LIMA de la UAEH 15 de enero de 2004

Examen de Cálculo y Álgebra Lineal

Nombre completo del estudiante: ____________________

Resuelva los siguientes ejercicios y presente sus soluciones justificando todas sus respuestas.

Problema 1. Determine cuántas soluciones tiene la ecuación $\cos x = x/7$.

Problema 2. Encuentre la proyección ortogonal del vector $(1, 1, -1)$ sobre el subespacio generado por los vectores $(1, -1, 1)$ y $(-1, 1, 1)$.

Problema 3. Calcule la derivada de la función

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{t^4 + 1}.$$

Problema 4. Demuestre que $T(x, y, z) = (x - y, x - z, y - z)$ es lineal y encuentre sendas bases para su rango y su núcleo.

Problema 5. Determine el intervalo de convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{3^n \log(n + 1)}.$$

¿Para qué valores de x la convergencia de esta serie es absoluta?

Problema 6. Para cada $a \in \mathbb{R}$ defínase

$$T_a = 1 + \frac{aD}{1!} + \frac{a^2 D^2}{2!} + \cdots + \frac{a^n D^n}{n!},$$

donde $D = \dfrac{d}{dx}$. (a) Demuestre que T_a es un transformación lineal en el espacio vectorial de los polinomios de grado $\leq n$. (b) Demuestre que si $p(x)$ es un polinomio de grado $\leq n$, entonces $(T_a p)(x) = p(x + a)$. (c) Encuentre la matriz de T_a con respecto a la base $\{1, x, x^2, \cdots, x^n\}$.

Problema 7. Encuentre el volumen del sólido limitado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 2ay$.

Problema 8. Sea f una función continua y creciente tal que $f(0) = 0$. Demuestre que para cualquier $x \in \mathbb{R}$ se satisface

$$xf(x) = \int_0^x f(t)\, dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\, dt.$$

Problema 9. Decida si existe una matriz P tal que $B = P^{-1}AP$, en donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Problema 10. Determine los puntos más cercanos al origen de la curva $x^2 + 4y^2 + xy = 1$.