# Examen de Cálculo y Álgebra Lineal

**Nombre completo del estudiante:** ______________________________

Resuelva los siguientes ejercicios y presente sus soluciones justificando todas sus respuestas.

**Problema 1.** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función suprayectiva. Demuestre que si $f$ es creciente, entonces $f$ es continua.

**Problema 2.** Considere el sólido de revolución obtenido mediante la rotación alrededor del eje $z$, del disco situado en el plano $(x, z)$ con centro en $(3, 0, 0)$ y radio 1. Calcule el volumen y el área superficial de este sólido.

**Problema 3.** Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales positivos, con $a_{n+1} \leq a_n$ para toda $n$. Demuestre que si $a_n$ converge a cero, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\{(-1)^n a_n\}$ converge.

**Problema 4.** Sean $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w} \neq 0$ vectores en un espacio vectorial $V$. Demuestre que

$$c = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}}$$

es el único escalar para el cual $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - c\mathbf{w}$ es ortogonal a $\mathbf{w}$.

**Problema 5.** Diagonalice la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$

**Problema 6.** Tres estudiantes de la LIMA deciden alimentarse sanamente con una pizza, estilo poblana, de 50 cm de diámetro. Siendo dichos estudiantes particularmente inhábiles en el uso del cuchillo, deciden partirla en tres porciones únicamente por medio de cortes rectos y paralelos. Determine dónde deben hacerse tales cortes para que los tres individuos obtengan porciones iguales.

**Problema 7.** Considere el campo escalar definido por

$$\phi(x, y, z) = x^2 + 3xy + 2z.$$

1. Encuentre un vector normal a la superficie $\phi(x, y, z) = 0$ en el origen.
2. ¿Cuál es el valor máximo de la derivada direccional de $\phi$ en el origen?
3. Calcule $d\phi/dr$ en el origen, para $d\mathbf{r} = ds(\mathbf{i} + \mathbf{j})$

**Problema 8.** Demuestre que todos los subespacios no nulos de $\mathbb{R}^2$ son de la forma $\{(x, y) \mid ax + by = 0\}$, para algunos $a, b \in \mathbb{R}$.

**Problema 9.** Sea $V$ un espacio vectorial de dimensión $m$, y sea $T : V \to V$ una transformación lineal normal (ésto es, $TT^\star = T^\star T$). Demuestre que entonces $T(\mathrm{Ran}(T)) = \mathrm{Ran}(T)$.

**Problema 10.** Verifique la siguiente identidad:

$$\int_1^{\cosh x} \sqrt{t^2 - 1}\, dt = \frac{\cosh x \operatorname{senh} x}{2} - \frac{x}{2}.$$