb{R}^3$ cuyo interior contiene al origen. Demuestra que si $\mathbf{r} = (x,y,z)$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ y $\mathbf{n}$ es el vector normal exterior a S, entonces

$$\int_S \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}{r^3}\, dS = 4\pi.$$