LIMA de la UAEH 23 de enero del 2009

Examen de Cálculo y Álgebra Lineal

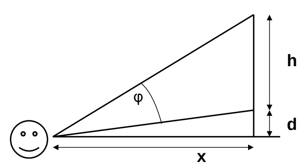
Nombre completo del estudiante: ______________________________

Resuelva los siguientes ejercicios, justificando todas tus respuestas.

1. Hallar la derivada de la función:

$$F(x) = \int_3^{\left(\int_1^x \operatorname{sen}^3 t dt\right)} \frac{1}{1 + t^2 + \operatorname{sen}^6 t} dt$$

2. En una galería de arte hay una pintura de altura h colgada en la pared, de modo que su borde inferior queda a una distancia d arriba del ojo del observador, como en la figura. ¿Cuán lejos debe pararse un observador de la pared para tener la mejor vista de la pintura?, es decir, ¿a qué distancia x se debe situar para maximizar en su ojo el ángulo φ subtendido por la pintura?



3. Sean φ y ψ dos funciones que se pueden representar en series de potencias como

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \text{ donde } a_0 = 1,\ a_1 = 0 \text{ y } a_{k+2} = \frac{-4a_k}{(k+1)(k+2)}, \quad k \geq 0, \quad \text{y}$$

$$\psi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k, \text{ donde } b_0 = 0,\ b_1 = 2 \text{ y } b_{k+2} = \frac{-4b_k}{(k+1)(k+2)}, \quad k \geq 0.$$

Demuestre que estas series convergen para toda $x \in \mathbb{R}$ y que las funciones φ y ψ satisfacen $\varphi^2(x) + \psi^2(x) = 1$, para toda x real.

4. Considere una esfera de radio $r \geq 0$ cuyo centro se encuentra en la superficie de una segunda esfera de radio 1. Demuestre que el volumen V de la intersección de esas esferas está dado por

$$V(r) = \begin{cases} \frac{\pi}{3} r^3 \left(2 - \frac{3}{4} r\right), & \text{si} \quad 0 \leq r \leq 2; \\ \frac{4}{3}\pi, & \text{si} \quad r \geq 2. \end{cases}$$

5. Si $z = f(x, y)$, donde $x = r\cos\theta$ y $y = r \operatorname{sen}\theta$, pruebe que $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial z}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}$.

6. Considere la función definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 2y, & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

a) Demuestre que para todo $t \in [0,1]$ existe la integral $\int_0^t f(x,y)dy$ y que se cumple

$$\underline{\int_0^1} \left(\int_0^t f(x,y)dy \right) dx = t^2, \quad \overline{\int_0^1} \left(\int_0^t f(x,y)dy \right) dx = t,$$

donde las barras en las integrales denotan las integrales inferior y superior, respectivamente.

b) De lo anterior, concluya que $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dy \right) dx$ existe y su valor es 1.

c) ¿Cuál es el valor de $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dx \right) dy$?

d) Si $R = [0,1] \times [0,1]$, ¿existe $\int \int_R f(x,y)\,dA$?

Nota: Todas las integrales consideradas en este ejercicio son integrales de Riemann.

7. Sea V el espacio lineal de las funciones reales continuas en el intervalo $[-\pi,\pi]$ y S el subconjunto de V que consiste de las funciones f que satisfacen las tres condiciones siguientes:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos t\,dt = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\operatorname{sen} t\,dt = 0.$$

a) Demuestre que S es un subespacio lineal de V.

b) Demuestre que S contiene a las funciones $f(x) = \cos nx$ y $f(x) = \operatorname{sen} nx$, para cada $n = 2$, 3, 4,... y concluya que S tiene dimensión infinita.

c) Sea $T : V \to V$ la transformación lineal $T(f)(x) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \{1 + \cos(x-t)\} f(t)\,dt$. Determine el núcleo de T y el rango $T(V)$ de T; demuestre que este último tiene dimensión finita y encuentre una base para $T(V)$.

Sugerencia: $\cos(A+B)+\cos(A-B) = 2\cos A\cos B$, $\cos(A-B)-\cos(A+B) = 2\operatorname{sen} A\operatorname{sen} B$ y $\operatorname{sen}(A+B) + \operatorname{sen}(A-B) = 2\operatorname{sen} A\cos B$.

8. Sean A una matriz cuadrada y O la matriz nula. Demuestre que A es singular si y sólo si existe una matriz $B \neq O$, del mismo orden que A, tal que $AB = O$.

9. Mediante un cambio de coordenadas, exprese la forma cuadrática $(x,y,z)A(x,y,z)^T$, donde T denota la transpuesta y

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

en la forma $ax^2 + by^2 + cz^2$, con a, b y c números reales.

10. Encuentre los valores característicos de A^{2009}, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 11 \\ 0 & -1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$