LIMA de la UAEH 12 de enero del 2006

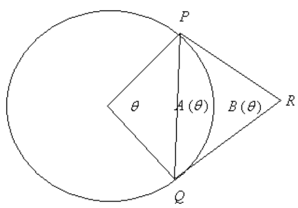
Examen de Cálculo y Álgebra Lineal

Nombre completo del estudiante: ____________________

Resuelve los siguientes ejercicios, justificando todas tus respuestas.

Problema 1. Demuestre que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua, entonces su imagen es un intervalo cerrado.

Problema 2. Un arco PQ de un círculo subtiende un ángulo central θ, como en la figura. Sea $A(\theta)$ el área entre la cuerda PQ y el arco PQ, y denotemos por $B(\theta)$ el área entre las rectas PR y QR tangentes al círculo y el arco PQ. Encuentre



$$\lim_{\theta \to 0^+} \frac{A(\theta)}{B(\theta)}.$$

Problema 3. Pruebe que si A es una matriz $n \times n$ con entradas reales que satisface $A = A^T$ entonces todos sus valores propios son reales.

Problema 4. Considere la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que a cada vector lo rota un ángulo de $\pi/4$ en sentido contrario a las manecillas del reloj. Encuentre las matrices que representan a T respecto a las bases $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ y $\{3\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, -3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\}$.

Problema 5. Haga una discusión completa de la gráfica de la función siguiente, incluyendo por supuesto sus extremos locales, intervalos de concavidad y un esbozo de su gráfica:

$$\int_0^{x^2} \frac{dt}{1+t^2}$$

Problema 6. Demuestre que toda función lineal en $\mathbb{R}$ es continua.

Problema 7. Encuentre la inversa de la siguiente matriz, si es que existe: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

Problema 8. Suponga que la función de distribución de la temperatura en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 30$ se encuentra dada por $T(x, y, z) = x - 2y + 5z$. Encuentre entonces los puntos más cálido y más frío.

Problema 9. (a) Si R es la región del plano acotada por una curva C simple y cerrada, demuestre que el área $A(R)$ de R se puede calcular mediante la fórmula

$$A(R) = -\oint_C y\, dx.$$

(b) Calcule el área de la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$

Problema 10. Sea A una matriz de 2×2 con valores propios $\lambda_1 \neq \lambda_2$.. Demuestre que el espacio generado por los correspondientes vectores propios no es otra cosa que la imagen de A.