Licenciatura en Matemáticas Aplicadas

Examen de Cálculo

18 de enero de 2018

Nombre del Estudiante: ____________________

`Resuelve los siguientes ejercicios justificando todas tus respuestas.`

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, una función continua y diferenciable en el intervalo $[6, 15]$, tal que $f(6) = -2$ y $f'(x) \leq 10$. ¿Cuál es el mayor valor que puede tomar $f(15)$?

2. Grafica la función $f(x) = \frac{\log(x+1)}{x}$ dando todas sus características: dominio, regiones de crecimiento y decrecimiento, de concavidad y convexidad, máximos y mínimos locales y globales, límites en los extremos de su dominio y lugares en dónde no existe $f(x)$.

3. Sea $f(x)$ una función positiva, decreciente y continua para $x \geq 1$, tal que $\int_1^\infty f(x)\,dx$ es convergente. Demuestra que
$$\int_1^\infty f(x)\,dx < \sum_{n=1}^{\infty} f(n) < f(1) + \int_1^\infty f(x)\,dx,$$
y empleando esta relación estima $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$.

4. Encuentra la derivada direccional de la función $f(x, y, z) = \exp(xy \operatorname{sen} z)$ en el punto $(1, 1, \pi/4)$, en la dirección $\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

5. Encuentra el paralelepípedo de mayor volumen inscrito en el elipsoide
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$
$(a, b, c > 0)$.