Examen de Cálculo y Álgebra Lineal

Nombre completo del estudiante: ____

Resuelva los siguientes ejercicios y presente sus soluciones justificando todas sus respuestas.

Problema 1. Un hombre que está a 3 metros de un farol proyecta una sombra de 4 metros de longitud. Si el hombre mide 1.7 metros y se aleja del farol a 5 km/h, ¿a qué velocidad se alarga su sombra?

Problema 2. Hugo viajó 8.5 kilómetros en 5 minutos y aseguró que nunca excedió los 100 km/h. Demuestre que Hugo mintió.

Problema 3. Demuestre que toda sucesión monótona y acotada de números reales es convergente.

Problema 4. En el espacio vectorial M de las transformaciones lineales de $\mathbb{C}^n$ en $\mathbb{C}^n$ se define $(A, B) = \operatorname{tr}(A^\star B)$. Demuestre que (A, B) es un producto interno y que para toda A y B en M se cumple

$$|\operatorname{tr}(A^\star B)|^2 \leq \operatorname{tr}(A^\star A)\operatorname{tr}(B^\star B).$$

Problema 5. Demuestre que el conjunto $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 0\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$; determine su dimensión y encuentre una base ortonormal del mismo.

Problema 6. Demuestre que si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una transformación lineal simétrica, entonces los eigenvectores correspondientes a eigenvalores distintos son ortogonales.

Problema 7. Determine los valores de α para los cuales converge la integral

$$\int_E \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^\alpha dx\, dy\,,$$

en donde $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq 1\}$.

Problema 8. Calcule la serie de Taylor alrededor de $x = 0$ de la función

$$f(x) \;=\; \frac{1}{16 + x^2},$$

y determine su radio de convergencia.

Problema 9. Dadas la matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

decida si existe una matriz invertible P tal que $A = PBP^{-1}$.

Problema 10. Determine las dimensiones de una caja rectangular de volumen V, sin tapa, que minimize la superficie.