LIMA de la UAEH 25 de enero de 2008

Examen de Cálculo y Álgebra Lineal

Nombre completo del estudiante: ____

RESUELVA LOS SIGUIENTES EJERCICIOS, JUSTIFICANDO TODAS SUS RESPUESTAS.

1. Demuestra que $f_m(x) = x^3 - 3x + m$ nunca tiene dos raíces en el intervalo $[0,1]$ sin importar el valor de m.

2. Encuentra el punto del primer cuadrante sobre la parábola $y = 4 - x^2$ de modo que el triángulo determinado por la tangente a la parábola en ese punto y los ejes coordenados tenga área mínima.

3. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal. Supón que $T(1,0)$ está en el cuarto cuadrante (abierto) de $\mathbb{R}^2$, supón que $T(0,1)$ está en el segundo cuadrante (abierto) de $\mathbb{R}^2$ y supón que $T(1,1)$ está en el primer cuadrante (abierto) de $\mathbb{R}^2$. Demuestra que T es invertible.

4. Calcula la derivada de la función dada por
$$f(x) = \int_0^{x^2} \frac{\operatorname{sen}(xt)}{t}\, dt.$$

5. Sea $S : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ una transformación lineal sobre $\mathbb{C}$ y supón que $S^k = I$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Demuestra que si λ es un eigenvalor de S entonces $|\lambda| = 1$.

6. Decide para qué valores reales positivos de k la serie
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^k}$$
converge.

7. Considera la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$
Calcula e^A.

8. Sea $a \in \mathbb{R}^n$ fijo. Define la función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ como $f(x) = a \cdot x$. Encuentra los valores máximos y mínimos de f restringida a $\|x\| = 1$.

9. Sea V un espacio vectorial y sea $\{u_1, u_2\}$ una base de V. Sea $T : V \to V$ una transformación lineal con la propiedad que
$$T(u_1) = u_1 - u_2 \qquad T(u_2) = u_1$$
   a) Sea A la matriz de T con respecto a la base $\{u_1, u_2\}$. Encuentra A.
   b) Sea $w_1 = 3u_1 - u_2$ y $w_2 = u_1 + u_2$. Demuestra que $\{w_1, w_2\}$ es una base de V.
   c) Sea B la matriz de T con respecto a la base $\{w_1, w_2\}$. Encuentra B.
   d) Halla una matriz P tal que $PAP^{-1} = B$.

10. Demuestra que no existe ninguna función inyectiva $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ que sea de clase C^1.