Examen de Cálculo y Álgebra Lineal

Nombre completo del estudiante: ______________________________

RESUELVE LOS SIGUIENTES EJERCICIOS, JUSTIFICANDO TODAS TUS RESPUESTAS

1. Sea $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que $f(0) = 0$ y f' es creciente. Demuestre que la función $\dfrac{f(x)}{x}$ también es creciente en $(0,\infty)$.

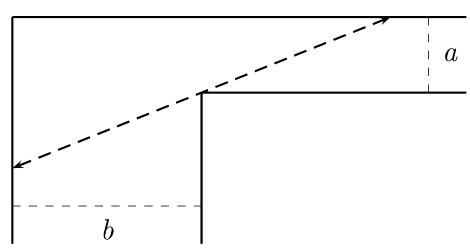
2. Considere la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\,(\log n)^s}$. Demuestre que converge cuando $s > 1$ y diverge cuando $s = 1$.

3. Considere la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^n + 3x^2y^{n-2} + 2xy^{n-1}}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ c & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
Encuentre todos los valores reales de c y todos los valores naturales de n, tales que f sea continua en el origen y demuéstrelo.

4. Suponga que f es una función continua en $\mathbb{R}$. Demuestre que para todo natural n,
$$\int_0^{x_n}\int_0^{x_{n-1}} \cdots \int_0^{x_1} f(t)\ dt\ dx_1 \cdots dx_{n-1} = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^{x_n} f(t)(x_n - t)^{n-1}\ dt.$$

5. Dada la función $u(x,y)$, defina a una nueva función $v(r,\theta) = u(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$, donde (r,θ) son los coordenadas polares de (x,y). (a) Exprese $\frac{\partial u}{\partial x}$ y $\frac{\partial u}{\partial y}$ en términos de $\frac{\partial v}{\partial r}$ y $\frac{\partial v}{\partial \theta}$. (b) Encuentre una fórmula para el Laplaciano Δu (definido por $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$) en términos de las derivadas parciales de v con respecto a r y θ.

6. Dos pasillos de anchos a y b se intersecan en ángulos rectos como se ve en la figura. ¿Cuál es la longitud máxima de una escalera que puede ser transportada de un pasillo a otro a través de la esquina?



7. Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ los eigenvalores de una matriz A tales que $\lambda_i \neq \lambda_j$ para $i \neq j$. Si $v_1, v_2, \ldots, v_r$ son los correspondientes eigenvectores, demuestre que el conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ es linealmente independiente.

8. Sea A una matriz $n \times n$. (a) Demuestra que $A^2 = 0$ si y sólo si el espacio generado por las columnas de A está contenido en el espacio nulo de A. (b) Demuestre que si $A^2 = 0$ entonces el rango de A es menor o igual que $n/2$.

9. Asuma que toda matriz se puede llevar a la forma escalonada reducida por medio de operaciones elementales. Demuestre que una matriz es invertible si y sólo si es producto de matrices elementales.

10. ¿Cuáles son todas las posibles formas canónicas de Jordan para matrices 3×3?