UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO
INSTITUTO DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA
EXAMEN DE CÁLCULO Y ÁLGEBRA LINEAL

Enero 7 de 2011

`Nombre del alumno:`

`Escriba de manera clara y ordenada sus respuestas.`

1. Demuestre que

$$\lim_{n\to 0}\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n+\ldots}}}}=1$$

2. Deduzca una fórmula de reducción para $\displaystyle\int \tan^n x\,dx, n\in\mathbb{N}$.

3.

(a) Demostrar que si f y g son funciones inyectivas entonces $f\circ g$ es también inyectiva, y hallar $(f\circ g)^{-1}$ en términos de f^{-1} y g^{-1}.

(b) Si f es una función biyectiva y $g(x)=1+f(x)$, hallar g^{-1} en términos de f^{-1}.

4. Considere el siguiente campo vectorial,

$$\mathsf{v}\;=\;\frac{-y}{x^2+y^2}\hat{\mathsf{i}}+\frac{x}{x^2+y^2}\hat{\mathsf{j}}\,.$$

(a) Encuentre una relación entre v y las derivadas primeras de la función $f(x,y)=\tan^{-1}(\frac{y}{x})$.
(b) Sea un campo vectorial $\mathsf{F}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ tal que $\mathsf{F}=\nabla f$ en donde $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ es una función continuamente diferenciable en un dominio $D\subseteq\mathbb{R}^2$. Sea C una curva cerrada suave en el interior de D. Calcule la siguiente integral de línea

$$\int_C \mathsf{F}\cdot d\mathsf{r}\,,$$

en donde $\mathsf{r}=x(s)\hat{\mathsf{i}}+y(s)\hat{\mathsf{j}}$, $s\in[a,b]$ $(a<b)$ es una parametrización de C tal que x y y son funciones suaves de s.
(c) Suponga que C es el círculo unitario centrado en el origen. Calcule la circulación alrededor de C del campo v del inciso (a) y explique cuidadosamente cómo su cálculo es compatible con su respuesta al inciso (b).

5. Considere el campo vectorial $\mathsf{F}=e^{\frac{x^2}{2}}\hat{\mathsf{i}}+\tan^{-1}(\frac{y}{x})\hat{\mathsf{j}}+\mathrm{sen}yz\hat{\mathsf{k}}$. Calcule el flujo del rotacional de F a través de la superficie de la bola unitaria.

6. La función de producción para un fabricante de software está dada por $f(x, y) = 100x^{3/4}y^{1/4}$, donde x representa las unidades de trabajo (\$150 por unidad) y y representa las unidades de capital (\$250 por unidad). El costo total de trabajo y capital está limitado a \$50,000.00. Hallar el nivel máximo de producción de este fabricante.

7. Determinar si el conjunto de vectores dado genera al espacio vectorial $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

8. Sea $\mathbf{A}$ una matriz real cuadrada simétrica de tamaño siete y sea $x = (x_1, \ldots, x_d)$ arbitrario. Considere el siguiente límite:

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{A}^k x \,. \tag{1}$$

(a) Suponga que $\mathbf{A}$ tiene eigenvalores $-1, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{-1}{4}$. Calcule el límite en (1) en términos de x o bien demuestre que este no existe.
(b) Suponga que $\mathbf{A}$ tiene eigenvalores $1, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-1}{4}, \frac{1}{4}$. Calcule el límite en (1) en términos de X o bien demuestre que este no existe.

9. Sea $x \in \mathbb{R}^d$ y $\{e_1, \ldots, e_d\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^d$.
(a) Sea $\mathbf{M_j}$ la matriz que se obtiene de reemplazar la j-ésima columna de la matriz identidad $\mathbf{I_n}$ por x, es decir,

$$\mathbf{M_j} = [e_1 \cdots e_{j-1}\; x\; e_{j+1} \cdots e_d] \,.$$

Calcule $\det(\mathbf{M_j})$, el determinante de $\mathbf{M_j}$.
(b) Sea $b \in \mathbb{R}^d$ y suponga que x es tal que $\mathbf{A}x = b$ es consistente. Defina $\mathbf{C_j} = \mathbf{AM_j}$, describa cómo son las columnas de $\mathbf{C_j}$ en términos de las columnas de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{M_j}$.
(c) Calcule $\det(\mathbf{AM_j})$. Suponiendo que $\mathbf{A}$ es invertible, utilice su cálculo para deducir la regla de Cramer para el sistema $\mathbf{A}x = b$.

10.
(a) Demuestre que para cualquier matriz $\mathbf{A}$ y vector b, uno y solamente uno de los siguientes problemas tiene solución:

$$(i) \quad \mathbf{A}x = b\,, \qquad\qquad (ii) \quad y^t\mathbf{A} = 0^t \quad \text{tal que} \quad y^t b \neq 0\,,$$

en donde 0^t denota al renglón nulo.

(b) Suponga que el sistema $\mathbf{A}x = b$ es siempre consistente para cualquier vector b. ¿Qué puede decir entonces acerca del conjunto solución del sistema $\mathbf{A}^t y = 0$?