LIMA de la UAEH 18 de enero de 2013

Examen de Cálculo y Álgebra Lineal

Nombre completo del estudiante: ______________________________

Resuelve los siguientes ejercicios, justificando todas tus respuestas.

1. Gráfica la función $f(x) = x\log(1 + x^{-1})$ en el intervalo $(0, \infty)$ dando todos los detalles: máximos y mínimos globales y locales, regiones donde la función es creciente y decreciente, concavidad, convexidad, comportamiento en los extremos del intervalo.

2. Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, definida por:
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{si } x = \frac{p}{q}, \text{ con } p \text{ y } q \text{ enteros primos relativos} \\ 0, & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$
Se define $F(x) := \int_0^x f(t)dt$. ¿Para cuáles valores de $x \in (0, 1)$ se cumple $F'(x) = f(x)$?

3. Encuentra
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n^2 + 1^2} + \frac{n}{n^2 + 2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n^2} \right).$$

4. Encuentra las distancias mínimas y máximas del origen a la curva
$$5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8.$$

5. Dibuja el sólido D que define la integral
$$\int_0^1 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan x} \int_0^{\csc^2 x} dzdydx$$
y evalúala.

6. ¿Existe una función de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1$ que sea inyectiva? Justifica tu respuesta.

7. Sean, V el espacio vectorial de las funciones continuas en el intervalo $[a, b]$ y $S = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\} \subseteq V$. Para cada $i = 1, 2, \ldots, n$ y para cada $j = 1, 2, \ldots, n$ se define $a_{ij} = \int_a^b f_i f_j$. Sea A la matriz que tiene por entradas a los elementos a_{ij}. Demuestra que $f_1, f_2, \ldots, f_n$ son linealmente dependientes si y sólo si A es singular.

8. Determina los valores de a de forma que el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} ax - y + z &= 0 \\ x + (1-a)y - z &= 1 \\ -x + y + z &= 2 \end{aligned}$$

satisfaga una de las condiciones: sea consistente, sea inconsistente, tenga solución única o tenga una infinidad de soluciones.

9. Sea A una matriz de tamaño $m \times n$.

   - Demuestra que $\ker A = \ker A^T A$.
   - Demuestra que el rango de A es igual al rango de $A^T A$.
   - Demuestra que si las columnas de A son linealmente independientes, entonces $A^T A$ es invertible.

10. Sea A la matriz 4×4 dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & -5 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Encuentra una matriz P invertible tal que $P^{-1}AP$ esté en su forma canónica de Jordan.