Licenciatura en Matemáticas Aplicadas
Examen de Cálculo y Álgebra Lineal
Enero 18 de 2010

Nombre del Estudiante: ____________________

Resuelva los siguientes ejercicios justificando todas sus respuestas.

1. Encuentre el
$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{2/n}-1}{1/n}.$$

2. Calcule la distancia más corta desde la curva $xy = 8$ al origen.

3. La longitud en pies de una barra metálica, sometida a una temperatura de T grados Fahrenheit, está dada por la función
$$L(T) = \begin{cases} (T+1000)/100, & \text{si } 0 \le T < 400; \\ 14, & \text{si } 400 \le T < 500; \\ (T+900)/100, & \text{si } T \ge 500. \end{cases}$$
¿Qué función expresa la longitud de esta varilla en metros, si la temperatura se mide en grados Celsius? Recuerde que 1 pie =30.48 cm y que la conversión de grados Fahrenheit a grados Celsius está dada por $°C = 5(°F - 32)/9$.

4. Determine los máximos locales de la función $f(x,y) = \dfrac{1}{(2\pi y)^{\frac{n}{2}}}\, e^{-\frac{1}{2y}\sum_{i=1}^{n}(a_i - x)^2}$, $y > 0$, para $n \in \mathbb{N}$ y $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ fijos.

5. Calcule el volumen de la parte del cilindro $(x-1)^2 + y^2 \le 1$ que está limitada inferiormente por el plano $z = 0$ y superiormente por el cono $z = 2 - \sqrt{x^2+y^2}$.

6. (i) Sea $\mathbf{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ un campo vectorial continuamente diferenciable en $\mathbb{R}^3$. Demuestre que si existe un campo escalar dos veces continuamente diferenciable ϕ en $\mathbb{R}^3$ tal que $\nabla\phi = \mathbf{F}$, entonces $\nabla \times \mathbf{F} = 0$.
(ii) Determine para cuáles de los siguientes campos vectoriales existe un campo escalar continuamente diferenciable ϕ en $\mathbb{R}^3$ tal que $\nabla\phi = \mathbf{F}$ y en caso afirmativo encuentre ϕ.
   a) $\mathbf{F}(x,y,z) = \left(xyz + e^x, \dfrac{x^2 z}{2} + \cos y, \dfrac{x^2 y}{2} + ze^{-z^2}\right)$,
   b) $\mathbf{F}(x,y,z) = \left(xyz - y, \dfrac{x^2 z}{2} + x, \dfrac{x^2 y}{2}\right)$.

7. Determine una base del espacio generado por las columnas de
$$H = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

8. Sean B, C y D matrices 3×3 con entradas reales. Si los valores propios de B son 1, 2, 3; los de C son 4, 5, 6 y los de D son 7, 8, 9, encuentre los valores propios de
$$A = \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix}.$$

9. Considere la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por
$$T(e_3) = 2e_1 + 3e_2 + 5e_3, \quad T(e_2 + e_3) = e_1, \quad T(e_1 + e_2 + e_3) = e_2 - e_3,$$
en donde $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$.
   a) Encuentre el núcleo y el rango de T.
   b) Encuentre la matriz de T respecto a la base $\{a_1 = (2,3,5),\, a_2 = (1,0,0),\, a_3 = (0,1,-1)\}$ de $\mathbb{R}^3$.

10. En ocasiones, al realizar un experimento en el cual se obtienen los datos en pares (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, n$, se desea encontrar la parábola $y = a + bx + cx^2$ que mejor se ajuste a los datos por el método de mínimos cuadrados, es decir se deben encontrar los valores de a, b y c para los cuales el total de las diferencias $S(a,b,c) = \sum_{i=1}^{n}(y_i - a - bx_i - cx_i^2)^2$ sea mínima. Emplee el método de los mínimos cuadrados para encontrar la parábola que mejor se ajuste a los datos

x_i	-1	0	1	2
y_i	0.5	2.5	3	2.75